Приложение к статье Горбунов К.Ю., Любецкий В.А.

«Линейный алгоритм минимальной перестройки структур»

Доказательство леммы 3. *Жестким* назовём блок, ограниченный с обеих сторон общими генами, *полужёстким* – блок, ограниченный общим геном лишь с одной стороны, *свободным* – блок, не имеющий граничных общих генов.

Рассмотрим случаи.

1. o – разрез. Если r – жесткий или полужёсткий блок, то o' – разрез любого края блока r. Если r – свободный блок, то o' – пустая операция. Утверждение очевидно.

2. o – полуторная переклейка, разбивающая блок r. Если r – жёсткий или полужёсткий блок, то o' – модифицированная полуторная переклейка o: расклейка внутри r заменена на расклейку любого края блока r. Если r – полужёсткий блок, то o' – пустая операция. Утверждение очевидно.

3. o – двойная переклейка. Сначала рассмотрим случай, когда одна её расклейка разбивает некоторый блок r, а вторая расклейка, обозначаемая s, не разбивает. Если r – жёсткий или полужёсткий блок, то o' – модифицированная двойная переклейка o: расклейка внутри r заменена на расклейку любого края блока r. Если r – свободный блок, то o' – полуторная переклейка, заключающаяся в расклейке s и склейке любого полученного края с любым краем блока r. Теперь рассмотрим случай, когда одна расклейка переклейки разбивает блок r_1, а другая – блок r_2. Пусть r_1 и r_2 – различные блоки. Если среди них нет свободного блока, то o' – модифицированная переклейка o: расклейки внутри блоков r_1 и r_2 заменены на расклейки любых краёв этих блоков. Иначе, пусть, например, r_1 – свободный блок. Если блок r_2 жёсткий или полужёсткий, то o' – полуторная переклейка, в которой расклейка осуществляется с любого края блока r_2, после чего к любому из двух образовавшихся краёв присоединяется блок r_1. Если блок r_2 свободный, то o' – пустая операция. Наконец, если $r_1 = r_2$, то o' – пустая операция. □

Доказательство леммы 4. Рассмотрим случаи. Если операция o_1 зацикливает блок, а операция переклейки o_2 делает в нём расклейку, то будем говорить об *особом случае*. Несклеенный край гена будем называть *свободным.*

1. o_1 – операция вставки. Обозначим вставляемый отрезок r. Рассмотрим подслучаи.

1.1. o_2 – операция удаления. Тогда операции o_1 и o_2 коммутируют, и их можно поменять местами, положив o_3=o_2, o_4=o_1.

1.2. o_2 – склейка. Поскольку склеиваются два блока, оба склеиваемых края свободны и в структуре d. Снова положим $o_3=o_2$, $o_4=o_1$.

1.3. o_2 – полуторная переклейка. Свободный край блока, склеиваемый в o_2 (обозначим его h_1), свободен и в структуре d. Рассмотрим случай, когда ровно один из расклеиваемых в o_2 краёв – край блока (обозначим его h_2). Если h_2 в структуре $o_1(d)$ склеен с геном, не принадлежащим отрезку r, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Пусть h_2 склеен с отрезком r. Если вставка o_1 жёсткая (между h_2 и некоторым h_3), положим: o_3 – полуторная переклейка (расклейка пары h_2h_3 и образование склеенной пары h_1h_2), o_4 – полужёсткая вставка отрезка r, склеивающая его с краем h_3. Если вставка o_1 полужёсткая (r присоединяется к h_2), положим: o_3 – склейка h_1 и h_2, o_4 – свободная вставка отрезка r. Теперь рассмотрим случай, когда оба расклеиваемых в o_2 края являются краями (циклического) блока. Тогда отрезок r вставился вне этого блока, и снова поменяем o_1 и o_2 местами.

1.4. o_2 – двойная переклейка. Хоть один из краёв каждой из двух расклеек – край блока (обозначим эти края h_1 и h_2). Если они не склеены с отрезком r, как обычно, меняем o_1 и o_2 местами. Пусть с отрезком r склеен ровно один из краёв h_1 или h_2, например, h_1. Если вставка o_1 жёсткая (между h_1 и некоторым h_3), положим: o_3 – двойная особая переклейка (с расклейкой пары h_1h_3 и образованием склеенной пары h_1h_2), o_4 – жёсткая вставка отрезка r рядом с h_3. Если вставка o_1 полужёсткая, положим: o_3 – полуторная переклейка (с расклейкой возле h_2 и образованием склеенной пары h_1h_2), o_4 – полужёсткая вставка отрезка r. Пусть с отрезком r склеены оба края h_1 и h_2. Тогда вставка отрезка r происходит в циклический блок, а операция o_2 инвертирует r или снова вырезает его. Это противоречит тому, что o_2 – особая операция. Случай 1 разобран.

2. o_1 – склейка. Обозначим склеиваемые края h_1 и h_2. Поскольку склейка обычная, h_1 и h_2 не могут быть краями разных блоков. Рассмотрим подслучаи.

2.1. o_2 – операция удаления. Так как операция o_1 обычная, удаляемый блок r существует в структуре d. Если h_1 и h_2 ему не принадлежат, положим $o_3=o_2$, $o_4=o_1$. Пусть ровно один из краёв h_1 или h_2 – край блока r (пусть h_2). Если удаление o_2 жёсткое, положим: o_3 – полужёсткое удаление блока r, o_4 – склейка края h_1 с образовавшимся свободным краем. Если удаление o_2 полужесткое, положим: o_3 – свободное удаление блока r, o_4 – пустая операция. То же самое положим и в случае, когда оба края h_1 и h_2 – края (циклического) блока r.

2.2. o_2 – склейка. Достаточно положить $o_3=o_2$, $o_4=o_1$.

2.3. o_2 – полуторная переклейка. Свободный край блока, склеиваемый в o_2 (обозначим его h_3), свободен и в структуре d. Рассмотрим сначала неособый случай. Хотя бы один из краёв расклеиваемой в o_2 пары краёв является краем блока (обозначим его h_4). Если расклеиваемая пара краёв склеена в структуре d, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Иначе, она образовалась в результате операции o_1, тогда h_1=h_4 или h_2=h_4. В этом случае положим: o_3 – склейка h_4 и h_3, o_4 – пустая операция. Теперь рассмотрим особый случай, когда оба расклеиваемых в o_2 края являются краями циклического блока, причём склейка o_1 зациклила этот блок. Положим: o_3 – склейка краёв h_1 и h_3, o_4 – пустая операция. Тогда структуры f и $o_3(d)$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и, следовательно, являются упрощениями друг друга.

2.4. o_2 – двойная переклейка. Хоть один из краёв каждой из двух расклеек – край блока (обозначим эти края h_3 и h_4). Рассмотрим сначала неособый случай. Если обе пары расклеиваемых краёв склеены в структуре d, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Если одна из них образовалась в результате операции o_1, тогда, например, h_2=h_4. В этом случае положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3, o_4 – склейка края h_1 с тем краем, с которым был склеен край h_3 в структуре d. Эта операция обычная, так как если оба склеиваемых края принадлежат блокам в d, то эти блоки слились в один блок в результате операции o_3. Теперь рассмотрим особый случай. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_4, o_4 – пустая операция. Тогда структуры f и $o_3(d)$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и являются упрощениями друг друга. Случай 2 разобран.

3. o_1 – разрез. Обозначим края разреза как h_1 и h_2. Рассмотрим подслучаи.

3.1. o_2 – операция удаления. Если h_1 и h_2 не являются краями удаляемого блока r, положим o_3=o_2, o_4=o_1. Пусть ровно один из краев h_1 или h_2 – край блока r (пусть h_2). Если удаление o_2 полужёсткое, положим: o_3 – жёсткое удаление блока r, o_4 – разрез склеенного края h_1. Если удаление o_2 свободное, положим: o_3 – полужесткое удаление блока r, o_4 – пустая операция. То же самое положим и в случае, когда оба края h_1 и h_2 – края (циклического) блока r.

3.2. o_2 – склейка, обозначим склеиваемые края блоков h_3 и h_4. Если они оба отличны от h_1 и h_2, положим o_3=o_2, o_4=o_1. Если же, например, h_2=h_4, положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3, o_4 – пустая операция.

3.3. o_2 – полуторная переклейка. Хоть один из расклеиваемых краев (обозначим его h_3) и свободный край h_4 – края блоков. Расклеиваемые края склеены в структуре d. Если край h_4 свободен в структуре d, то, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Иначе, он появился в результате операции o_1, тогда, например, h_2=h_4. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3, o_4 – разрез второй образовавшейся склеенной пары.

3.4. o_2 – двойная переклейка. Очевидно, обе пары расклеиваемых краёв склеены в структуре d. Поэтому, как обычно, меняем o_1 и o_2 местами. Случай 3 разобран.

4. o_1 – полуторная переклейка. Обозначим расклеиваемые края как h_1 и h_2, свободный край как h_3, пусть образуется склеенная пара h_1h_3. Рассмотрим подслучаи.

4.1. o_2 – операция удаления. Так как операция o_1 обычная, удаляемый блок r существует в структуре d. Положим: o_3 – удаление блока r. Если h_1, h_2 и h_3 не являются краями блока r, положим o_4=o_1. Пусть ровно один из краёв h_1, h_2 или h_3 – край блока r. Если удаление o_3 жёсткое, положим: o_4 – полуторная переклейка, полученная из o_1 заменой края блока на свободный край, возникший после удаления. Если оно полужёсткое, то o_4 –пустая операция (если h_1 – край блока) или склейка (если h_2 – край блока), или разрез (если h_3 – край блока). Пусть два из краев h_1, h_2, h_3 – края блока r. Тогда положим: o_4 – пустая операция.

4.2. o_2 – склейка, обозначим склеиваемые края блоков как h_4 и h_5. Если они оба отличны от h_2, положим o_3=o_2, o_4=o_1. Если, например, h_2=h_4, положим: o_3 – полуторная переклейка со склеиванием краев h_2 и h_5, o_4 – склейка h_1 и h_3.

4.3. o_2 – полуторная переклейка; обозначим расклеиваемую в ней пару краёв как s, а склеиваемый свободный край блока как h_4. Рассмотрим сначала неособый случай. Если в структуре d s склеена и h_4 свободен, то, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Если в d s не склеена, а край h_4 свободен, то s=h_1h_3 и возможны два случая. В случае 1 в результате o_2 образуется склеенная пара h_1h_4. Положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_4, o_4 – пустая операция. В случае 2 в результате o_2 образуется склеенная пара h_3h_4. Положим: o_3 – склейка h_3 и h_4, o_4 – разрез пары h_1h_2. Если в d пара s склеена, а край h_4 не свободен, то h_4=h_2. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_5, где h_5 – блоковый край из пары s, o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_3 (это – обычная операция, поскольку o_1 обычная). Если в структуре d s не склеена и h_4 не свободен, то h_4=h_2, s=h_1h_3. Поскольку o_1 – обычная операция, а o_2 – особая, в результате нее образуется склеенная пара h_3h_2. Положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3, o_4 – пустая операция. Теперь рассмотрим особый случай. Очевидно, h_2 не является краем блока, поэтому $h_2 \neq h_4$. Положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_4, o_4 – пустая операция. Тогда структуры f и $o_3(d)$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и являются упрощениями друг друга.

4.4. o_2 – двойная переклейка. Рассмотрим сначала неособый случай. Если обе пары расклеиваемых краёв склеены в структуре d, как обычно, меняем o_1 и o_2 местами. Пусть одна из них не склеена в структуре d, тогда она является парой h_1h_3. Вторая пара, очевидно, склеена в d. Обозначим ее h_4h_5 и пусть, например, в результате операции o_2 образуются склеенные пары h_3h_4 и h_1h_5. Поскольку o_1 – обычная операция, h_1 или h_3 не является краем блока. Если это h_1, положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_3h_4, o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_5. Если это h_3, положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_5, o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_3h_4. Теперь рассмотрим особый случай. Обозначим h_4h_5 склеенную пару краёв, расклеиваемую операцией o_2 и не лежащую в образовавшемся циклическом блоке. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенных пар h_1h_5 и h_3h_4, o_4 – пустая операция. Тогда структуры f и $o_3(d)$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и являются упрощениями друг друга. Случай 4 разобран.

5. o_1 – двойная переклейка. Обозначим расклеиваемые склеенные пары h_1h_2 и h_3h_4, пусть в результате образуются склеенные пары h_1h_4 и h_3h_2. Рассмотрим подслучаи.

5.1. o_2 – операция удаления. Так как операция o_1 обычная, удаляемый блок r существует в структуре d. Положим: o_3 – удаление блока r. Если h_1, h_2, h_3 и h_4 не являются краями блока r, положим $o_4=o_1$. Пусть ровно один из краев h_1, h_2, h_3 или h_4 – край блока r, например, h_1. Если удаление o_3 жесткое, положим: o_4 – полуторная переклейка, полученная из o_1 заменой края блока на свободный край, возникший после его удаления. Если оно полужесткое, то o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3. Пусть два из краев h_1, h_2, h_3, h_4 – края блока r. Тогда положим: o_4 – пустая операция. Других случаев, очевидно, быть не может.

5.2. o_2 – склейка. Можно поменять o_1 и o_2 местами.

5.3. o_2 – полуторная переклейка; обозначим расклеиваемую в ней пару краёв s, а склеиваемый свободный край блока h_5. Очевидно, h_5 свободен в структуре d. Рассмотрим сначала неособый случай. Если края из s склеены в структуре d, то, как обычно, поменяем o_1 и o_2 местами. Если они не склеены в d, то $s=h_1h_4$ или $s=h_2h_3$, пусть, например, $s=h_2h_3$, и в результате операции o_2 образуется склеенная пара h_5h_3. Положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_3h_5, o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_4 (это – обычная операция, так как o_1 обычная). Теперь рассмотрим особый случай. Пусть, например, h_1 и h_4 принадлежат зацикленному блоку. Положим: o_3 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_1h_5, o_4 – полуторная переклейка с образованием склеенной пары h_2h_3. Тогда структуры f и $o_4(o_3(d))$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и являются упрощениями друг друга.

5.4. o_2 – двойная переклейка. Рассмотрим сначала неособый случай. Если обе расклеиваемых в o_2 пары краёв склеены в структуре d, как обычно, меняем o_1 и o_2 местами. Пусть ровно одна из них не склеена в структуре d, например, пара h_1h_4. Вторую пару обозначим h_5h_6 и пусть, например, в результате операции o_2 образуются склеенные пары h_1h_6 и h_5h_4, причем h_1 и h_6 – края блоков. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенных пар h_1h_6 и h_2h_5, o_4 – двойная переклейка с образованием склеенных пар h_2h_3 и h_5h_4. Пусть операция o_2 расклеивает и переклеивает те же склеенные пары h_1h_4 и h_2h_3, которые возникли в результате операции o_1. Тогда в результате образуются склеенные пары h_1h_3 и h_2h_4, которые можно сразу получить операцией o_3 при пустой o_4. Теперь рассмотрим особый случай. Пусть, например, h_1 и h_4 принадлежат зацикленному блоку. Обозначим h_5h_6 пару краёв, расклеиваемую операцией o_2 и не лежащую в образовавшемся циклическом блоке (она отлична от склеенной пары h_2h_3, так как операция o_2 особая, а h_2 и h_3 не являются краями блоков). Пусть, например, h_5 – край блока. Положим: o_3 – двойная переклейка с образованием склеенных пар h_1h_5 и h_2h_6; o_4 – двойная переклейка с образованием склеенных пар h_2h_3 и h_4h_6. Очевидно, o_4 – обычная операция, а структуры f и $o_4(o_3(d))$ отличаются лишь порядком расположения генов в блоке, возникшем после операции o_3, и являются упрощениями друг друга. Случай 5 разобран. □

Доказательство Теоремы 2. Будем считать, что алгоритм строит множество M, добавляя в него элементы по одному, в соответствии с описанным порядком.

Для удобства, занумеруем этапы расширения M:

1) по типу $\{1a,1b\}$.

2) по типам $\{2a,3b\}$ и $\{2b,3a\}$.

3) по типу $\{2,3\}$.

4) по типам $\{1a,2b,3\}$ и $\{1a,3b,2\}$.

5) по типам $\{1a,2\}$ и $\{1a,3\}$.

6) по типу $\{1a,1a,2b,3b\}$.

7) по типам $\{1a,1a,2b\}$ и $\{1a,1a,3b\}$.

8) по типу $\{1a,1a\}$.

9) по типам $\{1a,2b\}$ и $\{1a,3b\}$.

10) по типам $\{2a,2b,3,3\}$ и $\{3a,3b,2,2\}$.

11) по типам $\{2,2,3a\}$ и $\{3,3,2a\}$.

12) по типам $\{2,2,3b\}$ и $\{3,3,2b\}$.

13) по типам $\{2a,2b,3\}$ и $\{3a,3b,2\}$.

Достаточно показать, что на каждом шаге текущее множество M является подмножеством некоторого множества максимального веса (называем его максимальным множеством). Рассуждаем индукцией по построению M. Рассмотрим возможные случаи добавления очередного элемента, обозначая через M текущее множество до добавления. Для удобства рассуждений представим информацию об элементах в виде таблицы 1, где строки помечены весом элементов, столбцы – типом цепи v, которая содержится в элементе, а в ячейках перечислены типы множеств, получаемых удалением из элемента цепи v. Для краткости, при указании множества из одного типа фигурные скобки будем опускать.

	$1a$	$1b$	$2a$	$2b$	$3a$	$3b$	2	3
1	$1a,2,3,$ $2b,3b$	$1b,2,3,$ $2a,3a$	$1b,3b,$ $\{2b,3\},$ $\{3,3\}$	$1a,3a,$ $\{2a,3\},$ $\{3,3\}$	$1b,2b,$ $\{3b,2\},$ $\{2,2\}$	$1a,2a,$ $\{3a,2\},$ $\{2,2\}$	$1a,1b,3,$ $\{3a,3b\},$ $\{3a,2\},\{3b,2\}$	$1a,1b,2,$ $\{2a,2b\},$ $\{2a,3\},\{2b,3\}$
2	$1b,$ $\{1a,2b\},\{1a,3b\},$ $\{2b,3\},\{3b,2\}$	$1a,$ $\{1b,2a\},\{1b,3a\},$ $\{2a,3\},\{3a,2\}$	$\{1b,1b\},$ $\{1b,3\},$ $\{2b,3,3\}$	$\{1a,1a\},$ $\{1a,3\},$ $\{2a,3,3\}$	$\{1b,1b\},$ $\{1b,2\},$ $\{3b,2,2\}$	$\{1a,1a\},$ $\{1a,2\},$ $\{3a,2,2\}$	$\{1a,3b\},$ $\{1b,3a\},$ $\{3a,3b,2\}$	$\{1a,2b\},$ $\{1b,2a\},$ $\{2a,2b,3\}$
3	$\{1a,2b,3b\}$	$\{1b,2a,3a\}$	$\{1b,1b,3a\}$	$\{1a,1a,3b\}$	$\{1b,1b,2a\}$	$\{1a,1a,2b\}$	–	–

Табл. 1. Соответствие элементов каждого веса и их цепей.

1) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 1, цепь u имеет тип $1a$, цепь v – тип $1b$. Пусть имеется некоторое максимальное множество M' и элемент $\{u,v\}$ не входит в него, а все элементы из M входят. Рассмотрим возможные множества K элементов из M', содержащих цепи u или v. Множество цепей, содержащихся в элементах из K, обозначим $I(K)$. Рассмотрим возможные случаи.

1.1. Вес множества K не больше 2, т.е. веса элемента $\{u,v\}$. Заменим в M' все элементы из K на один элемент $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M. В дальнейшем аналогичные случаи рассматривать не будем.

1.2. В K содержится элемент e типа $\{1a,1b\}$, т.е. типа элемента $\{u,v\}$. Например, пусть $e=\{u',v\}$. Рассмотрим биекцию на множестве $I(K)$, переводящую u' и u друг в друга и оставляющую на месте другие цепи. Она переводит K во множество K' того же веса, состоящее из попарно не пересекающихся элементов и содержащее элемент $\{u,v\}$. Заменим в M' множество K на K'. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M. В дальнейшем аналогичные случаи рассматривать не будем.

1.3. Вес множества K равен 3. Рассмотрим три возможных подслучая.

1.3.1. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2 (в силу симметрии достаточно рассмотреть случай u), а другая – в элементе из K веса 1. Таким образом, возможны 20 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\},\{2b,3\},\{3b,2\}\}$ и $\{1b,2a,3a,2,3\}$ (см. ячейки [2,1a] и [1,1b] табл. 1): $\{1a,2b,1b\}$, $\{1a,2b,2a\}$, $\{1a,2b,3a\}$, $\{1a,2b,2\}$, $\{1a,2b,3\}$, $\{1a,3b,1b\}$, $\{1a,3b,2a\}$, $\{1a,3b,3a\}$, $\{1a,3b,2\}$, $\{1a,3b,3\}$,$\{2b,3,1b\}$, $\{2b,3,2a\}$, $\{2b,3,3a\}$, $\{2b,3,2\}$, $\{2b,3,3\}$, $\{3b,2,1b\}$, $\{3b,2,2a\}$, $\{3b,2,3a\}$, $\{3b,2,2\}$, $\{3b,2,3\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1 или больше. Заменим в M' множество K на множество из этого элемента и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

1.3.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 3 (в силу симметрии достаточно рассмотреть случай u), а другая не содержится ни в каком элементе из K. Таким образом, множество $I(K)\backslash\{u,v\}$ равно $\{1a,2b,3b\}$ (см. ячейку [3,1a] табл. 1), и в нем содержится элемент веса 1. Заменим в M' множество K на множество из этого элемента и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

1.3.3. Обе цепи u, v содержатся в одном и том же элементе из K веса 3. Этот случай невозможен.

1.4. Вес множества K равен 4. Рассмотрим два возможных подслучая.

1.4.1. Каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2. Таким образом, возможны 16 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\},\{2b,3\},\{3b,2\}\}$ и $\{\{1b,2a\},\{1b,3a\},\{2a,3\},\{3a,2\}\}$ (см. ячейки [2,1a] и [2,1b] табл. 1): $\{1a,2b,1b,2a\}$, $\{1a,2b,1b,3a\}$, $\{1a,2b,2a,3\}$, $\{1a,2b,3a,2\}$, $\{1a,3b,1b,2a\}$, $\{1a,3b,1b,3a\}$, $\{1a,3b,2a,3\}$, $\{1a,3b,3a,2\}$, $\{2b,3,1b,2a\}$, $\{2b,3,1b,3a\}$, $\{2b,3,2a,3\}$, $\{2b,3,3a,2\}$, $\{3b,2,1b,2a\}$, $\{3b,2,1b,3a\}$, $\{3b,2,2a,3\}$, $\{3b,2,3a,2\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится либо два непересекающихся элемента веса 1, либо элемент веса 2, т.е. содержится множество веса не менее 2. Заменим в M' множество K на множество из его элементов и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

1.4.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 3 (в силу симметрии достаточно рассмотреть случай u), а другая – в элементе из K веса 1. Таким образом, возможны 5 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b,3b\}\}$ и $\{1b,2a,3a,2,3\}$ (см. ячейки [3,1a] и [1,1b] табл. 1): $\{1a,2b,3b,1b\}$, $\{1a,2b,3b,2a\}$, $\{1a,2b,3b,3a\}$, $\{1a,2b,3b,2\}$, $\{1a,2b,3b,3\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса не менее 2. Заменим в M' множество K на множество из его элементов и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

1.5. Вес множества K равен 5. В этом случае одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 3 (в силу симметрии достаточно рассмотреть случай u), а другая – в элементе из K веса 2. Таким образом, возможны 5 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b,3b\}\}$ и $\{1a,\{1b,2a\},\{1b,3a\},\{2a,3\},\{3a,2\}\}$ (см. ячейки [3,1a] и [2,1b] табл. 1): $\{1a,2b,3b,1a\}$, $\{1a,2b,3b,1b,2a\}$, $\{1a,2b,3b,1b,3a\}$, $\{1a,2b,3b,2a,3\}$, $\{1a,2b,3b,3a,2\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса не менее 3. Заменим в M' множество K на множество из его элементов и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

1.6. Вес множества K равен 6. В этом случае каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 3. Таким образом, множество $I(K)\backslash\{u,v\}$ равно $\{1a,2b,3b,1b,2a,3a\}$. Очевидно, в нем содержится множество веса 4. Заменим в M' множество K на множество из его элементов и элемента $\{u,v\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v\}$ и все элементы из M.

После этого этапа не останется либо свободных цепей типа 1a, либо свободных цепей типа 1b. Рассмотрим первый случай, иначе нужно во всех последующих шагах заменить a на b.

2) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 2. Рассмотрим случай, когда цепь u имеет тип 2a, а цепь v – тип 3b. Пусть имеется некоторое максимальное множество M' и элемент $\{u,v\}$ не входит в него, а все элементы из M входят. Рассмотрим возможные множества K элементов из M', содержащих цепи u или v. Множество цепей, содержащихся в элементах из K, обозначим $I(K)$. Рассмотрим возможные случаи. При

этом учитываем, что свободных (т.е. не содержащихся в M) цепей типа $1b$ уже нет.

2.1. Вес множества K равен 2. Рассмотрим возможные подслучаи.

2.1.1. Каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 1. Таким образом, возможны 6 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{2b,3\},\{3,3\}\}$ и $\{1a,\{3a,2\},\{2,2\}\}$ (см. ячейки $[1,2a]$ и $[1,3b]$ табл. 1): $\{2b,3,1a\}$, $\{2b,3,3a,2\}$, $\{2b,3,2,2\}$, $\{3,3,1a\}$, $\{3,3,3a,2\}$, $\{3,3,2,2\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1 или больше. Дальнейшее рассуждение стандартно, далее его не упоминаем.

2.1.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2 (рассмотрим случай u, случай v аналогичен), а другая не содержится ни в каком элементе из K. Легко видеть, что при удалении цепи u из элемента в нем останется элемент веса 1 (см. ячейку $[2,2a]$ табл. 1). Отсюда следует справедливость рассматриваемого утверждения.

2.2. Вес множества K равен 3. Рассмотрим возможные подслучаи.

2.2.1. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2, а другая – в элементе из K веса 1 (каждый из двух вариантов индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 2). Возможны 10 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: при варианте u (см. ячейки $[2,2a]$ и $[1,3b]$ табл. 1) – $\{2b,3,3,1a\}$, $\{2b,3,3,2a\}$, $\{2b,3,3,3a,2\}$, $\{2b,3,3,2,2\}$; при варианте v (см. ячейки $[2,3b]$ и $[1,2a]$ табл. 1) – $\{1a,1a,2b,3\}$, $\{1a,1a,3,3\}$, $\{1a,2,2b,3\}$, $\{1a,2,3,3\}$, $\{3a,2,2,2b,3\}$, $\{3a,2,2,3,3\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2 или больше.

2.2.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 3, а другая не содержится ни в каком элементе из K. Возможны 2 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: $\{1b,1b,3a\}$, $\{1a,1a,2b\}$ (см. ячейки $[3,2a]$ и $[3,3b]$ табл. 1). Очевидно, в каждом из них содержится элемент веса 2.

2.3. Вес множества K равен 4. Рассмотрим возможные подслучаи.

2.3.1. Каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2. Возможны 3 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: $\{2b,3,3,1a,1a\}$, $\{2b,3,3,1a,2\}$, $\{2b,3,3,3a,2,2\}$ (см. ячейки $[2,2a]$ и $[2,3b]$ табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 3.

2.3.2. Цепь v содержится в элементе из K веса 3, а цепь u – в элементе из K веса 1. Возможны 3 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: $\{1a,1a,2b,3b\}$, $\{1a,1a,2b,2b,3\}$, $\{1a,1a,2b,3,3\}$ (см. ячейки $[3,3b]$ и $[1,2a]$ табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 3.

2.4. Вес множества K равен 5. В этом случае цепь v содержится в элементе из K веса 3, а цепь u – в элементе из K веса 2. Множество $I(K)\backslash\{u,v\}$ имеет тип

$\{1a,1a,2b,2b,3,3\}$ (см. ячейки $[3,3b]$ и $[2,2a]$ табл. 1). Очевидно, в нем содержится множество веса 4.

Теперь рассмотрим случай, когда цепь u имеет тип $2b$, а цепь v – тип $3a$. В силу наличия вертикального автоморфизма рассуждение в этом случае проходит аналогично рассмотренному случаю с заменой указанных пар типов $(2a,3a)$, $(2b,3b)$, (2,3) друг на друга.

3) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 3. Рассмотрим случай, когда цепь u имеет тип 2, а цепь v – тип 3. Не повторяя стандартных рассуждений, рассмотрим возможные случаи.

3.1. Вес множества K равен 2. Рассмотрим возможные подслучаи.

3.1.1. Каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 1. Таким образом, возможны 16 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{3a,3b\},\{3a,2\},\{3b,2\}\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [1,2] и [1,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1 или больше.

3.1.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2 (рассмотрим случай u, случай v аналогичен), а другая не содержится ни в каком элементе из K. Легко видеть, что при удалении цепи u из элемента в нем останется элемент веса 1 (см. ячейку [2,2] табл. 1). Отсюда следует справедливость рассматриваемого утверждения.

3.2. Вес множества K равен 3. В этом случае одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2, а другая – в элементе из K веса 1 (рассмотрим случай, когда первая цепь u, другой случай аналогичен). Возможны 8 типов множества $I(K)\backslash\{u,v\}$, являющихся выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,3b\},\{3a,3b,2\}\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [2,2] и [1,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2 или больше.

3.3. Вес множества K равен 4. В этом случае каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2. Возможны 4 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: $\{1a,3b,1a,2b\}$, $\{1a,3b,2a,2b,3\}$, $\{3a,3b,2,1a,2b\}$, $\{3a,3b,2,2a,2b,3\}$ (см. ячейки [2,2] и [2,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество суммарного веса 3.

4) Элемент $\{u,v,w\}$ добавляется на этапе 4, цепь u имеет тип $1a$, цепь v – тип $2b$, цепь w – тип 3. Пусть имеется некоторое максимальное множество M' и элемент $\{u,v,w\}$ не входит в него, а все элементы из M входят. Рассмотрим возможные множества K элементов из M', содержащих цепи u, v или w. Множество цепей, содержащихся в элементах из K, обозначим $I(K)$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже

нет свободных цепей типа 1b (по результату этапа 1), типа 3a (по результату этапа 2) и типа 2 (по результату этапа 3).

4.1. Вес множества K равен 3. Рассмотрим возможные подслучаи.

4.1.1. Множество K состоит из трех элементов веса 1. Тогда каждая из цепей u, v, w содержится в элементах из K веса 1. Таким образом, возможные типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ являются всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,2b,3b,3\}$, $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [1,1a], [1,2b] и [1,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1 или больше. Заменим в M' множество K на множество из этого элемента и элемента $\{u,v,w\}$. Множество M' останется максимальным и будет содержать элемент $\{u,v,w\}$ и все элементы из M.

4.1.2. Множество K состоит из одного элемента веса 1 и одного элемента веса 2. В этом случае либо одна из цепей u, v, w содержится в элементах из K веса 1, другая – веса 2, третья – ни в каком (назовем это случаем 1), либо две цепи содержатся в общем элементе веса 1, а третья – в элементе веса 2 (назовем это случаем 2), либо две цепи содержатся в общем элементе веса 2, а третья – в элементе веса 1 (назовем это случаем 3). В случаях 1 и 2 (см. ячейки [2,1a], [2,2b] и [2,3] табл. 1) видим, что любой допустимый элемент веса 2 после удаления соответствующей цепи превращается в элемент веса 1, что обеспечивает требуемое свойство (такие элементы далее будем называть *тривиальными*). Варианты случая 3 индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 1. Возможны следующие типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ (сначала указываем остаток элемента веса 2, равный для вариантов w и u, соответственно, 1a и $\{2a,3\}$). Вариант w – $\{1a,1a\}$, $\{1a,2a,2b\}$, $\{1a,2a,3\}$, $\{1a,2b,3\}$ (см. ячейку [1,3] табл. 1); вариант u – $\{2a,3,1a\}$, $\{2a,3,2b\}$, $\{2a,3,3b\}$, $\{2a,3,3\}$ (см. ячейку [1,1a], табл. 1), вариант v – рассматривать нечего. Очевидно, в каждом из указанных множеств содержится элемент веса 1 или больше.

4.1.2. Множество K состоит из единственного элемента веса 3. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда оно содержит сразу две цепи: u и v. Множество $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ имеет тип $\{1a,3b\}$ и содержит элемент веса 1.

4.2. Вес множества K равен 4. Рассмотрим возможные подслучаи.

4.2.1. Множество K содержит 3 элемента. В этом случае две из цепей u, v, w содержатся в элементах из K веса 1 (каждая – в своём), а третья – веса 2. Варианты индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 2. Возможны следующие типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$. Вариант u – выборка по одному элементу из множеств:

$\{\{1a,2b\},\{1a,3b\}\}$, $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [2,1a], [1,2b] и [1,3] табл. 1). Вариант v – выборка по одному элементу из множеств: $\{\{1a,1a\},\{2a,3,3\}\}$, $\{1a,2b,3b,3\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [2,2b], [1,1a] и [1,3] табл. 1). Вариант w – выборка по одному элементу из множеств: $\{\{2a,2b,3\}\}$, $\{1a,2b,3b,3\}$, и $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$ (см. ячейки [2,3], [1,1a] и [1,2b] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2 или больше.

4.2.2. Множество K состоит из двух элементов веса 2. Этот случай нетривиален лишь тогда, когда один элемент содержит сразу две цепи: u и v, либо v и w. Таким образом, возможны следующие типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ (сначала указываем остаток элемента веса 2: $1a$ либо $\{2a,3\}$): $\{1a,2a,2b,3\}$, $\{2a,3,1a,3b\}$, $\{2a,3,1a,2b\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2.

4.2.3. Множество K состоит из элемента веса 1 и элемента веса 3. Возможны следующие типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ (сначала указываем остаток $\{1a,3b\}$ элемента веса 3; указываем лишь минимальные по включению варианты, соответствующие случаю, когда элемент веса 3 содержит сразу две цепи u и v): $\{1a,3b,1a\}$, $\{1a,3b,2a,2b\}$, $\{1a,3b,2a,3\}$, $\{1a,3b,2b,3\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2.

4.3. Вес множества K равен 5.

4.3.1. Множество K состоит из двух элементов веса 2 и одного элемента веса 1. Варианты индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 1. Вариант u: возможны 8 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,2b,3b,3\}$, $\{\{1a,1a\},\{2a,3,3\}\}$ и $\{\{2a,2b,3\}\}$ (см. ячейки [1,1a], [2,2b] и [2,3] табл. 1). Вариант v: возможны 6 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$, $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\}\}$ и $\{\{2a,2b,3\}\}$ (см. ячейки [1,2b], [2,1a] и [2,3] табл. 1). Вариант w: возможны 16 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$, $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\}\}$, и $\{\{1a,1a\},\{2a,3,3\}\}$ (см. ячейки [1,3], [2,1a] и [2,2b] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 3 или больше.

4.3.2. Множество K состоит из двух элементов веса 1 и одного элемента веса 3. Варианты индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 3. Вариант u: возможны 12 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b,3b\}\}$, $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [3,1a], [1,2b] и [1,3] табл. 1). Вариант v: возможны 16 типов множества

$I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,1a,3b\}\}$, $\{1a,2b,3b,3\}$ и $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [3,2b], [1,1a] и [1,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 3 или больше.

4.3.3. Множество K состоит из элемента веса 2 и элемента веса 3. Возможны следующие типы множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ (сначала указываем остатки $\{1a,3b\}$ и $\{1a,1a,3b\}$ элемента веса 3, указываем лишь минимальные по включению варианты): $\{1a,3b,1a,2b\}$, $\{1a,3b,2a,2b,3\}$, $\{1a,1a,3b,1a,3b\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 3.

4.4. Вес множества K равен 6.

4.4.1. Множество K состоит из трех элементов веса 2. Возможны 6 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\}\}$, $\{\{1a,1a\},\{1a,3\},\{2a,3,3\}\}$ и $\{\{2a,2b,3\}\}$ (см. ячейки [2,1a], [2,2b] и [2,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 4 или больше.

4.4.2. Множество K состоит из трех элементов веса 1, 2 и 3. Варианты индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 1. Вариант u: возможны 4 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,2b,3b,3\}$, $\{\{2a,2b,3\}\}$ и $\{\{1a,1a,3b\}\}$ (см. ячейки [1,1a], [2,3] и [3,2b] табл. 1). Вариант v: возможны 3 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{2a,3\},\{3,3\}\}$, $\{\{2a,2b,3\}\}$ и $\{\{1a,2b,3b\}\}$ (см. ячейки [1,2b], [2,3] и [3,1a] табл. 1). Вариант w: возможны 12 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$, $\{\{1a,1a,3b,1a,2b\},\{1a,1a,3b,1a,3b\},\{1a,2b,3b,2a,3,3\}\}$ (см. ячейки [1,3], [2,1a], [2,2b], [3,1a], [3,2b] табл. 1).Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 4 или больше.

4.4.3. Множество K состоит из двух элементов веса 3. Множество $I(K)\backslash\{u,v,w\}$ имеет тип $\{1a,2b,3b,1a,1a,3b\}$ (см. ячейки [3,1a] и [3,2b] табл. 1). Очевидно, в нем содержится множество веса 4.

4.5. Вес множества K равен 7.

4.5.1. Множество K состоит из двух элементов веса 2 и одного элемента веса 3. Варианты индексируем цепью, содержащейся в элементе веса 3. Вариант u: возможны 2 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,2b,3b\}\}$, $\{\{1a,1a\},\{2a,3,3\}\}$ и $\{\{2a,2b,3\}\}$ (см. ячейки [3,1a], [2,2b] и [2,3] табл. 1). Вариант v: возможны 2 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{1a,1a,3b\}\}$, $\{\{1a,2b\},\{1a,3b\}\}$ и $\{\{2a,2b,3\}\}$ (см. ячейки [3,2b], [2,1a] и [2,3] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 5 или больше.

4.5.2. Множество K состоит из двух элементов веса 3 и одного элемента веса 1. Возможны 4 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$, $\{\{1a,2b,3b\}\}$ и $\{\{1a,1a,3b\}\}$ (см. ячейки [1,3], [3,1a] и [3,2b] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 5 или больше.

4.6. Вес множества K равен 8. В этом случае множество K состоит из двух элементов веса 3 и одного элемента веса 2. Возможен 1 тип множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$: $\{1a,2b,3b,1a,1a,3b,2a,2b,3\}$ (см. ячейки [1,1a], [3,2b] и [2,3] табл. 1). Очевидно, в нем содержится множество веса 6.

В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{1a,3b,2\}$ проводится аналогично.

5) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 5. Рассмотрим случай, когда цепь u имеет тип 1a, а цепь v – тип 2. Не повторяя стандартные определения, рассмотрим возможные случаи. Учитываем, что уже нет свободных цепей типа 1b (по результату этапа 1), типа 3 (по результату этапа 3) и типа 3b (по результату этапа 4).

5.1. Вес множества K равен 2. Рассмотрим возможные подслучаи.

5.1.1. Каждая из цепей u, v содержится в элементе из K веса 1. Таким образом, возможны 2 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: $\{1a,3a,2\}$ и $\{2b,3a,2\}$ (см. ячейки [1,1a] и [1,2] табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1 или больше.

5.1.2. Одна из цепей u, v содержится в элементе из K веса 2, а другая не содержится ни в каком элементе из K. Очевидно (см. ячейки [2,1a] и [2,2] табл. 1), что единственный возможный элемент $\{1a,1a,2b\}$ является тривиальным.

5.2. Вес множества K равен 3. Возможен единственный случай, когда цепь u содержится в элементе из K веса 2, а цепь v – в элементе из K веса 1. Возможны 2 типа множества $I(K)\backslash\{u,v\}$: (см. ячейки [2,1a] и [1,2] табл. 1): $\{1a,2b,1a\}$, $\{1a,2b,3a,2\}$. Очевидно, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2.

Дальнейшие случаи, очевидно, невозможны. В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{1a,3b\}$ проводится аналогично.

6) Элемент (u,v,w_1,w_2) добавляется на этапе 6, цепи u и v имеют тип 1a, цепь w_1 –

тип $2b$, цепь w_2 – тип $3b$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типов $2a$ и $3a$ (по результату этапа 2) и типов 2 и 3 (по результату этапа 4).

6.1. Вес множества K равен 4. Рассмотрим возможные подслучаи.

6.1.1. Множество K состоит из четырех элементов веса 1. Поскольку единственный возможный элемент веса 1, содержащий цепи типа $2b$ или $3b$, дает во множестве $I(K)\backslash\{u,v,w_1,w_2\}$ тип $1a$ (см. ячейки $[1,2b]$ и $[1,3b]$ табл. 1), имеем в этом множестве элемент $\{1a,1a\}$ веса 1, что и требуется.

6.1.2. Множество K состоит из одного элемента веса 2 и двух элементов веса 1. Очевидно, снова имеем во множестве $I(K)\backslash\{u,v,w_1,w_2\}$ элемент $\{1a,1a\}$ веса 1, что и требуется.

6.1.3. Множество K состоит из двух элементов веса 2. Их возможные типы: $\{1a,1a,2b\}$, $\{1a,1a,3b\}$. Из четырех цепей типа $1a$ по крайней мере две не входят в элемент (u,v,w_1,w_2). Следовательно, во множестве $I(K)\backslash\{u,v,w_1,w_2\}$ имеется элемент $\{1a,1a\}$ веса 1, что и требуется.

6.2. Вес множества K больше 4. Этот случай, очевидно, невозможен.

7) Элемент $\{u,v,w\}$ добавляется на этапе 7, цепи u и v имеют тип $1a$, цепь w – тип $2b$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типа $3a$ (по результату этапа 2), типа $3b$ (по результату этапа 6) и типов 2 и 3 (по результату этапа 5).

7.1. Вес множества K равен 3. Единственный возможный случай: множество K состоит из трех элементов веса 1. Возможны 4 типа множества $I(K)\backslash\{u,v,w\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{1a,2b\}$, $\{1a,2b\}$ и $\{\{1a\}\}$ (см. ячейки $[1,1a]$ и $[1,2ba]$ табл. 1). Очевидно, в каждом из этих множеств содержится элемент веса 1.

Дальнейшие случаи, очевидно, невозможны. В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{1a,1a,3b\}$ проводится аналогично.

8) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 8, цепи u и v имеют тип $1a$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типов $2b$ и $3b$ (по результату этапа 7) и типов 2 и 3 (по результату этапа 5). Из ячеек $[1,1a]$, $[2,1a]$ и $[3,1a]$ табл. 1 видно, что рассматривать нечего.

9) Элемент $\{u,v\}$ добавляется на этапе 9, цепь u имеет тип $1a$, цепь v – тип $2b$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типа $3a$ (по результату этапа 2) и типов 2 и 3 (по результату этапа

5). Кроме того, по результату этапа 8 имеем, что уже нет свободных цепей типа $1a$ кроме v. Из ячеек [1,$1a$], [2,$1a$], [3,$1a$], [1,$2b$], [2,$2b$], [3,$2b$] табл. 1 видно, что рассматривать нечего. В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{1a,3b\}$ проводится аналогично.

10) Элемент (u,v,w_1,w_2) добавляется на этапе 10, цепи w_1 и w_2 имеют тип 3, цепь u – тип $2a$, цепь v – тип $2b$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типа $1a$ (по результату этапа 9) типов $3a$ и $3b$ (по результату этапа 2) и типа 2 (по результату этапа 3).

10.1. Вес множества K равен 3. Типы возможных элементов во множестве K: $\{2a,2b,3\}$, $\{2a,3,3\}$, $\{2b,3,3\}$; эти элементы имеют вес 1. Поэтому, K состоит из трех элементов. Если два из них имеют один тип, то из цепей множества $I(K)\backslash\{u,v,w_1,w_2\}$, очевидно, можно составить элемент того же типа. Если все три элемента имеют различные типы, то из цепей этого множества, очевидно, можно составить даже элемент типа $\{2a,2b,3,3\}$.

10.2. Вес множества K равен 4. Теперь множество K состоит из четырех элементов указанного типа. Возможны максимум 36 типов множества $I(K)\backslash\{u,v,w_1,w_2\}$, являющихся всевозможными выборками по одному элементу из множеств $\{\{2b,3\},\{3,3\}\}$, $\{\{2a,3\},\{3,3\}\}$, $\{\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$, $\{\{2a,2b\},\{2a,3\},\{2b,3\}\}$ (см. ячейки [1,$2a$], [1,$2b$] и [1,3] табл. 1). В выборке $\{3,3,3,3,2a,3,2a,3\}$ содержится два элемента типа $\{2a,3,3\}$ Аналогично для выборки $\{3,3,3,3,2b,3,2b,3\}$. Во всех других выборках содержится элемент $\{2a,2b,3,3\}$. Таким образом, в каждом из этих множеств содержится множество веса 2.

В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{3a,3b,2,2\}$ проводится аналогично.

11) Элемент $\{u,v,w\}$ добавляется на этапе 11, цепи u и v имеют тип 2, цепь w – тип $3a$. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типа $1a$ (по результату этапа 5), типа $2b$ (по результату этапа 2), типа $3b$ (по результату этапа 8) и типа 3 (по результату этапа 3). Из ячеек [1,$3a$], [2,$3a$], [3,$3a$], [1,2], [2,2], [3,2] табл. 1 видно, что рассматривать нечего. В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{3,3,2a\}$ проводится аналогично.

12) Элемент $\{u,v,w\}$ добавляется на этапе 12. В силу наличия горизонтального автоморфизма, рассуждение проводится аналогично этапу 11.

13) Элемент $\{u,v,w\}$ добавляется на этапе 13, цепи u и v имеют тип, соответственно, $2a$ и $2b$, цепь w – тип 3. Рассмотрим возможные случаи с учетом того, что уже нет свободных цепей типа $1b$ (по результату этапа 1), типа $1a$ (по результату этапа 5), типов $3a$ и $3b$ (по результату этапа 2) и типа 2 (по результату этапа 3). Кроме того, по результату этапа 10 имеем, что уже нет свободных цепей типа 3 кроме w. Из ячеек $[1,2a]$, $[2,2a]$, $[3,2a]$, $[1,2b]$, $[2,2b]$, $[3,2b]$ $[1,3]$, $[2,3]$, $[3,3]$ табл. 1 видно, что рассматривать нечего. В силу наличия вертикального автоморфизма, рассуждение с типом $\{3a,3b,2\}$ проводится аналогично. □

Замечание 1. Если задан порядок расширения множества M по типам добавляемых элементов, то можно автоматически проверить корректность рассуждения, доказывающего максимальность полученного M. Для этого на каждом шаге перебираем наборы (типов) K допустимых элементов (не более четырех элементов в наборе), с указанием, какие цепи в каждом элементе из K принадлежат добавляемому в M элементу e (каждый элемент из K должен содержать хотя бы одну цепь из e, все принадлежащие e цепи должны быть различными по всему K). Убеждаемся, что во множестве цепей E, равном объединению множества цепей из e и не попавших в e цепей из K, нет элементов ранее добавленных типов (можно ограничиться случаем, когда либо e, либо все элементы из K имеют мощность меньше 4, тогда $|E|\leq 9$). Затем проверяем, что из цепей набора K, не попавших в e, можно составить множество K' попарно непересекающихся элементов суммарного веса не меньше $w(K)–w(e)$. Мы осуществили компьютерную проверку, подтвердившую, что указанный выше порядок добавления типов элементов годится. Отметим, что расщепление на два случая после первого этапа, используемое в изложенном доказательстве, в автоматическом доказательстве не используется.

Доказательство Теоремы 5. Рассмотрим возможные типы операции o.

1. o – операция удаления особой вершины (блока). Очевидно, при переходе от графа G к графу $o(G)$ величина B уменьшается на 1. Рассмотрим возможные случаи.

1.0. Удаляется изолированная особая вершина. Напомним, она считается цепью типа $2a$ или $2b$. Очевидно, при переходе от графа G к графу $o(G)$ величины S и D не меняются. Величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Действительно, уменьшаться больше чем на 1 она не может, так как любой элемент веса 2 (соответственно, веса 3), содержащий цепь типа, отличного от типа $1a$ и $1b$, после удаления этой цепи превращается в элемент веса 1 (соответственно, веса 2), см. табл. 1. Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

1.1. Особая вершина удаляется из цикла (в частности, удаляется особая петля). Очевидно, при переходе от графа G к графу $o(G)$ величины D и P не меняются, величина S либо не меняется, либо увеличивается на 1. Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

1.2. Из цепи удаляется внутренняя особая вершина, т.е. такая, с обеих сторон от которой имеются другие особые вершины. При этом, очевидно, не меняется тип цепи. Тогда при переходе от графа G к графу $o(G)$ величины D и P сохраняются, величина S либо не меняется, либо увеличивается на 1. Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

1.3. Из цепи удаляется конец висячего ребра. Рассмотрим возможные случаи.

1.3.1. Удаляемая особая вершина является единственной особой вершиной в цепи. Очевидно, при переходе от графа G к графу $o(G)$ величина S не меняется. Цепь не может иметь тип $1a$ или $1b$ (так как либо она четная, либо у нее нечетный крайний сегмент), $3a$, $3b$, 3 (так как имеется висячее ребро). Следовательно, величина D не меняется – была и остается нулевой. Величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Действительно, уменьшаться больше чем на 1 она не может (см. рассуждение в пункте 1.0). Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

1.3.2. Удаляемая особая вершина не является единственной особой вершиной в цепи. Если при переходе от графа G к графу $o(G)$ величина S не меняется (т.е. сегмент, примыкающий к висячему ребру, четный), то возможные изменения типа цепи следующие: $1a \to 3a$, $1b \to 3b$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $2b \to 1b$, $1 \to 3$. В первых трех случаях величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Действительно, уменьшаться больше чем на 1 она не может, так как любой элемент веса 2 (соответственно, веса 3), содержащий цепь первого типа (слева от стрелки), после замены этой цепи на цепь второго типа (справа от стрелки) будет содержать множество веса 1 (соответственно, веса 2), см. табл. 1 (здесь, как и раньше, понимаем под множеством множество попарно не пересекающихся элементов). Увеличиваться эта величина не может, так как иначе бы при обратной замене она уменьшалась, но любой элемент e, содержащий цепь второго типа, после замены этой цепи на цепь первого типа будет содержать множество не меньшего веса, чем у e, см. табл. 1. Во вторых трех случаях величина D увеличивается на 1, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1 (рассуждение аналогично). Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Если же величина S увеличивается на 1 (т.е. сегмент, примыкающий к висячему ребру, нечетный), то тип цепи не меняется, следовательно величины D и P не меняются. Таким образом, величина $t(G)$ не меняется.

1.4. Из цепи удаляется крайняя особая вершина, т.е. такая, справа или слева от которой нет других особых вершин. Рассмотрим возможные случаи.

1.4.1. Удаляемая вершина является единственной особой вершиной в цепи. Очевидно, величина S либо не меняется, либо увеличивается на 1. Цепь не может иметь тип $1a$ или $1b$ (так как либо она четная, либо ее крайние сегменты имеют одинаковую четность), 2 или 3 (так как если цепь четная, то ее крайние сегменты имеют разную четность). Если цепь имеет тип $2a$, $2b$ или 1, то величины S и D не меняются. Величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1 (см. рассуждение в пункте 1.0). Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1. Если же цепь имеет тип $3a$ или $3b$, то S увеличивается на 1, D уменьшается на 1, P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Таким образом, величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1.

1.4.2. Удаляемая вершина не является единственной особой вершиной в цепи. Если при переходе от графа G к графу $o(G)$ величина S не меняется (т.е. крайний сегмент нечетный, а следующий – четный), то возможные изменения типа цепи следующие: $1a\to3a$, $1b\to3b$, $2\to1$, $2a\to1a$, $2b\to1b$, $1\to3$. В этом случае рассуждение совпадает с рассуждением из пункта 1.3.2. Если же величина S увеличивается на 1, то тип цепи либо не меняется (тогда величина $t(G)$ не меняется), либо (если оба примыкающих к особой вершине сегмента четные) возможные изменения следующие: $1a\to2a$, $1b\to2b$, $3\to1$, $3a\to1a$, $3b\to1b$, $1\to2$. В первых трёх случаях величина D уменьшается на 1, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1 (см. рассуждение в пункте 1.0). Во вторых трёх случаях величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1 (рассуждение аналогично). Таким образом, во всех случаях величина $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1.

2. o – операция склейки (добавления ребра). Сначала рассмотрим случай, когда склеиваются края одной и той же цепи. Очевидно, это возможно только для нечетных цепей. Рассмотрим их возможные типы. Для цепи типа 0 при переходе от графа G к графу $o(G)$ величина $t(G)$ уменьшается на 1 за счет уменьшения на 1 величины S. Для цепи типа $1a$ или $1b$ величины B и S не меняются (независимо от того, склеивается ли

конец висячего ребра или "заменяющий" это ребро крайний нечетный сегмент), D уменьшается на 1, P либо не меняется, либо уменьшается на 1, либо на 2. Таким образом, $t(G)$ может измениться не более чем на 1. Для цепи типа $2a$ или $2b$ величина D не изменится, P либо не изменится, либо уменьшится на 1. Если с обоих краёв цепи имеются висячие рёбра, то при склейке их концов величина B уменьшится на 1, S не изменится. Если хотя бы с одной стороны висячее ребро "заменено" нечетным сегментом, величина B не изменится, S уменьшится на 1. Во всех случаях $t(G)$ либо не изменится, либо уменьшится на 1. Для цепи типа $3a$ или $3b$ величины B и S не меняются, D уменьшается на 1, P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Таким образом, $t(G)$ либо не меняется, либо уменьшается на 1.

Теперь рассмотрим случай, когда склеиваются края разных цепей. Перебираем возможные пары типов краёв цепей. В таблице 2 приведены результаты этого перебора. Приведен результат склейки концов невисячих ребер, помеченных a, либо висячих ребер, помеченных b (таким образом, добавляемое ребро имеет пометку b). Результат склейки концов невисячих ребер, помеченных b или висячих ребер, помеченных a, получается переменой местами букв a и b. Обозначения типов краёв следующие: $0a$ – край нечетной цепи типа 0, 0 – край четной цепи типа 0, $1a$ – висячий край цепи типа $1a$, $1a'$ – невисячий край цепи типа $1a$, $2a$ – край цепи типа $2a$, $3a$ – край цепи типа $3a$, 1 – висячий край цепи типа 1, $1'$ – невисячий край цепи типа 1, 2 – край цепи типа 2, 3 – край цепи типа 3. Поскольку результат (содержимое ячейки) не зависит от того, имеется ли на висячем краю висячее ребро или «заменяющий» его нечетный сегмент, мы не различаем эти два случая. В каждой ячейке в круглых скобках указаны возможные изменения величины $t(G)$ при переходе от графа G к графу $o(G)$, где 0 означает «не меняется», –1 – «уменьшается на 1», +1 – «увеличивается на 1» («возможные» означает, что никакие другие изменения невозможны). Затем в квадратных скобках указаны соответствующие изменения величины P в том же порядке (эта информация будет использоваться в дальнейшем). В конце указан тип цепи, получающейся в результате склейки данных цепей. Очевидно, таблица симметрична относительно главной диагонали.

	$0a$	0	$1a$	$1a'$	$2a$	$3a$	1	$1'$	2	3
$0a$	(0) [0] $0a$	(0) [0] 0	(0) [0] $1a$	(0) [0] $1a$	(0) [0] $2a$	(0) [0] $3a$	(0) [0] 1	(0) [0] 1	(0) [0] 2	(0) [0] 3
0	(0) [0] 0	(+1) [0] $0b$	(0,+1) [0,–1] 3	(0,+1) [0,–1] 2	(0,+1) [0,–1] 1	(0,+1) [0,–1] 1	(0,+1) [+1,0] $3b$	(0,+1) [+1,0] $2b$	(0,+1) [+1,0] $1b$	(0,+1) [+1,0] $1b$

1*a*	(0) [0] 1*a*	(0,+1) [0,–1] 3	(0,–1) [–2,–1] 3*a*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1*a*	(0,–1) [–1,0] 1*a*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 3*a*	(0,–1) [–1,0] 3	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–2,–1] 1	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 3
1*a*′	(0) [0] 1*a*	(0,+1) [0,–1] 2	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1*a*	(0,–1) [–2,–1] 2*a*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 2*a*	(0,–1) [–1,0] 1*a*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–1,0] 2	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 2	(0,–1) [–2,–1] 1
2*a*	(0) [0] 2*a*	(0,+1) [0,–1] 1	(0,–1) [–1,0] 1*a*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 2*a*	(0,–1) [–1,0] 2*a*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 1*a*	(0,–1) [–1,0] 1	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 2	(0,–1) [–1,0] 2	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1
3*a*	(0) [0] 3*a*	(0,+1) [0,–1] 1	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 3*a*	(0,–1) [–1,0] 1*a*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 1*a*	(0,–1) [–1,0] 3*a*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 3	(0,–1) [–1,0] 1	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–1,0] 3
1	(0) [0] 1	(0,+1) [+1,0] 3*b*	(0,–1) [–1,0] 3	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–1,0] 1	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 3	(0,–1) [0,+1] 3*b*	(0,+1,–1) [+1,0,+2] 1*b*	(0,–1) [0,+1] 1*b*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 3*b*
1′	(0) [0] 1	(0,+1) [+1,0] 2*b*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–1,0] 2	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 2	(0,–1) [–1,0] 1	(0,+1,–1) [+1,0,+2] 1*b*	(0,–1) [0,+1] 2*b*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 2*b*	(0,–1) [0,+1] 1*b*
2	(0) [0] 2	(0,+1) [+1,0] 1*b*	(0,–1) [–2,–1] 1	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 2	(0,–1) [–1,0] 2	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [0,+1] 1*b*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 2*b*	(0,–1) [–1,0] 2*b*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 1*b*
3	(0) [0] 3	(0,+1) [+1,0] 1*b*	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 3	(0,–1) [–2,–1] 1	(0,+1,–1) [–1,–2,0] 1	(0,–1) [–1,0] 3	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 3*b*	(0,–1) [0,+1] 1*b*	(0,+1,–1) [0,–1,+1] 1*b*	(0,–1) [–1,0] 3*b*

Табл. 2. Результаты склейки краёв двух цепей.

Приведем рассуждения заполнения восьми ячеек таблицы (остальные ячейки заполняются аналогичными рассуждениями). Ячейки табл. 1 обозначаем квадратными скобками, что дает возможность не оговаривать каждый раз, из какой они таблицы.

1) Ячейка (0,1*a*). Висячее ребро или крайний нечетный сегмент превращается в крайний четный сегмент, так что в результате получается четная цепь типа 3. Величины B, S, D не меняются. Покажем, что при замене цепи типа 1*a* на цепь типа 3 величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Уменьшаться больше, чем на 1 она не может, так как любой элемент веса 2 (соответственно, веса 3), содержащий цепь типа 1*a*, после замены этой цепи на цепь типа 3 будет содержать множество веса 1 (соответственно, веса 2), см. табл. 1. Увеличиваться эта величина не может, так как иначе бы при обратной замене она уменьшалась, но любой элемент e, содержащий цепь типа 3, после замены этой цепи на цепь типа 1*a* будет содержать множество того же веса (или большего), что и e, см. табл. 1. Из этого следует указанный в ячейке результат.

2) Ячейка (1*a*,1*a*). Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 3*a*. Если обе исходных цепи содержали висячие рёбра, величина B уменьшилась на 1, а S не изменилась. Если хотя бы в одной исходной цепи вместо висячего ребра был нечетный крайний сегмент, то, наоборот, величина B не изменилась, а S уменьшилась на 1. Величина D уменьшилась на 1. Покажем, что при замене в двух цепей типа 1*a* на одну

цепь типа $3a$ величина P уменьшается либо на 1, либо на 2 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 3 или больше. Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 2, содержащих две цепи типа $1a$ в максимальном множестве.

2.1. Один элемент имеет вес 2, другой – вес 1. Тогда после замены в первом элементе цепи типа $1a$ на цепь типа $3a$, в полученном множестве будет элемент веса как минимум 1, что и требовалось.

2.2. Один элемент имеет вес 3, второй совпадает с первым или отсутствует. Если второй элемент совпадает с первым (т.е. содержит обе рассматриваемые цепи типа $1a$), то после замены их на цепь типа $3a$, в полученном множестве будет элемент веса как минимум 1, что и требовалось. Иначе, случай тривиален.

2.3. Оба элемента имеют вес 2. Из ячейки $[2,1a]$ табл. 1 следует, что при любом из 25 возможных сочетаний типов этих элементов рассматриваемая замена оставляет в них множество веса не меньше 2, что и требовалось.

2.4. Один элемент имеет вес 3, второй – вес 1. Тогда после замены в первом элементе цепи типа $1a$ на цепь типа $3a$, в полученном множестве будет содержаться множество веса как минимум 2, что и требовалось.

2.5. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 3. Из ячеек $[2,1a]$ и $[3,1a]$ табл. 1 следует, что при любом из 5 возможных сочетаний типов этих гиперребер рассматриваемая замена оставляет в них множество веса не меньше 3, что и требовалось.

2.6. Оба элемента имеют вес 3. Из ячейки $[3,1a]$ следует, что рассматриваемая замена оставляет в этих элементах множество веса не меньше 4, что и требовалось.

Теперь покажем, что величина P не может остаться неизменной или увеличиться. Действительно, иначе бы при обратной замене она осталась неизменной или уменьшилась. Рассмотрим возможные элементы, содержащие цепь типа $3a$ в максимальном множестве. Если их нет, то рассматриваемая замена создаст дополнительный вес 1 за счет элемента $\{1a,1a\}$. Иначе, из ячеек столбца $3a$ табл. 1 следует, что при любом из 8 возможных типов этих элементов рассматриваемая замена создаст дополнительный вес, что и требовалось.

3) Ячейка $(1a,2)$. Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 1. Если склеились два висячих ребра, величина B уменьшилась на 1, а S не изменилась. Если хотя бы в одной исходной цепи вместо висячего ребра был нечетный крайний сегмент, то, наоборот, величина B не изменилась, а S уменьшилась на 1. Величина D

уменьшилась на 1. Покажем, что при удалении двух цепей типа $1a$ и 2 (напомним, цепи типа 1 в элементы не входят), величина P уменьшается либо на 1, либо на 2 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 3 или больше. Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 2 из максимального множества, содержащих две рассматриваемые цепи.

3.1. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[2,1a]$ и $[1,2]$ табл. 1 и пары ячеек $[1,1a]$ и $[2,2]$ табл. 1.

3.2. Один элемент имеет вес 3, второй отсутствует. Результат следует из рассмотрения ячейки $[3,1a]$ табл. 1.

3.3. Оба элемента имеют вес 2. Результат следует из рассмотрения ячеек $[2,1a]$ и $[2,2]$ табл. 1.

3.4. Один элемент имеет вес 3, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения ячеек $[3,1a]$ и $[1,2]$ табл. 1.

3.5. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 3. Результат следует из рассмотрения ячеек $[3,1a]$ и $[2,2]$ табл. 1.

Теперь покажем, что величина P не может остаться неизменной или увеличиться. Действительно, иначе при обратной операции (добавлении двух рассматриваемых цепей) она бы осталась неизменной или уменьшилась. Но при этом создается дополнительный вес 1 за счет элемента $\{1a,2\}$.

4) Ячейка $(2a,3a)$. Очевидно, в результате склейки получается цепь типа $1a$. Величины B, S и D не изменились. Покажем, что при замене двух цепей типа $2a$ и $3a$ на одну цепь типа $1a$, величина P может измениться не более, чем на 1 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 2 или больше. Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 1 из максимального множества, содержащих две рассматриваемые цепи.

4.1. Оба элемента имеют вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[1,2a]$ и $[1,3a]$ табл. 1.

4.2. Один элемент имеет вес 2, второй отсутствует. Результат следует из рассмотрения ячеек $[2,2a]$ и $[2,3a]$ табл. 1.

4.3. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[2,2a]$ и $[1,3a]$ табл. 1 и симметричной пары ячеек.

4.4. Один элемент имеет вес 3, второй совпадает с первым или отсутствует. Если второй элемент совпадает с первым (т.е. содержит обе рассматриваемые цепи), то после их замены на цепь типа $1a$ в полученном множестве, очевидно, будет элемент веса 2, что и требовалось. Иначе, случай еще более тривиален.

4.5. Оба элемента имеют вес 2. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[2,2a]$ и $[2,3a]$ табл. 1.

4.6. Один элемент имеет вес 3, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[3,2a]$ и $[1,3a]$ табл. 1 и симметричной пары.

4.7. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 3. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[3,2a]$ и $[2,3a]$ табл. 1 и симметричной пары.

4.8. Оба элемента имеют вес 3. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[3,2a]$ и $[3,3a]$ табл. 1.

Теперь покажем, что величина P не может увеличиться на 2 или больше. Действительно, иначе бы при обратной замене она бы уменьшилась на 2 или больше. Но из ячеек $[2,1a]$ и $[3,1a]$ следует, что при любом типе элемента веса 2 или 3, содержащего цепь типа $1a$, рассматриваемая замена обеспечит в нем наличие множества веса 1 или, соответственно, веса 2.

5) Ячейка $(2a,1')$. Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 2. Величины B, S и D не изменились. Покажем, что при замене цепи типа $2a$ на цепь типа 2 величина P может измениться не более, чем на 1 (из этого следует указанный в ячейке результат). Действительно, из табл. 1 следует, что даже простое удаление цепи типа $2a$ или типа 2 не может уменьшить P более чем на 1, не говоря уж о замене.

6) Ячейка $(2a,3)$. Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 1. Величины B и S не изменились, D уменьшилась на 1. Покажем, что при удалении двух цепей типа $2a$ и 3, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1, либо на 2 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 3 или больше. Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 2 из максимального множества, содержащих две рассматриваемые цепи.

6.1. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек $[2,2a]$ и $[1,3]$ табл. 1 и пары ячеек $[1,2a]$ и $[2,3]$ табл. 1.

6.2. Один элемент имеет вес 3, второй отсутствует. Результат следует из рассмотрения ячейки $[3,2a]$ табл. 1.

6.3. Оба элемента имеют вес 2. Результат следует из рассмотрения ячеек $[2,2a]$ и $[2,3]$ табл. 1.

6.4. Один элемент имеет вес 3, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения ячеек $[3,2a]$ и $[1,3]$ табл. 1.

6.5. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 3. Результат следует из рассмотрения ячеек [3,2a] и [2,3] табл. 1.

Теперь покажем, что величина P не может увеличиться. Действительно, иначе при обратной операции (добавлении двух рассматриваемых цепей) она бы уменьшилась. Но это, очевидно, невозможно.

7) Ячейка (2,2). Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 2b. Если склеивались два висячих ребра, величина B уменьшилась на 1, а S не изменилась. Если хотя бы в одной исходной цепи вместо висячего ребра был нечетный крайний сегмент, то, наоборот, величина B не изменилась, а S уменьшилась на 1. Величина D не изменилась. Покажем, что при замене двух цепей типа 2 на одну цепь типа 2b величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 2 или больше. Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 1 из максимального множества, содержащих две цепи типа 2.

7.1. Оба элемента имеют вес 1. Результат следует из рассмотрения ячейки [1,2].

7.2. Один элемент имеет вес 2, второй совпадает с первым или отсутствует. Если второй элемент совпадает с первым (т.е. содержит обе рассматриваемые цепи), то после их замены на цепь типа 1a в полученном множестве, очевидно, будет элемент веса 1, что и требовалось. Иначе, случай еще более тривиален.

7.3. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения ячеек [2,2] и [1,2].

7.4. Оба элемента имеют вес 2. Результат следует из рассмотрения ячейки [2,2].

Теперь покажем, что величина P не может увеличиться. Действительно, иначе бы при обратной замене она уменьшилась. Из рассмотрения столбца 2b табл.1 следует, что это невозможно.

8) Ячейка (2,3). Очевидно, в результате склейки получается цепь типа 1b. Величины B, S и D не изменились. Покажем, что при замене двух цепей типа 2 и 3 на одну цепь типа 1b, величина P может измениться не более чем на 1 (из этого следует указанный в ячейке результат). Покажем, что она не может уменьшиться на 2 или больше (даже при удалении этих двух цепей, не говоря уж о замене). Рассмотрим возможные пары элементов суммарного веса больше 1 из максимального множества, содержащих две рассматриваемые цепи.

8.1. Оба элемента имеют вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек [1,2] и [1,3] табл. 1.

8.2. Один элемент имеет вес 2, второй отсутствует. Результат следует из рассмотрения ячеек [2,2] и [2,3] табл. 1.

8.3. Один элемент имеет вес 2, второй – вес 1. Результат следует из рассмотрения пары ячеек [2,2] и [1,3] табл. 1 и симметричной пары ячеек.

8.4. Оба элемента имеют вес 2. Результат следует из рассмотрения пары ячеек [2,2] и [2,3] табл. 1.

Теперь покажем, что величина P не может увеличиться на 2 или больше. Действительно, иначе бы при обратной замене она бы уменьшилась на 2 или больше. Но из рассмотрения ячеек $[2,1b]$ и $[3,1b]$ следует, что это невозможно даже при замене цепи типа $1b$ на какую-либо одну из цепей типа 2 или 3, не говоря уж о замене на обе.

Итак, утверждение для операции склейки следует из того, что, как видно из табл. 2, величина $t(G)$ может меняться не более чем на 1.

3. o – операция разреза. Поскольку эта операция является обратной к операции склейки, требуемый результат следует из результата пункта 2.

4. o – операция полуторной переклейки. Выделим три случая.

4.1. Операция применяется к одной цепи, т.е. склейка осуществляется с краем той же цепи, в которой была сделана расклейка. Это соответствует либо инверсии крайнего отрезка цепи, либо его отрезанию с зацикливанием. Этот вариант операции будет рассмотрен вместе с разбором случаев инверсии произвольного отрезка цепи или его вырезанию с зацикливанием при двойной переклейке (см. ниже пункты 5.1.1, 5.1.2).

4.2. Операция применяется к циклу и цепи, т.е. происходит разрез цикла и удлинение получившейся цепи. Этот вариант операции будет рассмотрен вместе с разбором случая вставки цикла в цепь при двойной переклейке (см. ниже пункт 5.2).

4.3. Операция применяется к двум цепям: первая разрезаемая, вторая склеиваемая. Обозначим через C цепь, являющуюся той частью разрезанной цепи, которая склеивается со второй цепью, обозначаемой C_2. Другую часть разрезаемой цепи обозначим C_1. При наличии трех цепей C, C_1, C_2 исходное состояние (до операции) достигается склейкой C с C_1, а заключительное (после операции) – склейкой C с C_2. Таким образом, чтобы показать, что величина $t(G)$ в исходном и заключительном состоянии отличается не более чем на 1, надо удостовериться в невозможности случая, когда при переходе из промежуточного состояния (то есть три цепи C, C_1, C_2) в исходное эта величина уменьшается на 1 (соответственно, увеличивается на 1), а при переходе в заключительное состояние – увеличивается на 1 (соответственно, уменьшается на 1). Перебираем тройки типов склеиваемых краёв. Очевидно, если типы краёв C_1 и C_2 совпадают, обе склейки приводят к одному и тому же значению $t(G)$.

Осталось перебрать такие тройки краёв цепей C, C_1, C_2, что последние два типа различны. Это означает, что надо перебрать пары различных ячеек, находящихся в одной строке табл. 2. Здесь строка соответствует краю цепи C, а два столбца – краям цепей C_1 и C_2. Для каждой такой пары следует проверить, что случай, когда в одной ячейке изменению величины $T(G)$ соответствует –1, а в другой +1, невозможен. Для этого рассматриваем замену пары цепей типов [результат левой ячейки, столбец правой] на пару цепей типа [результат правой ячейки, столбец левой]. Показываем, что при такой замене соответствующее изменение величины P невозможно. Разберем несколько примеров, остальные случаи рассматриваются аналогично. Пару ячеек (a,b) и (a,c) обозначаем кратко (a,b,c)

1) Пара ячеек (1a,0,1a). Имеем замену {3,1a}→{3a,0}. В левой ячейке положительному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное –1. В правой ячейке отрицательному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное –1. Разность правого и левого изменений равна 0. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типов 3 и 1a на цепь типа 3a величина P не может остаться неизменной (цепь типа 0 не влияет на P). Предположим противное. Тогда при обратной замене P тоже не меняется. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Если цепь v типа 3a в нем не участвует, замена увеличит вес множества за счет добавления элемента {1a,3}. Если цепь v содержится в элементе веса 1, то содержимое ячейки [1,3a] показывает, что после замены в новом множестве типов найдется множество веса не менее 2 (например, при добавлении к множеству {2,2} элементов 3 и 1a оно равно {{2,3},{1a,2}}). Если цепь v содержится в элементе веса 2, то содержимое ячейки [2,3a] показывает, что после замены в новом множестве типов найдется множество веса не менее 3. Если цепь v содержится в элементе веса 3, то содержимое ячейки [3,3a] показывает, что после замены в новом множестве типов найдется множество веса не менее 4. Таким образом, во всех случаях величина P увеличится.

2) Пара ячеек (3a,1a,2a). Имеем замену {3a,2a}→{1a,1a}. В левой ячейке положительному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное –2. В правой ячейке отрицательному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное +1. Разность правого и левого изменений равна 3. Кроме того, в левой ячейке отрицательному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное 0. В правой ячейке положительному изменению величины $t(G)$ соответствует изменение величины P, равное –1. Разность правого и

левого изменений равна –1. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типов $3a$ и $2a$ на пару цепей типов $1a$ и $1a$ величина P не может увеличиться на 3 или уменьшиться на 1. Докажем более сильное утверждение (оно нам понадобится в дальнейшем), что при указанной замене возможно единственное изменение величины P – увеличение на 1. Сначала покажем, что P не может остаться неизменной или уменьшиться. Рассмотрим максимальное множество до замены. Если цепи v_1 и v_2 типов $2a$ и $3a$ в нем не участвуют, замена увеличит вес множества за счет добавления элемента $\{1a,1a\}$. Иначе, пусть W – суммарный вес содержащих их элементов. Если $W=1$, то добавляя к каждому элементу ячеек $[1,2a]$ и $[1,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2, что и требуется. Если $W=2$, то добавляя к каждому элементу ячеек $[2,2a]$ и $[2,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[1,2a]$ и $[1,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если $W=3$, то добавляя к каждому элементу ячеек $[3,2a]$ и $[3,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Кроме того, следует рассмотреть случай, когда цепи v_1, v_2 содержатся в одном элементе веса 3. Это означает, что из элемента ячейки $[3,2a]$ следует удалить тип $3a$, добавить, как обычно, пару типов $1a$ и убедиться в наличии искомого множества. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[2,2a]$ и $[1,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Аналогично для пары ячеек $[1,2a]$ и $[2,3a]$. Если $W=4$, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[2,2a]$ и $[2,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5 (например, для пары последних элементов получаем множество типов $\{2b,3,3,3b,2,2,1a,1a\}$ и видим множество $\{1a,1a,2b,3b\}$, $\{2,3\}$, $\{2,3\}$). Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[1,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5. Аналогично для пары ячеек $[3,3a]$ и $[1,2a]$. Если $W=5$, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[2,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 6. Аналогично для пары ячеек $[3,3a]$ и $[2,2a]$. Наконец, если $W=6$, то добавляя к паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[3,3a]$ пару типов $1a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса 7. Таким образом, мы показали, что P не может остаться неизменной или уменьшиться. Теперь покажем, что P не может увеличиться на 2 или больше. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится на 2 или больше. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типа $1a$. Если W<2, доказывать нечего. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячейки $[2,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1 (если этот элемент содержит типы $1a$, то следует удалить один такой тип). Также, добавляя к каждой паре элементов из ячейки $[1,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=3, то удаляя из элемента ячейки $[3,1a]$ тип $1a$ и добавляя типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[2,1a]$ и $[1,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячейки $[2,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,1a]$ и $[1,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если W=5, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,1a]$ и $[2,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Наконец, если W=6, то добавляя к паре элементов из ячейки $[3,1a]$ типы $2a$ и $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5.

3) Пара ячеек $(1',1a',2)$ и пара ячеек $(2,1a',2)$. Обе пары ячеек соответствуют замене $\{2,2\}\to\{2b,1a\}$. Первая пара порождает изменение величины P, равное –1. Вторая пара порождает изменение величины P, равное +2. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типа 2 на пару цепей типов $1a$ и $2b$ величина P не может увеличиться на 2 или уменьшиться на 1. Сначала покажем, что P не может уменьшиться на 1 или больше. Рассмотрим максимальное множество до замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типа 2. Если W=0, доказывать нечего. Случай W=1 также тривиален, так как добавляемые типы $1a$ и $2b$ уже образуют элемент веса 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячейки $[2,2]$ типы $1a$ и $2b$ (а из последнего элемента удаляя тип 2), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячейки $[1,2]$ типы $1a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя

к каждой паре элементов из ячеек [1,2] и [2,2] типы $1a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячейки [2,2] типы $1a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Теперь покажем, что P не может увеличиться на 2 или больше, даже при более сильном предположении, что заменяется не два типа 2, а один. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится на 2 или больше. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов $1a$ и $2b$. Если W<2, доказывать нечего. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек [2,1a] и [2,2b] тип 2 (и удаляя из двух элементов первой ячейки по одному типу $2b$, а из второй – по одному типу $1a$), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [1,1a] и [1,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=3, то удаляя из элемента ячейки [3,1a] тип $2b$ и добавляя тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [2,1a] и [1,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Аналогично для ячеек [1,1a] и [2,2b]. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [2,1a] и [2,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [3,1a] и [1,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Аналогично для ячеек [1,1a] и [3,2b]. Если W=5, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [3,1a] и [2,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Аналогично для ячеек [1,1a] и [3,2b]. Наконец, если W=6, то добавляя к паре элементов из ячеек [3,1a] и [3,2b] тип 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5.

4) Пара ячеек ($1'$,2a,3) и пара ячеек (2,2a,3). Обе пары ячеек соответствуют замене $\{2,3\}\to\{1b,2a\}$. Первая пара порождает изменение величины P, равное +2. Вторая пара порождает изменение величины P, равное –1. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типа 2 и 3 на пару цепей типов $1b$ и $2a$ величина P не может увеличиться на 2 или уменьшиться на 1. Сначала покажем, что P не может уменьшиться на 1 или больше. Рассмотрим максимальное множество до замены. Пусть

W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов 2 и 3. Если W=0, доказывать нечего. Случай W=1 также тривиален, так как добавляемые типы $1b$ и $2a$ уже образуют элемент веса 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек [2,2] и [2,3] типы $1b$ и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [1,2] и [1,3] типы $1b$ и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [1,2] и [2,3] типы $1b$ и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Аналогично для ячеек [1,3] и [2,2]. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [2,2] и [2,3] типы $1b$ и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Теперь покажем, что P не может увеличиться на 2 или больше, даже при более сильном предположении, что заменяются не две цепи, а одна цепь типа 2. Здесь рассуждение фактически повторяет соответствующее рассуждение в пункте 3, поэтому не приводится.

5) Пара ячеек ($1'$,$2a$,2). Имеем замену $\{2,2\}\to\{2a,2b\}$. Порождаемые изменения величины P равны +2 и –2. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типа 2 на пару цепей типов $2a$ и $2b$ величина P не может увеличиться на 2 или уменьшиться на 2. Докажем два более сильных утверждения.

Первое утверждение (оно нам понадобится в дальнейшем), что при указанной замене величина P не меняется. Сначала покажем, что P не может уменьшиться. Рассмотрим максимальное множество до замены. Если цепи v_1 и v_2 типа 2 в нем не участвуют, замена увеличит вес множество за счет добавления элемента $\{1a,1a\}$. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих цепи v_1 и v_2. Если W=0, доказывать нечего. Если W=1, то добавляя к каждому элементу ячейки [1,2] типы $2a$ и $2b$ (и удаляя из последних двух элементов тип 2), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячейки [2,2] типы $2a$ и $2b$ (и удаляя из последнего элемента тип 2), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячейки [1,2] типы $2a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [1,2] и [2,2] типы $2a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячейки [2,2] типы $2a$ и $2b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Теперь покажем, что P не может увеличиться. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов $2a$ и $2b$. Если W=0, доказывать нечего. Если W=1, то добавляя к каждому элементу ячеек $[1,2a]$ и $[1,2b]$ два типа 2 (и удаляя из третьих элементов, соответственно, типы $2b$ и $2a$), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек $[2,2a]$ и $[2,2b]$ два типа 2 (и удаляя из последних элементов, соответственно, типы $2b$ и $2a$), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[1,2a]$ и $[1,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя к элементам ячеек $[3,2a]$ и $[3,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[1,2a]$ и $[2,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Аналогично для ячеек $[2,2a]$ и $[1,2b]$. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[2,2a]$ и $[2,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[1,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Аналогично для ячеек $[3,2b]$ и $[1,2a]$. Если W=5, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[2,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5. Аналогично для ячеек $[3,2b]$ и $[2,2a]$. Наконец, если W=6, то добавляя к паре элементов из ячеек $[3,2a]$ и $[3,2b]$ два типа 2, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 6.

Второе утверждение, что величина P не может уменьшиться на 2 даже при более «слабой» замене $\{2,2\}\rightarrow 2a$. Рассмотрим максимальное множество до замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих цепи v_1 и v_2 типа 2. Если W<2, доказывать нечего. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячейки $[2,2]$ тип $2a$ (и удаляя из последнего элемента тип 2), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячейки $[1,2]$ тип $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=3, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек

[1,2] и [2,2] тип $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячейки [2,2] тип $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3.

6) Пара ячеек ($1,2a,3a$) и пара ячеек ($3,2a,3a$). Обе пары ячеек соответствуют замене $\{1,3a\}\rightarrow\{3,2a\}$. Первая пара порождает изменение величины P, равное –1. Вторая пара порождает изменение величины P, равное +2. Таким образом, следует показать, что при замене цепи типа $3a$ на пару цепей типов 3 и $2a$ величина P не может увеличиться на 2 или уменьшиться на 1 (цепь типа 1 не влияет на величину P). Сначала покажем, что P не может уменьшиться на 1 или больше. Рассмотрим максимальное множество до замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих цепь типа $3a$. Если W=1, то добавляя к каждому элементу ячейки [$1,3a$] типы 3 и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячейки [$2,3a$] типы 3 и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя к элементу ячейки [$3,3a$] типы 3 и $2a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Теперь покажем, что P не может увеличиться на 2 или больше. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится на 2 или больше. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов 3 и $2a$. Если W<2, доказывать нечего. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек [$2,2a$] и [2,3] тип $3a$ (и удаляя из двух элементов первой ячейки по одному типу 3, а из второй – по одному типу $2a$), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [$1,2a$] и [1,3] тип $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=3, добавляя к элементу ячейки [$3,2a$] тип $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [$1,2a$] и [2,3] тип $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Аналогично для ячеек [$2,2a$] и [1,3]. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [$2,2a$] и [2,3] тип $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [$3,2a$] и [1,3] тип $3a$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если W=5, то добавляя к каждой паре

элементов из ячеек [3,2a] и [2,3] тип 3a, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4.

7) Пара ячеек (1,2,3) и пара ячеек (3,2,3). Обе пары ячеек соответствуют замене $\{1b,3\}\rightarrow\{3b,2\}$. Первая пара порождает изменение величины P, равное –2. Вторая пара порождает изменение величины P, равное +1. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типов 1b и 3 на пару цепей типов 3b и 2 величина P не может уменьшиться на 2 или увеличиться на 1. Сначала покажем, что P не может уменьшиться на 2 или больше, даже при более «сильной» замене $\{1b,3\}\rightarrow 3b$. Рассмотрим максимальное множество до замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов 1b и 3. Если W<2, доказывать нечего. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек [2,1b] и [2,3] тип 3b (и удаляя из предпоследних элементов типы, соответственно 3 и 1b), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [1,1b] и [1,3] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=3, то добавляя к элементу из ячейки [3,1b] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [2,1b] и [1,3] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Аналогично для ячеек [1,1b] и [2,3]. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [3,1b] и [1,3] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек [2,1b] и [2,3] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Если W=5, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек [3,1b] и [2,3] тип 3b, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Теперь покажем, что P не может увеличиться, даже при более «сильной» замене $1b\rightarrow\{3b,2\}$. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов 3b и 2. Если W=0, доказывать нечего. Если W=1, то добавляя к каждому элементу ячеек [1,3b] и [1,2] тип 1b (и удаляя из двух элементов первой ячейки по одному типу 2, а из второй – по одному типу 3b), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 1. Если W=2, то добавляя к каждому элементу ячеек [2,3b] и [2,2] тип 1b (и удаляя из двух элементов первой ячейки по одному типу 2, а из второй – по одному

типу $3b$), убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[1,3b]$ и $[1,2]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 2. Если W=3, то добавляя к элементу ячейки $[3,3b]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[1,3b]$ и $[2,2]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 3. Аналогично для ячеек $[1,2]$ и $[2,3b]$. Если W=4, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[2,3b]$ и $[2,2]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Также, добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,3b]$ и $[1,2]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 4. Если W=5, то добавляя к каждой паре элементов из ячеек $[3,3b]$ и $[2,2]$ тип $1b$, убеждаемся, что полученное множество типов будет содержать множество веса не меньше 5.

8) Пара ячеек $(1,1a',1')$. Имеем замену $\{1,1\}\to\{1a,1b\}$. Порождаемые изменения величины P равны +4 и 0. Таким образом, следует показать, что при замене пары цепей типа 1 на пару цепей типов $1a$ и $1b$ величина P не может увеличиться на 4 или не измениться. Докажем более сильное утверждение (оно нам понадобится в дальнейшем), что при указанной замене P может лишь увеличиться на 2.

Сначала покажем, что P должно увеличиться хотя бы на 2. Действительно, добавление цепей типа $1a$ и $1b$ увеличивает вес максимального множества по крайней мере на 2 за счет элемента, состоящего из добавленных цепей. Теперь покажем, что P не может увеличиться на 3 или больше. Предположим противное. Тогда при обратной замене P уменьшится на 3 или больше. Рассмотрим максимальное множество до этой замены. Пусть W – суммарный вес элементов, содержащих хоть одну из двух цепей типов $1a$ и $1b$. Если W<3, доказывать нечего. Если W=3, то рассматривая элемент ячейки $[3,1a]$ или $[3,1b]$, убеждаемся, что он содержит множество веса не меньше 1. Также, убеждаемся, что каждая пара элементов из ячеек $[1,1a]$ и $[2,1b]$ содержит множество веса не меньше 1 (и для симметричной пары ячеек). Если W=4, то убеждаемся, что каждая пара элементов ячеек $[2,1a]$ и $[2,1b]$ содержит множество веса не меньше 2. То же для пары элементов из ячеек $[3,1a]$ и $[1,1b]$ и симметричной пары. Если W=5, то убеждаемся, что каждая пара элементов из ячеек $[3,1a]$ и $[2,1b]$ содержит множество веса не меньше 3 (и для симметричной пары ячеек). Наконец, если W=6, то убеждаемся, что пара элементов из ячеек $[3,1a]$ и $[3,1b]$ содержит множество веса не меньше 4.

Замечание 2. Можно автоматически проверить корректность рассуждения для всех пар ячеек. Каждой паре соответствует замена одного множества (типов) M_1 из двух цепей на другое множество M_2 из двух цепей. Перебираем наборы (типов) K допустимых элементов (не более двух элементов в наборе), с указанием, какие цепи в каждом элементе из K принадлежат M_1 (каждый элемент из K должен содержать хотя бы одну цепь из M_1, все принадлежащие M_1 цепи должны быть различными по всему K). Затем перебором находим множество непересекающихся элементов максимального суммарного веса (обозначим этот вес $V_1(K)$), содержащихся во множестве M_2, объединённом с множеством цепей набора K, не попавших в M_1. Находим максимальную по всем K разность $r_1=V_1(K)–w(K)$ Эта величина показывает максимальное возможное уменьшение P при данной замене. Меняя местами M_1 и M_2, аналогично находим величину r_2, показывающую максимальное возможное увеличение P. Отрезок $[r_1,r_2]$ – диапазон возможного изменения величины P при рассматриваемой замене. Проверяем, что во всех случаях, когда при этой замене величина $t(G)$ могла бы измениться больше, чем на 1, соответствующее изменение величины P не попадает в отрезок $[r_1,r_2]$ (изменение величины $t(G)$ равно разности её изменений, указанных в правой и левой ячейках). Мы осуществили компьютерную проверку, подтвердившую, что рассуждение для всех пар ячеек корректно.

5. o – операция двойной переклейки. Выделим три случая.

5.1. Обе расклейки происходят в одной цепи или в одном цикле. Выделим четыре подслучая. Сумму целых частей половин длин сегментов назовем *основой* величины S.

5.1.1. Инвертирование отрезка в цепи (сюда относится также случай инверсии из пункта 4.1). Очевидно, длина цепи не меняется. Если в инвертируемом отрезке нет особых вершин, случай тривиален. Иначе, рассмотрим две возможности.

1) Две особые вершины склеиваются в одну, т.е. величина B уменьшается на 1. Если обе расклейки внутренние (т.е. с обеих сторон от каждой расклейки есть особые вершины), то тип цепи не меняется, следовательно, не меняются величины D и P. Легко видеть, что вместо двух примыкающих к расклейкам сегментов (отсутствие сегмента считаем сегментом длины 0) возникает один сегмент длины на 1 большей суммы длин исходных сегментов (т.е. появляется дополнительное обычное ребро). Все сегменты не являются крайними. Поэтому, величина S либо не изменяется, либо увеличивается на 1, что и требуется. Пусть одна расклейка внутренняя, а другая внешняя. Рассмотрим варианты изменения четности крайнего сегмента (чтобы учесть случай 4.1, считаем

отсутствующую расклейку формально находящейся за пределами цепи, висячее ребро приравниваем к нечетному сегменту). Если его четность не меняется, проходит предыдущее рассуждение (здесь следует учесть, что в случае 4.1, если висячее ребро заменяется нечетным сегментом, дополнительного обычного ребра не возникает и основа величины S не меняется). Если четный крайний сегмент заменяется нечетным, величина S, очевидно, увеличивается на 1. Действительно, происходит появление крайнего нечетного сегмента (не висячего ребра), и основа величины S не меняется (сливаются два четных сегмента с появлением дополнительного обычного ребра). Возможны следующие варианты изменения типа цепи: $3a \to 1a$, $1 \to 2$, $1a \to 2a$, $3 \to 1$. При первых двух вариантах величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1. При последних двух вариантах величина D уменьшается на 1, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Если нечетный крайний сегмент заменяется четным, величина S не меняется. Действительно, уменьшение величины S за счет исчезновения крайнего нечетного сегмента компенсируется её увеличением за счет слияния четного и нечетного сегментов с появлением дополнительного обычного ребра (здесь надо также учесть, что в случае 4.1, если одна из двух склеиваемых особых вершин является концом висячего ребра, дополнительное обычное ребро не появляется, но и исчезновения крайнего нечетного сегмента не происходит). При этом возможны следующие варианты изменения типа цепи: $1a \to 3a$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $1 \to 3$. При первых двух вариантах величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. При последних двух вариантах величина D увеличивается на 1, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1. Итак, во всех случаях величина $t(G)$ меняется не более чем на 1 (случай, когда обе расклейки внешние, очевидно, невозможен при условии склеивания особых вершин).

2) Не происходит склеивания двух особых вершин в одну, т.е. величина B не меняется. Если обе расклейки внутренние, то тип цепи не меняется, следовательно, не меняются величины D и P. Легко видеть, что вместо двух примыкающих к расклейкам сегментов (отсутствие сегмента считаем сегментом длины 0) возникают один или два сегмента, у которых суммарная длина, равна сумме длин исходных сегментов. Все сегменты не являются крайними, так что величина S может меняться не более чем на 1, что и требуется. Пусть одна расклейка внутренняя, а другая внешняя. Рассмотрим варианты изменения четности крайнего сегмента (чтобы учесть случай 4.1, считаем отсутствующую расклейку формально находящейся за пределами цепи, висячее ребро приравниваем к нечетному сегменту). Если его четность не меняется, проходит

предыдущее рассуждение (учитываем, что если в случае 4.1 нечетный сегмент заменяется висячим ребром, то происходит слияние двух сегментов с появлением дополнительного обычного ребра, если же, наоборот, висячее ребро заменяется нечетным сегментом, происходит разбиение одного сегмента на 2 с исчезновением одного обычного ребра). Если четный крайний сегмент заменяется нечетным, величина S либо не меняется, либо увеличивается на 1. При этом возможны следующие варианты изменения типа цепи: $3a \to 1a$, $1 \to 2$, $1a \to 2a$, $3 \to 1$. При первых двух вариантах величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1. При последних двух вариантах величина D уменьшается на 1, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Если нечетный крайний сегмент заменяется четным, величина S либо не меняется, либо уменьшается на 1. При этом возможны следующие варианты изменения типа цепи: $1a \to 3a$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $1 \to 3$. При первых двух вариантах величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. При последних двух вариантах величина D увеличивается на 1, величина P либо не меняется, либо увеличивается на 1. Рассмотрим теперь случай, когда обе расклейки внешние. Переберем варианты изменения четностей крайних сегментов (чтобы учесть случай 4.1, считаем отсутствующую расклейку формально находящейся за пределами цепи, висячее ребро приравниваем к нечетному сегменту). Если оба сегмента имели одинаковую четность и сохранили её, измениться может лишь величина S и не более чем на 1. Если оба сегмента были четными, а стали нечетными, легко видеть, что величина S увеличивается на 1. Действительно, либо происходит появление двух нечетных сегментов и количество обычных ребер, дающих вклад в S, уменьшается на 2, либо появляется один нечетный сегмент, одно висячее ребро, и не меняется количество обычных ребер, дающих вклад в S. Возможны следующие варианты изменения типа цепи: $3a \to 2a$, $3 \to 2$. При этом величина D уменьшается на 1, величина P меняется не более чем на 1. Если оба сегмента были нечетными, а стали четными, легко видеть, что величина S уменьшается на 1. Действительно, либо происходит исчезновение двух нечетных сегментов и количество обычных рёбер, дающих вклад в S, увеличивается на 2, либо исчезает один нечетный сегмент, одно висячее ребро, и не меняется количество обычных ребер, дающих вклад в S. Возможны следующие варианты изменения типа цепи: $2a \to 3a$, $2 \to 3$. При этом величина D увеличивается на 1, величина P меняется не более чем на 1. Наконец, в случае, когда один сегмент был четным, а другой нечетным и такое положение осталось, не меняются никакие величины (если появляется висячее ребро, то уменьшение величины S за счет исчезновения крайнего нечетного сегмента компенсируется ее увеличением за счет слияния четного и нечетного сегментов с появлением дополнительного обычного ребра). Во всех рассмотренных случаях величина $t(G)$ меняется не более, чем на 1.

5.1.2. Вырезание отрезка из цепи и его зацикливание (сюда относится также случай отрезания отрезка от цепи с его зацикливанием из пункта 4.1). Если в отрезке нет особых вершин, рассмотрим два случая. Пусть не происходит склеивания двух особых вершин в одну. Тогда один сегмент распадается на два, при этом один из новых сегментов циклический, следовательно, четный. Значит основа величины S не меняется, а сама S уменьшается на 1 (за счёт появления циклического сегмента), $t(G)$ тоже уменьшается на 1. Пусть две особые вершины склеиваются в одну. Тогда один нечетный сегмент зацикливается с добавлением дополнительного обычного ребра. Значит, основа величины S увеличивается на 1, а сама S не меняется, что и обеспечивает требуемый результат.

Если в отрезке есть особые вершины, рассматриваются те же две возможности, что и в случае 5.1.1 с дословным повторением всех рассуждений. Единственное дополнение: здесь возможен случай, когда две особые вершины склеиваются, а обе расклейки внешние. В этом случае два крайних сегмента цепи сливаются в один с появлением дополнительного обычного ребра. Если оба сегмента четные, величина S увеличивается на 1. В этом случае цепь имеет тип $3a$ или $3b$, так что в результате ее исчезновения (точнее, перехода в цепь типа $0a$ или $0b$) величина D уменьшается на 1, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Если один или оба сегмента нечетные, величина S не меняется. В этом случае цепь имеет тип $2a$, $2b$ или 1, так что в результате ее исчезновения величина D не меняется, величина P либо не меняется, либо уменьшается на 1. Таким образом, во всех случаях величина t меняется не более чем на 1.

5.1.3. Инвертирование отрезка в цикле. Случай рассматривается аналогично случаю 5.1.1 (но проще, так как все расклейки можно считать внутренними).

5.1.4. Вырезание отрезка из цикла и его зацикливание. Случай рассматривается аналогично случаю 5.1.2 (но проще, так как все расклейки можно считать внутренними).

5.2. Одна расклейка происходит в цепи, другая в цикле. Это означает разрыв цикла и его вставку в цепь (сюда относится также случай присоединения разрезанного цикла к краю цепи из пункта 4.2). Если не происходит склеивания двух особых вершин, то эта операция является обратной к рассмотренной в пункте 5.1.2 и не рассматривается. Иначе, величина B уменьшается на 1. Если расклейка в цепи внутренняя (т.е. с обеих сторон от неё есть особые вершины), то дословно повторяется рассуждение из пункта 5.1.1 относящееся к случаю, когда обе рассматриваемых там расклейки внутренние. Если расклейка цепи внешняя, то дословно повторяется рассуждение из пункта 5.1.1 относящееся к случаю, когда одна из рассматриваемых там расклеек внешняя.

5.3. Каждая расклейка происходит в своей цепи.

5.3.1. Обе расклейки внутренние. Стандартные рассуждения показывают, что сумма величин B и S может измениться не более чем на 1. Чтобы проследить за изменениями величин D и P, рассмотрим возможные типы обеих цепей.

1) Обе цепи нечетны и являются либо обе a-цепями, либо b-цепями. Если обе цепи – имеют тип $1a$ (симметричный случай – тип $1b$), единственная нетождественная смена типов, очевидно, переход данной пары цепей в пару цепей типов $2a$ и $3a$. При этом величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 (это было сделано в пункте 4.3, подпункт 2) показывается, что величина P может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось. Любая другая пара типов исходных цепей дает тождественный результат и рассматривается тривиальным образом.

2) Обе цепи нечетны и одна является a-цепью, а вторая – b-цепью. Если пара их типов равна $(1a,1b)$, то при переклейке она переходит либо в пару (1,1), либо в пару (2,3). В первом случае величина D уменьшается на 2. Стандартным рассмотрением табл. 1 (это было сделано в пункте 4.3, подпункт 8) показывается, что величина P может лишь уменьшиться на 2, что и требовалось. Во втором случае величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось. Если пара типов исходных цепей равна $(1a,2b)$, то при переклейке она переходит в пару (1,2). Величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось. Аналогично рассматривается пара $(1a,3b)$. Если пара типов исходных цепей равна $(2a,2b)$, то при переклейке она переходит в пару (2,2). Величина D не меняется. Стандартным рассмотрением табл. 1 (это было сделано в пункте 4.3, подпункт 5) показывается, что величина P также не может измениться, что и требовалось. Аналогично рассматривается пара $(3a,3b)$. Если пара типов исходных цепей равна $(2a,3b)$, то при переклейке она переходит в пару (1,1). Величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P также может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось. Аналогично рассматривается

пара $(3a,2b)$.

3) Обе цепи четные. Единственный нетривиальный переход – между парами (1,1) и (2,3) (остальные переходы либо тождественны, либо являются обратными к рассмотренным в пункте 2). Если пара (2,3) переходит в пару (1,1) то величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось.

4) Одна цепь нечетная, а другая четная. Если пара $(1a,1)$ переходит в пару $(2a,3)$, то величина D не меняется. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P также не может измениться, что и требовалось. Аналогично рассматривается переход в пару $(3a,2)$. Если пара $(1a,2)$ переходит в пару $(2a,1)$, то величина D уменьшается на 1. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P также может лишь уменьшиться на 1, что и требовалось. Аналогично рассматривается переход пары $(1a,3)$ в пару $(3a,1)$. Переход пары $(2a,1)$ в пару $(1a,2)$ является обратным к рассмотренному выше. Для пары $(2a,2)$ возможен лишь тождественный переход. Если пара $(2a,3)$ переходит в пару $(3a,2)$, то величина D не меняется. Стандартным рассмотрением табл. 1 легко показать, что величина P также не может измениться, что и требовалось. Переходы $(2a,3)\to(1a,1)$, $(3a,1)\to(1a,3)$, $(3a,2)\to(1a,1)$ являются обратными к рассмотренным выше. Для пары $(3a,3)$ возможен лишь тождественный переход.

5.3.2. Хотя бы одна из расклеек внешняя. В этом случае задача сводится к случаю полуторной переклейки или склейки. Это делается следующим образом.

Будем называть упомянутую расклейку и тот край цепи, к которому она примыкает, внешними. Другую расклейку из o называем внутренней, как и то ребро, которое она удаляет. Заметим, что если внешняя расклейка находится не на крайнем ребре и не на соседнем к нему, то можно удалить два обычных ребра с внешнего края. При этом величина $t(G)$ уменьшится на 1 как в исходном графе, так и в получившемся в результате операции. Следовательно, достаточно рассмотреть случаи, когда внешняя расклейка находится либо на крайнем ребре цепи, либо на втором с краю.

1) Внешняя расклейка находится на втором с краю ребре. Пусть это ребро обычное. Удалим два крайних ребра вместе с внешней расклейкой, заменив двойную переклейку на полуторную. Легко видеть, что величина $t(G)$ уменьшится на 1 как в исходном графе, так и в получившемся в результате операции, что и сводит рассматриваемую задачу к аналогичной уже рассмотренной задаче с полуторной переклейкой, рис. 1a.

Пусть теперь ребро с внешней расклейкой особое. Удалим крайнее ребро вместе с его концами, заменив, таким образом, нечетный крайний сегмент длины 1 на висячее ребро (особая вершина становится концом висячего ребра). Снова заменяем двойную переклейку полуторной с уменьшением на 1 величины $t(G)$ в обоих графах, рис. 1*b*.

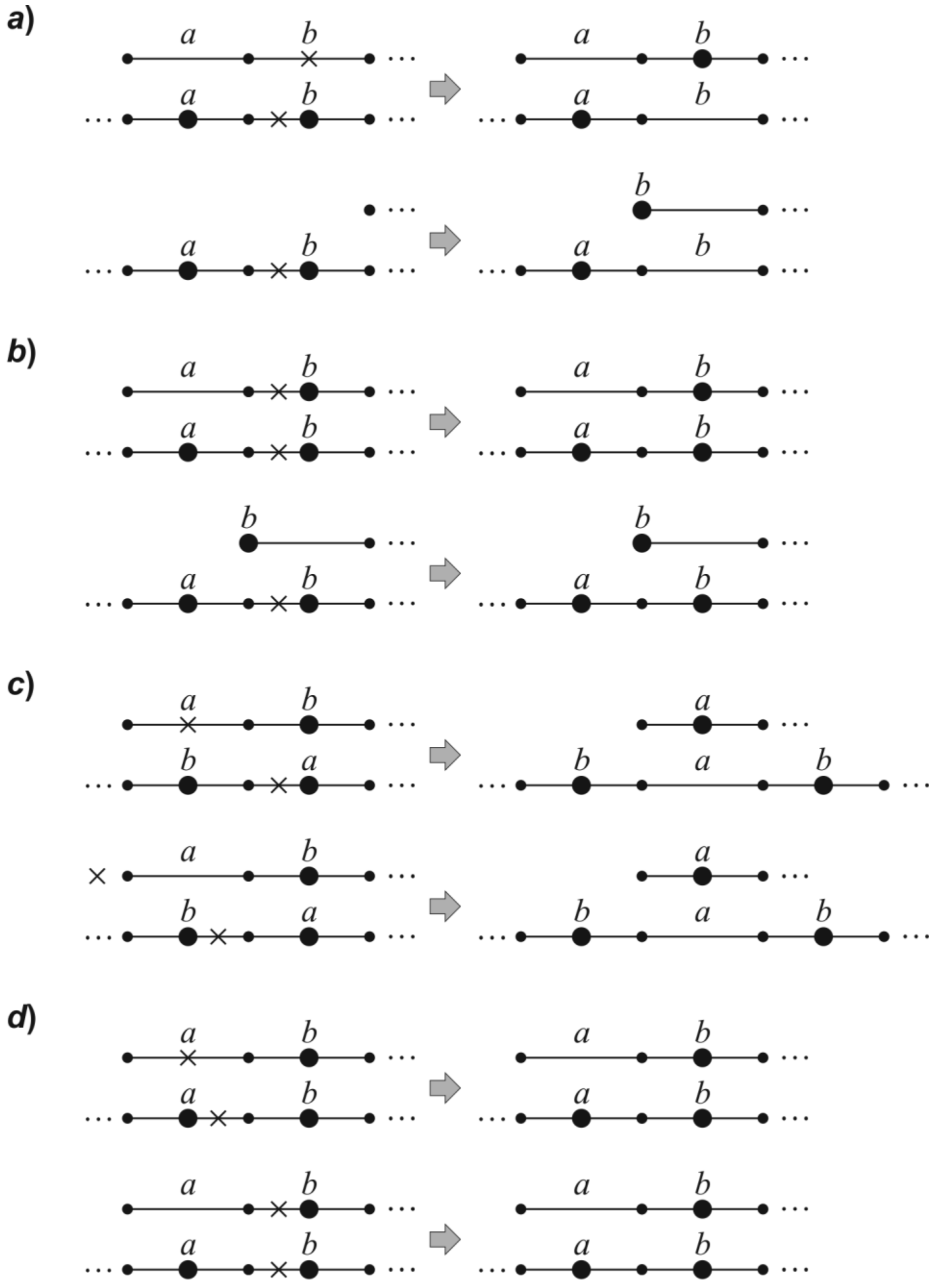

Рис. 1. Случай двойной переклейки при внешней расклейке на обычном ребре. ***a*)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на втором с краю ребре (первый случай). Сверху: исходная двойная переклейка. Снизу: полуторная переклейка, полученная из исходной двойной удалением двух обычных ребер. ***b*)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на втором с краю ребре (второй случай). **c)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на крайнем ребре (безблоковый случай). Фиктивная расклейка за краем цепи

соответствует замене двойной переклейки на полуторную. ***d*)** Внешняя расклейка на крайнем ребре. Сведение к рассмотренному случаю внешней расклейки на втором с краю ребре.

2) Внешняя расклейка находится на крайнем ребре. Пусть это ребро обычное. Если внутреннее ребро обычное, или если особая вершина находится со стороны, склеиваемой с внешним краем, сдвинем внешнюю расклейку за край цепи (т.е. фактически устраним её), а внутреннюю расклейку – на соседнее ребро в противоположную от возможной особой вершины сторону (а если это ребро отсутствует, то, соответственно, за край цепи). Таким образом, двойная переклейка заменяется полуторной (или, соответственно, тождественной операцией). Легко видеть, что результат операции не изменится, рис. 1c.

Если же особая вершина находится с другой стороны, то сдвинем внешнюю расклейку от края на соседнее ребро и, соответственно, сдвинем внутреннюю расклейку. Результат операции снова не изменится, таким образом, задача сводится к рассмотренной в предыдущем пункте, когда внешняя расклейка находилась на втором с краю ребре, рис. 1d.

Наконец, рассмотрим случай, когда внешняя расклейка находится на особом ребре. Если внутреннее ребро обычное, или если особая вершина находится со стороны, склеиваемой с внешним краем, действуем и рассуждаем так же, как в предыдущем случае, рис. 2a.

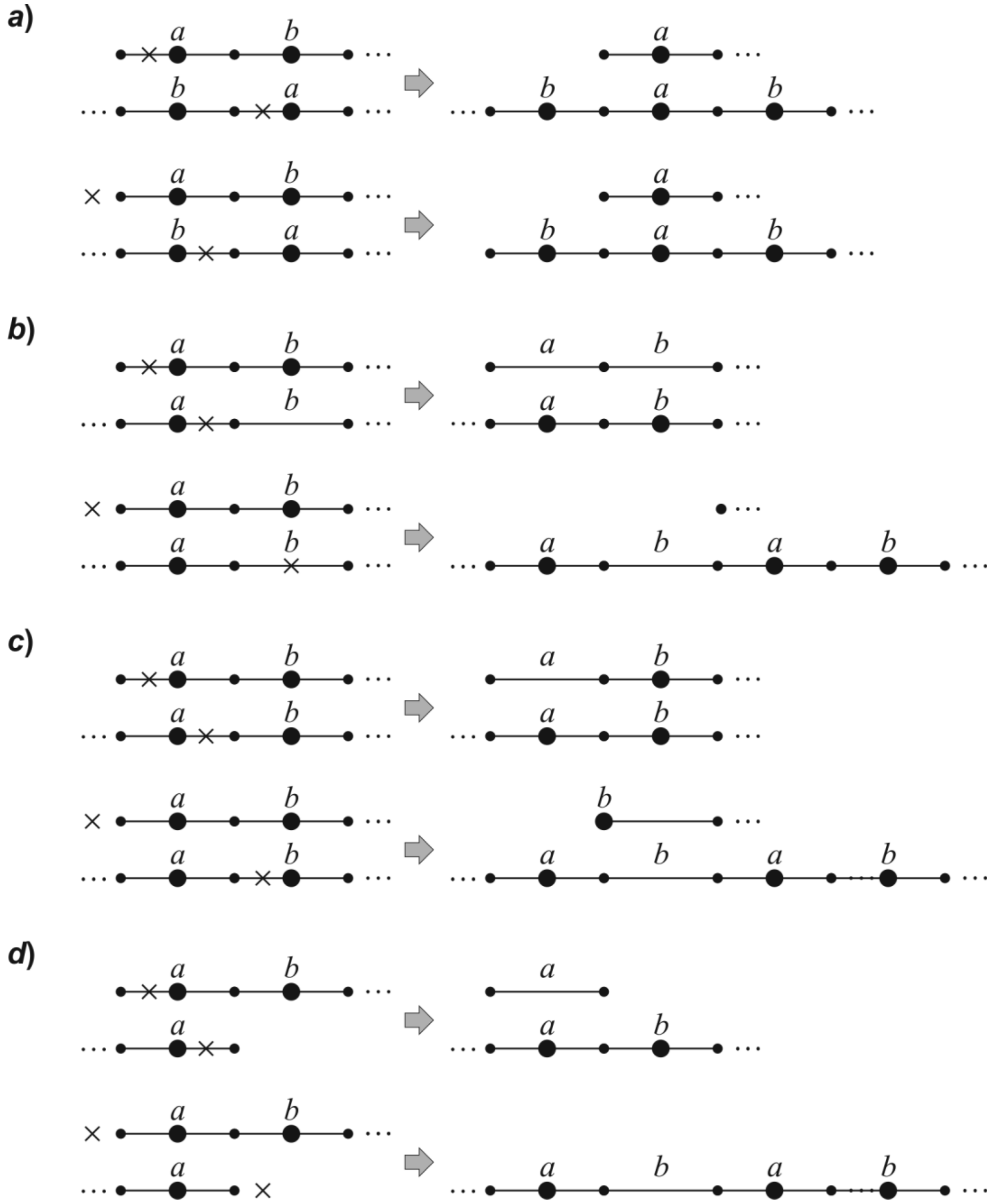

Рис. 2. Случай двойной переклейки при внешней расклейке на особом ребре. ***a*)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на крайнем ребре (сонаправленный блоковый случай). ***b*)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на крайнем ребре (первый разнонаправленный блоковый случай). ***c*)** Сведение к случаю полуторной переклейки при внешней расклейке на крайнем ребре (второй разнонаправленный блоковый случай). ***d*)** Сведение к случаю склейки при внешней расклейке на крайнем ребре.

Иначе, сдвинем внешнюю расклейку за край цепи, а внутреннюю расклейку – на соседнее ребро в противоположную от особой вершины сторону (а если это ребро отсутствует, то за край цепи), рис. 2*b*–2*d*.

Таким образом, двойная переклейка заменяется либо на полуторную переклейку, либо на добавление ребра (склейку). Чтобы из результата второй операции (полуторной переклейки или склейки) получить результат первой операции (двойной переклейки), следует, очевидно, склеить две особые вершины, удалив разделяющее их обычное ребро, и либо добавить цепь из одного обычного ребра (в случае склейки, рис. 2*d*), либо добавить два крайних обычных ребра (если внутренняя расклейка сдвинулась на обычное ребро, рис. 2*b*), либо заменить висячее ребро нечетным (длины 1) крайним сегментом (если внутренняя расклейка сдвинулась на особое ребро, рис. 2*c*). Во всех случаях этот переход, очевидно, не меняет величину $t(G)$, что и завершает сведение задачи. □□

Замечание 3. Можно автоматически проверить правильность утверждения теоремы 6 для случая 5.3 (без сведения к полуторной переклейке). В этом случае двойная переклейка является композицией двух разрезов и двух склеек. В промежуточном состоянии, когда разрезы сделаны, а склейки еще нет, имеются четыре конца различных цепей. В таблице 2 им соответствуем "прямоугольник" из четырех ячеек, причем если сделать две склейки, соответствующие одной "диагональной" паре ячеек, мы получим состояние перед двойной переклейкой, а для другой "диагональной" пары ячеек – состояние после неё. Таким образом, нужно проверить, что для каждого "прямоугольника" замена пары цепей, указанных в одной "диагональной" паре ячеек, на пару цепей из другой "диагональной" пары ячеек не может дать изменения величины P, соответствующего изменению величины $t(G)$ больше, чем на 1. Это делается аналогично тому, как описано в замечании 2. Вычисляем диапазон $[r_1,r_2]$ возможного изменения величины P при рассматриваемой замене (в силу обратимости двойной переклейки можно ограничиться случаем, когда "начальная диагональ" инцидентна левой верхней ячейке). Проверяем, что во всех случаях, когда при этой замене величина $t(G)$ могла бы измениться больше, чем на 1, соответствующее изменение величины P не попадает в отрезок $[r_1,r_2]$ (изменение величины $t(G)$ равно сумме её изменений, указанных в "конечной" паре ячеек, минус сумма её изменений, указанных в "начальной" паре ячеек). Мы осуществили компьютерную проверку, подтвердившую правильность утверждения теоремы 5 для случая 5.3.