АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Специализированный совет Д.003.29.01

На правах рукописи

ЛЮБЕЦКИЙ Василий Александрович

УДК 510.67:512.57+681.3+519.76

ОЦЕНКИ И ПУЧКИ: ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА

05.13.17 – теоретические основы информатики,
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 1991

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации Академии наук СССР

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук
профессор Е.А. Палютин,

доктор физико-математических наук
профессор В.Г. Кановей

доктор физико-математических наук
профессор А.В. Чернавский

Ведущая организация – Ленинградское отделение
Математического института АН СССР

Защита состоится "9" сентября 1991 г. в 10[30] часов на заседании Специализированного совета Д.003.29.01 при Институте проблем передачи информации АН СССР по адресу: 101447, Москва, ул. Ермоловой, 19.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации АН СССР

Автореферат разослан "8" августа 1991 г.

Ученый секретарь Специализированного совета,
доктор технических наук, профессор

Степ С.Н. Степанов

1789

ОБЩИЙ ОБЗОР И ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Тема работы относится к изучению теоретико-модельных методов в теории доказательств, в алгебре, а также относится к теоретическим основам информатики. Предметом исследования являются две традиционные проблемы: о переходе от выводимости в классической теории к выводимости в интуиционистской теории и о построении модельного компаньона; на основе исследования этих проблем получены алгоритмы, компъютерно реализуемые в "реальное время" и связанные с задачей эффективизации (т.е. задачей извлечения явной конструкции, терма, программы из доказательства) и задачей обобщенного описания; эти задачи относятся к традиционным темам исследований в области theoretical computer science. Решения и алгоритмы основаны на методе, предложенном автором, – методе семантического оценивания.

В главе I излагается упомянутый метод. На его основе в главе II строится широкий класс формул в языке колец, для которых из их выводимости в классической теории множеств Цермело–Френкеля ZF следует их выводимость в интуиционистской теории множеств ZFI', сформулированной Х.Фридманом [1]. Алгоритм перехода от исходного доказательства к соответствующему интуиционистскому доказательству компъютерно реализуется в реальное время. В главе III на основе того же метода получена явная и общая конструкция, которая для многих классов колец позволяет образовать соответствующие им модельные компаньоны. Причем алгоритм перехода от класса колец к его модельному компаньону также компъютерно реализуется в реальное время. Это и создает основу для использования этих алгоритмов в связи с упомянутыми выше темами из theoretical computer science.

Для решения континуум-проблемы П.Д.Коэн в 1963 году предложил существенно новый метод (хотя частично и основанный на идеях К.Геделя) – метод вынуждения (форсинга). Затем П.Вопенка, Д.Скотт и Р.Соловей оформили его в общем виде [2]. Они ввели понятие булевозначного универсума V^B, где B – любая полная булева алгебра. В середине 70-х годов

Р.Грейсон развил метод Коэна дальше, определив понятие гейтинговозначного универсума V^{Ω}, где Ω – любая полная гейтингова алгебра (такова, например, любая топология – решетка всех открытых множеств топологического пространства). Причем он построил V^{Ω} средствами интуиционистской теории множеств ZFI' [3]. В таком виде метод Коэна вобрал многие черты теории топосов.

Долгое время метод Коэна применялся исключительно для доказательства независимости разного рода гипотез от аксиом теории множеств, т.е. для доказательства невозможности некоторых рассуждений. Затем был обнаружен подход, позволяющий использовать метод Коэна наоборот для решения некоторых (в том числе, старых) проблем, т.е. для доказательства возможности некоторых рассуждений, см., например, [4,5]. В данной работе метод семантического оценивания (который также находится в рамках направления, идущего от метода Коэна) используется, в частности, для построения эффективно реализуемых алгоритмов.

На основе метода семантического оценивания в главах II и III единообразно рассматриваются следующие две, на первый взгляд, далекие друг от друга проблемы, связанные с именами П.С.Новикова и А.Макинтайра.

Пусть буквы LEM обозначают схему аксиом закона исключенного третьего $\varphi \vee \neg\varphi$. В 1939 г. П.С.Новиков [6] сформулировал теорию "Ar", которая описывает кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел в некотором расширении языка обычной арифметики. И показал: если "Ar"$\vdash \exists n P(n)$, где здесь и далее P – бескванторная формула, то ("Ar"-LEM)$\vdash \exists n P(n)$ и можно явно предъявить "решение" – целое число n_0, для которого ("Ar"-LEM)$\vdash P(n_0)$.

Около 1930 г. А.Н.Колмогоров и К.Гедель получили такой перевод $\varphi \mapsto \varphi^{-}$ формул φ обычного исчисления предикатов PI в формулы φ^{-} того же исчисления, что: если PI$\vdash \varphi$, то (PI-LEM)$\vdash \varphi^{-}$. Этот перевод совершенно явный: в определенных местах формулы φ нужно добавить некоторое число раз выражение $\neg\neg$. Они (и Г.Генцен) по существу получили такой же результат и для пеановской арифметики Ar вместо PI. Аналогичный результат был получен Д.Майхиллом для теории типов в 1974 году, Х.Фридманом для теории множеств ZF в 1973 году (и В.Пауэллом также для ZF в 1975 году). Принципиальное отличие всей этой цепочки результатов от результата П.С.Новикова и результатов его последователей состоит в том, что: 1) перевод Колмогорова–Геделя существенно меняет смысл исходной формулы φ, и если, например, φ – утверждение из *алгебраической теории чисел, то просто неясно содержание* утверждения φ^{-}, 2) принципиальное достоинство интуиционистской теории состоит в ее эффективности (т.е. в наличии свойства экзистенциальности, см. [7,8]); но интуиционистская доказуемость формулы $\neg\neg\exists x\varphi(x)$ не влечет возможность предъявить соответствующее "решение" x_0.

Результат П.С.Новикова, как и результат Колмогорова–Геделя, был развит многими авторами. Так, геделевская функциональная интерпретация показывает: если $Ar \vdash \forall x\exists y P(x,y)$, то $(Ar\text{-}LEM) \vdash \forall x\exists y P(x,y)$. Спектор, Жирар и Правитц (с помощью функционалов конечных типов и нормализации доказательств) получили такой же результат с заменой теории Ar на теорию типов. Пусть далее везде буква K обозначает теоретико-множественную переменную, пробегающую класс всех колец (т.е. $K=\langle K,+,-,\cdot,0,1\rangle$) и запись $[\varphi]_K$ означает интерпретацию формулы φ языка колец в кольце K. Конечно, $[\varphi]_K$ – уже формула в языке теории множеств. Пусть $\kappa(\cdot)$ – какая-то формула в языке теории множеств и ψ AE-формула в языке колец, т.е. формула вида $\psi \leftrightharpoons \forall x\exists y P(x,y)$. Обозначим $\zeta \leftrightharpoons \forall K\ (\kappa(K) \Rightarrow [\psi]_K)$. Х.Фридман показал [9]: если $ZF \vdash \zeta$, то $ZFI' \vdash \zeta$, где $\kappa(\cdot)$ – та конкретная формула в языке теории множеств, которая описывает кольцо $\mathbf{Z}$.

Линия развития этих результатов от арифметики (или даже от чистой логики) к теории множеств естественна, так как, допуская более мощные аксиомы в посылках этих результатов, мы тем самым ослабляем посылки.

В главе II показано: если $ZF \vdash \zeta$, то $ZFI' \vdash \zeta'$, где формула $\kappa(\cdot)$, входящая в вышеуказанную формулу ζ, описывает (детали см. ниже) любое счетное кольцо или любой класс счетных колец (или еще некоторые несчетные кольца, или их классы). В частности, и кольцо $\mathbb{Z}$, как в результате Фридмана. А формула ζ' совпадает с ζ (для неразложимых или счетных колец, или в случае хорновости формулы ψ) или близка по смыслу к формуле ζ (для произвольных колец и произвольной ψ). Иными словами, мы разрешаем в формуле ζ многие разные посылки $\kappa(\cdot)$ вместо одной конкретной в результате Фридмана.

Кроме того, в главе II показано: если формула ζ утверждает, что некоторая теорема ψ верна в классе (например) всех тел, то формула ζ' утверждает, что эта же или близкая к ней теорема ψ' верна в (гораздо более широком) классе всех строго регулярных колец (определения см. в [21,20]).

В качестве следствия этих результатов получаем: по классическому доказательству существования какой-то функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условию $[\forall x P(x,f(x))]_K$, можно явно (алгоритмически) предъявить "решение" – программу одной конкретной вычислимой функции f_0, в том же смысле удовлетворяющей предикату P, см. [7]. При этом предикат P не обязательно разрешим: он может включать, например, термы в языке теории множеств, описывающие операции $+,-,\cdot$. Конечно, вопрос о сложности такого предъявления не прост и зависит от разных ограничений.

Важно заметить, что AE–формула ψ и даже AE–хорнова формула ψ (где $P(x,y)$ – бескванторная формула) может описывать весьма нетривиальную функциональную зависимость у от х. Например, такие формулы описывают теорему Лина–Зайденберга, теорему Гильберта о нулях, теорему Артина о положительном решении 17–ой проблемы Гильберта и т.д.

В начале 50–х годов А.А.Марков выдвинул тезис: если $\forall x,y(P(x,y)\cup\neg P(x,y))$ $\cap$ $\forall x\neg\neg\exists y P(x,y)$, то $\forall x\exists y P(x,y)$, – который получил название: "принцип Маркова". Принцип Маркова играет большую роль в интуиционистском (конструктивном) направлении в математике. Ему соответствует известное правило Маркова: если $\mathrm{Int}\vdash \neg\neg\exists y P(x,y)$, то $\mathrm{Int}\vdash \exists y P(x,y)$, где $\mathrm{Int}\vdash$ обозначает интуиционистскую выводимость в подразумеваемой теории и $P(x,y)$ – разрешимый предикат.

Указанные выше результаты можно рассматривать как обоснование принципа (правила) Маркова или близких к нему утверждений. (Иногда в такой ситуации говорят о принадлежности формул ζ классу Гливенко–Новикова.)

Задачу эффективизации мы обсуждаем на примере задачи построения движения (задачи навигации). Эту задачу, в частности, можно описать так: дана спецификация траектории (дано описание двигательной задачи) и нужно явно построить траекторию (решить эту задачу). Она исследовалась как концептуально, так и в плане построения многочисленных конкретных алгоритмов, например, в [10–14,28]. Одна из ее возможных постановок такова. По описанию T (параметров) сцены и описанию $\psi \leftrightharpoons \forall x \exists y P(x,y)$ требований к траектории $y=f(x)$, т.е. по формуле $T \Rightarrow \psi$, найти программу такой вычислимой функции f_0, что $T \Rightarrow \forall x P(x, f_0(x))$. Афферентная информация $T \Rightarrow \psi$ преобразуется в эфферентную информацию f_0, по-видимому, с участием промежуточного "языка рассуждений". Полученные в главе II результаты позволяют уточнить постановку этой задачи и получить эффективный, в реальное время работающий алгоритм обработки информации в промежуточном языке. А именно: алгоритм, который переводит рассуждение о возможности "движения" $T \Rightarrow \psi$ в интуиционистское рассуждение об этом (и, следовательно, в определенную программу движения). Здесь $P(x,y)$ может некоторым образом содержать логические связки и кванторы.

Перейдем к характеристике содержания главы III. Известно теоретическое и прикладное значение теорий, допускающих элиминацию кванторов (А.Тарский, около 1950 года). Но такие теории весьма редки. Обобщением понятия о теории с элиминацией кванторов является понятие о модельно полной теории (А.Робинсон, начало 50-х годов). Для такой теории T всякая формула эквивалентными преобразованиями приводится, хотя и не к бескванторному виду, но все еще к очень простому виду. Скажем подробнее. А.Робинсон определил понятие модельного компаньона T^* теории T, и была надежда, что существует достаточно много теорий T, имеющих модельный компаньон T^*. (Теория может иметь не более одного модельного

2- 1789

компаньона.) Сначала были известны только отдельные примеры таких теорий T. После 1969 г. значительные усилия были направлены на поиск общих конструкций для получения модельных компаньонов (например, с помощью компаньон-операций). Это делалось и на основе соответствующего развития метода вынуждения. В это же время формируется направление, которое А.Макинтаер в 1977 г. еще называет "неисследованные пути изучения", [15,с.174]. А именно, Карсон [16], Липшиц и Сарацино [17], а также Макинтаер [18], Вайспфенинг [19] с точностью до небольших различий получили следующий результат. Пусть Ф – модельно полная теория, включающая аксиомы поля, а T – теория класса $\mathcal{K}_Ф$ всех безатомных колец, составленных из всех глобальных сечений (пирсовских) пучков со слоями, которые являются моделями теории Ф. Утверждается, что тогда T – модельно полная теория. Например, если Ф – теория всех алгебраически замкнутых полей, то T – теория всех безатомных коммутативных регулярных (по Дж.Нейману [20,21]) алгебраически замкнутых колец. Любой класс $\mathcal{K}_Ф$, определенный так, как в этом результате, содержится в классе коммутативных регулярных колец. В [15,18] А.Макинтаер ставит проблему расширения этого результата на случай, когда класс $\mathcal{K}_Ф$ выходит за пределы класса коммутативных регулярных колец. А именно, пусть Ф – любая теория колец, имеющая модельный компаньон $Ф^*$, и класс $\mathcal{K}_Ф$ колец определяется по Ф точно также, как выше [повторим определение: $\mathcal{K}_Ф \rightleftharpoons \{K \mid \forall p(Ф)_{K_p}\}$, где K_p – произвольный слой упомянутого пучка кольца K]. В этом случае имеет ли класс $\mathcal{K}_Ф$ модельный компаньон (который мы обозначаем $\mathcal{K}_Ф^*$) и какова аксиоматика класса $\mathcal{K}_Ф^*$? По этой проблеме и близким вопросам можно найти некоторые результаты и исторического плана замечания, например, в [22–24].

В главе III (при некоторых неограничительных условиях) дается положительный ответ на этот вопрос и приводится работающий в реальное время алгоритм, который по теории Ф (точнее по $Ф^*$) порождает аксиоматику теории $\mathrm{Th}\mathcal{K}_Ф^*$.

Задача обобщенного описания (как часть задачи или процесса обобщения) изучалась концептуально и в связи с многочисленными конкретными постановками, например, в [25–29]. Эту задачу, в частности, можно описать так: дано (подробное) описание обстановки, и мы хотим перейти от него к (в том или ином смысле) простому описанию, согласованному с исходным. Здесь ключевые слова: "простое" и "согласованное". В качестве модели такого перехода рассматривается переход от описания (теории) T к описанию (модельному компаньону) T^*. В этом случае "простое" означает: нередко теория T^* допускает элиминацию кванторов и во всяком случае любая формула эквивалентными относительно T^* преобразованиями приводится к очень простому виду. В этом случае "согласованное" означает, в частности: если $T_{AE} \vdash \varphi$, то $T^* \vdash \varphi$, где T_{AE} – теория, состоящая из всех AE–следствий теории T, а φ – любая формула.

Более подробная постановка возникает в связи с моделированием интеллектуальных процессов. Описание Ф сцены актуализирует некоторое множество "элементарных модулей" K, образующих внутреннюю структуру (условно говоря) поведенческой системы. А именно, актуализирует множество $\mathcal{K}_Ф$, которое описывает (текущую, но с учетом предыдущего опыта) актуальную модель обстановки. В §5 приложения рассматриваются более подробные способы ее описания. Поведенческая система "апроксимирует модуль" $\mathcal{K}_Ф$ "модулем" $\mathcal{K}_Ф^*$ и рассматривает описание $T^* \leftrightharpoons \mathrm{Th}\mathcal{K}_Ф^*$, как обобщенное описание афферентного описания Ф. Например, в связи с описанием параметров сцены. Эта модель задачи обобщения допускает эффективную компъютерную реализацию (как и основанная на ней более подробная интерпретация представлений о поведенческой системе, изложенная в §5 приложения).

Отметим также (например, в связи с пруверами), что для довольно широкого класса формул φ' (включающего все h–формулы, см. [30]) вопрос о выводимости φ' в теории T^* редуцируется в реальное время к вопросу о выводимости формулы ϕ, соответствующей φ', в (более простой) теории $Ф^*$.

Отметим, что показанная в работе возможность на единой основе рассматривать как вопросы эффективизации (конструктивизации) рассуждений, так и вопросы теоретико-модельной алгебры, соответствует известным положениям, см. [31]. Отметим также работы [32–34], дополняющие эту часть реферата. Наконец, упомянем несколько книг, в которых обобщены работы, стимулировавшие прикладные интересы автора [35–39].

Результаты диссертации излагались автором в пленарных докладах на 7-ой и 10-ой Всесоюзных конференциях по математической логике (Новосибирск-1984, Алма-Ата-1990), на международных конференциях (Зальцбург-1983, Варна-1988, Новосибирск-1989, София-1989, Варна-1990), международном коллоквиуме (Караганда-1990) и на Российской школе по основаниям математики (Саратов-1989). Докладывались на Симпозиуме по математической логике и ее приложениям (Бразилия-1989), на Логическом коллоквиуме'89 (Берлин-1989) и Логическом коллоквиуме'90 (Хельсинки-1990). А также подробно излагались автором на научных семинарах Ю.В.Матиясевича (ЛОМИ), Л.А.Бокутя (ИМСОАН), Ю.Л.Ершова и Е.А.Палютина (ИМСОАН).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [41–65].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа содержит 3 главы и приложение, всего 20 параграфов. В диссертации доказываются 15 теорем, нумерация которых сквозная; остальные утверждения нумеруются по параграфам. Автор рассматривает, как основные, следующие три результата: метод (предложения 5,6,7в,8,10,12 из §I.6 и предложение 3-4 из §I.8), переход к интуиционистской теории (теоремы 2–4) и построение модельных компаньонов (теоремы 10–12).

В главах I,II все утверждения понимаются, как утверждения о выводимости соответствующих формул языка ZF в интуиционистской теории множеств ZFI' или как чисто финитные утверждения о наличии явно указываемой примитивно-рекурсивной функции, которая преобразует одни выводы в другие. В отдельных случаях явно оговаривается использование в выводе аксиомы LEM. В главе III все утверждения понимаются, как утверждения о выводимости соответствующих формул языка ZF в обычной теории множеств ZFC (хотя многие из них фактически выводимы и в теории ZFI').

Символ $\rightleftharpoons$ означает "равно по определению" или "эквивалентно по определению".

Глава I содержит утверждения, составляющие метод семантического оценивания. В §§1–3,5 и частично в §4 напоминаются известные понятия и результаты, вводятся обозначения. В §4 известный результат Даукера–Пейперта–Избела–Фурмана–Скотта [40] приводится к виду нужному в дальнейшем.

Пусть K – любое (ассоциативное с единицей) кольцо. Обозначим $B(K)$ множество всех его центральных идемпотентов. Это множество является булевой алгеброй относительно операций: $e_1 \cap e_2 \rightleftharpoons e_1 \cdot e_2$, $e_1 \cup e_2 \rightleftharpoons e_1+e_2-e_1 \cdot e_2$, $\neg e \rightleftharpoons 1-e$ с наибольшим элементом 1 (единица кольца) и наименьшим элементом 0 (нуль кольца). Здесь и далее буква e с индексами или без них обозначает произвольный элемент из $B(K)$.

Кольцо K назовем нормальным, если выполняется $(\Phi_1)_K$, где

$$\Phi_1 \rightleftharpoons \forall k \exists e_0 \forall e\ (e \cdot k=0 \Leftrightarrow e \le e_0).$$

Обозначим $\mathcal{I}(K)$ множество всех идеалов в алгебре $B(K)$. Это множество является полной гейтинговой алгеброй относительно порядка: $a \le b \rightleftharpoons a \subseteq b$. J–оператором называется отображение $J\colon \mathcal{I}(K) \to \mathcal{I}(K)$, обладающее свойствами: $a \le J(a) = JJ(a)$ и $J(a \cap b)=J(a) \cap J(b)$ для всех $a,b \in \mathcal{I}(K)$. Множество всех J–операторов обозначается $A(K)$, оно образует полную гейтингову алгебру относительно порядка: $J_1 \le J_2 \rightleftharpoons \forall a (J_1(a) \le J_2(a))$. Обозначим $\mathcal{B}(K)$ подалгебру в алгебре $A(K)$, состоящую из всех стабильных в $A(K)$ элементов, т.е. из всех таких $J \in A(K)$, что $(\neg\neg)_A\ J = J$. Здесь и далее отрицание $\neg u$ определяется как $(u \to 0)$, а импликация $(u \to v)$ определяется как *$\bigcup\{w \in \Omega \mid u \cap w \le v\}$ для любой полной гейтинговой алгебры Ω и любых* ее элементов u, v. При этом $\mathcal{B}(K)$ – полная булева алгебра (иногда ее называют топологическим пополнением исходной алгебры $B(K)$) и $B(K)$ вкладывается в $\mathcal{B}(K)$ по правилу $e \mapsto J_e$,

3- 1789

где $J_e(a) \leftrightharpoons \langle e\rangle \cup a$, $J_e: \mathcal{T}(K) \to \mathcal{T}(K)$. Предложения 1 и 2 из §4 содержат полезные для дальнейшего свойства этих алгебр.

В §5 напоминается определение пирсовской локализации K_p кольца K в точке p, где p пробегает X(K) - множество всех простых идеалов в алгебре B(K). А именно, $K_p \leftrightharpoons K/\bar{p}$, где $\bar{p} \leftrightharpoons p\cdot K$ – идеал в K. Запись $(K_p)\models\varphi(\bar{k})$ означает $\forall p\in X(K)\ (\varphi(\bar{k}^p))_{K_p}$, где φ – любая формула в языке колец, а $\bar{k}=\langle k_1, \ldots, k_n\rangle\in K$ и $\bar{k}^p=\langle k_1^p, \ldots, k_n^p\rangle$, и $k_i^p \leftrightharpoons [k_i]_{\bar{p}} \in K_p$.

В §6 определяются два важных для нас отображения. В дальнейшем такого типа отображения мы называем оценками (общее определение оценки дано в начале §6). Первое из них является отображением вида $Я(K) \to \mathcal{T}(K)$, где $Я(K)$ – множество всех предложений в языке колец с множеством K в качестве множества параметров. А второе является отображением вида $Я(K) \to \mathcal{B}(K)$. Эти отображения обозначаются соответственно $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$. Для атомарного предложения k=t обе оценки определяются одинаково: $[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \leftrightharpoons [\![k=t]\!]_{\mathcal{B}} \leftrightharpoons \{e\in B(K)\ |e\cdot k=e\cdot t\} \in\mathcal{T}(K)\subseteq\mathcal{B}(K)$. Если k, t - полиномы, то они заменяются на их значения, вычисленные в кольце K. Затем эти отображения продолжаются на все множество $Я(K)$ обычным образом: $[\![\varphi\wedge\psi]\!]_{\mathcal{T}} \leftrightharpoons [\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}$, $[\![\exists x\varphi]\!]_{\mathcal{T}} \leftrightharpoons \bigcup_{\mathcal{T}}\{k\in K\ |[\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}}\}$ и аналогично для всех других пропозициональных связок и квантора $\forall$; второе отображение определяется точно так же, но вместо операций в $\mathcal{T}(K)$ используются (в правых частях равенств) операции в $\mathcal{B}(K)$. Первая из этих оценок определена в [40].

Интуитивно каждую оценку $[\![\cdot]\!]$ можно рассматривать, как некоторую семантику, как "мир смыслов параллельный" обычному миру истинности и миру выводимости. Этот тезис будет постепенно раскрываться дальше. Пока отметим, что оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$ замкнута относительно интуиционистской выводимости в теории колец, а оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$ замкнута относительно классической выводимости в теории колец, т.е. выполняется: во-первых, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}}=1$ и $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}}=1$ для всех интуиционистских или соответственно всех классических аксиом φ; и, во-вторых, если $[\![\varphi]\!]=1$ и $[\![\psi]\!]=1$, а ϑ получается из φ,ψ по одному из правил вывода, то $[\![\vartheta]\!]=1$. Поэтому: если $\mathrm{int}\vdash\varphi$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}}=1$;

если $\vdash \varphi$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 1$, где $\mathrm{int}\vdash$ обозначает интуиционистскую выводимость, а $\vdash$ обозначает классическую выводимость (в некоторой подразумеваемой теории). Суть нашего подхода в том, что семантики $\mathrm{int}\vdash \varphi$ и $\vdash \varphi$ тесно связаны с предикатами $(\varphi)_K$, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} = 1$ и $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} = 1$, которые в свою очередь тесно связаны между собой.

В предложении 1.§6 проверяются свойства оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$. В предложении 2.§6 приводится удобная для нас форма интуиционистского определения по рекурсии. Предложения 3,4§6 содержат нужные нам свойства произвольных оценок.

В предложении 5.§6 (с использованием LEM) для нормального кольца K доказаны соотношения:

$([\![\varphi(\bar{K})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \not\leq p) \Rightarrow K_p \models \varphi(\bar{K}^p)$, $\forall p \in X(K)$, (1)

для любой формулы φ в слабо нормальной форме (см. ниже);

и $(\forall p \not\geq \langle e\rangle\ (K_p \models \varphi(\bar{K}^p))) \Rightarrow ([\![\varphi(\bar{K})]\!]_{\mathcal{T}} \geq \langle e\rangle)$ (2)

для любой AE-формулы φ и любого $e \in B(K)$, где p пробегает X(K).

Формула φ называется "в слабо нормальной форме", если область действия любой входящей в нее импликации не содержит кванторов. AE-формулой называется формула в предваренной форме с префиксом $\forall x_1,\dots,x_n \exists y_1,\dots,y_m$. Формула называется фи-формулой, если в посылке любой ее импликации: во-первых, нет квантора $\forall$ и, во-вторых, квантор $\exists$ не входит в область действия какой-либо связки $\Rightarrow$. Позитивной называется формула, не содержащая связку $\Rightarrow$. (Отрицание $\neg\varphi$ везде понимается как $\varphi \Rightarrow \bot$.) Хорновой называется формула, полученная из атомарных формул с помощью навешивания связок $\cap, \exists, \forall$ и операции образования формулы $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ – позитивная, а ψ – хорнова формула. Формула называется "в слабо импликативной форме", если в посылке любой ее импликации нет импликаций. Теория, состоящая из формул некоторого одного типа, называется по имени этого типа формул. Например, фи-теория – любое множество фи-формул.

В предложении 6.§6 для любого нормального кольца K доказаны соотношения:

$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} \leq [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$ для любой фи-формулы φ с параметрами (3)

и, если $[\![\psi]\!]_{\mathcal{B}} \geq a$, то $[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}} \geq a$ для любой AE-формулы ψ (4)

с параметрами и любого $a\in\mathcal{T}(K)$.

Заметим, что для любого кольца K выполняется:

если φ – позитивная формула, то φ_K влечет $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}}=1$, а если ψ – хорнова формула, то $[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}=1$ влечет ψ_K. (5)

В определении 7.§6 вводится понятие почти позитивной и K–разрешимой формулы. Класс таких формул существенно расширяет класс позитивных формул. В предложении 7в.§6 доказано: для любой почти позитивной и K–разрешимой формулы φ, если φ_K, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}}=1$. (6)

В определении 8.§6 дается следующий перевод формул φ языка колец в формулы φ'_e того же языка (напомним: e, e_0, e_1, e_2 – свободные переменные, пробегающие $B(K)$): $(k=t)'_e \leftrightharpoons e\cdot k=e\cdot t$, $(\varphi\cap\psi)'_e \leftrightharpoons \varphi'_e \cap \psi'_e$, $(\exists x\varphi)'_e \leftrightharpoons \exists x\varphi'_e$, $(\forall x\varphi)'_e \leftrightharpoons \forall x\varphi'_e$, $(\varphi\Rightarrow\psi)'_e \leftrightharpoons \forall e_0 ((e_0\leq e \cap \varphi'_{e_0}) \Rightarrow \psi'_{e_0})$, $(\varphi\cup\psi)'_e \leftrightharpoons \exists e_1, e_2 ((e=e_1\cup e_2) \cap \varphi'_{e_1} \cap \psi'_{e_2})$. Обозначим $\varphi' \leftrightharpoons \varphi'_1$ и $T' \leftrightharpoons \{\varphi' \mid \varphi\in T\}$, где T – любая теория. Заметим, что класс $\{\varphi' \mid \varphi\}$ содержит известный класс h–формул, определение h–формулы см. в [30]. В предложении 8.§6 для любого кольца K доказывается:

$(\varphi'_e(\bar{k}))_K \Leftrightarrow (e\in[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}})$ для любой формулы φ (7)

с параметрами и любого $e\in B(K)$ и, если φ в слабо импликативной форме, то φ'_e – хорнова формула. (8)

Этот перевод оказался алгебраически содержательным. Например, если $\varphi \leftrightharpoons$ "быть телом", то $\varphi' \Leftrightarrow \forall k\exists t\ (k^2\cdot t=k)$. Последняя формула определяет класс строго регулярных (по Дж. Нейману) колец. Если φ говорит "коммутативное" или "алгебраически замкнутое" кольцо, то φ' говорит соответственно то же самое. В предложении 9.§6 доказано: пусть φ – бескванторная формула в дизъюнктивной нормальной форме, т.е. $\varphi \leftrightharpoons \bigcup_{i=1}^{n} (k_{1i}=t_{1i} \cap \ldots \cap r_{1i}\neq s_{1i} \cap \ldots)$; свойство $(\varphi')_K$ эквивалентно тому, что кольцо K представимо в виде прямого произведения $K \cong \prod_{i=1}^{n} K_i$ и в сомножителе K_i "выполняется" i–ый дизъюнктивный член. Последнее означает: выполняется каждое его равенство $k_{1i}=t_{1i},\ldots$, а каждое его неравенство $r_{1i}\neq s_{1i},\ldots$ выполняется в любом ненулевом сомножителе L представления K_i в виде прямого произведения

$K_1 \cong L\times R$. Если формула ψ в предваренной форме, т.е. $\psi \leftrightharpoons Q\varphi$, где φ – бескванторная формула, то $\psi' = Q(\varphi')$. Если K – неразложимое кольцо (т.е. $B(K)=\{0,1\}$), то $(\varphi \Leftrightarrow \varphi')_K$. То же самое выполняется для любого кольца K и любой h–формулы φ. Сравните с (5).

Наконец, в предложении 10.§6 для любого кольца K доказано: если $(\Phi_1)_K$, то $(\Phi_1')_K$; всегда верно $(\Phi_3')_K$; если $(i)_K$, то

$$(i')'_K \text{ и } (\Phi_1)_K. \tag{9}$$

Здесь пары символов $\langle i,i'\rangle$ $(i=2,3,4,5)$ обозначают следующие пары свойств: строго бириккартово $\to$ первичное $(i=2)$, бирегулярное $\to$ квазипростое $(i=3)$, строго регулярное $\to$ тело $(i=4)$, строго риккартово $\to$ без делителей нуля $(i=5)$.

Напомним некоторые из этих определений: $2 \leftrightharpoons \forall k\exists e\ (\langle k\rangle^{*} = e\cdot K)$, $2' \leftrightharpoons \forall k,r\ (\forall t(k\cdot t\cdot r=0) \Rightarrow k=0 \vee r=0)$, $3 \leftrightharpoons \forall k\exists e\ (\langle k\rangle = e\cdot K)$, $3' \leftrightharpoons \forall k\exists p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n\ (k=0 \vee 1= p_1\cdot k\cdot q_1+\dots+p_n\cdot k\cdot q_n)$, $5 \leftrightharpoons \forall k\exists e\ (k^{*} = e\cdot K)$. Здесь a^{*} – правый анулятор идеала a или элемента a.

В доказательстве теоремы 1.§6 в самом простом случае показано, как работают эти оценки. А именно: пусть $\vdash (i'\cap\varphi \Rightarrow \psi)$, где $i=3,4,5$, а φ – фи-формула и ψ – AE–формула. Допустим K – любое кольцо и выполняется $(i\cap\varphi')_K$. Тогда по (7) получим $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{J}}=1$, а по (9) получим $[\![i']\!]_{\mathcal{J}}=1$ и $(\Phi_1)_K$. По (3) получим $[\![i'\cap\varphi]\!]_{\mathcal{B}}=1$. В силу замкнутости оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$ относительно классической выводимости получим $[\![i'\cap\varphi \Rightarrow \psi]\!]_{\mathcal{B}}=1$; это эквивалентно тому, что $[\![i'\cap\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \le [\![\psi]\!]_{\mathcal{B}}$. Поэтому $[\![\psi]\!]_{\mathcal{B}}=1$ и по (4) имеем $[\![\psi]\!]_{\mathcal{J}}=1$. По (7) получим ψ'_K. Итак, мы явно указали интуиционистское рассуждение, которое показывает: $\forall K\ ((i\cap\varphi') \Rightarrow \psi')_K$.

В §7 в основном повторяются результаты работы [3]. Дело в том, что нам нужны главные конструкции этой работы, но с определенными изменениями в них, и заранее неясно, что после таких изменений сохранятся нужные нам свойства. В §7 определяется гейтинговозначный универсум V^{Ω}, где Ω – любая полная гейтингова алгебра, оценка $[\![\cdot]\!]_{\Omega}$: $ZF(V^{\Omega}) \to \Omega$ (=отображение в алгебру Ω класса всех предложений языка ZF с

4- 1780

классом V^Ω в качестве класса параметров). А также определяется вложение $(\cdot)^\vee$: $V \to V^\Omega$ (интуиционистского) класса V всех множеств в класс V^Ω. Эти определения отличаются от тех, которые даны в [3]. Затем доказываются нужные нам свойства этих понятий. В дальнейшем в качестве Ω обычно берется алгебра $\mathcal{T}(K)$ или алгебра $\mathcal{B}(K)$.

В §8 определяется нестандартное представление кольца K, а также нестандартное представление каждого элемента k из K. Они обозначаются соответственно K' и P_k. Нестандартное представление кольца K это такой элемент $K'\in V^{\mathcal{B}}$, что для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ в языке колец и любых параметров $\bar{k}\in K$ выполняется:

$$[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\varphi(\bar{P}_k)_{K'}]\!]_{\mathcal{B}(K)}. \tag{10}$$

Здесь $\bar{k}=\langle k_1,\dots,k_n\rangle$ и $\bar{P}_k=\langle P_{k_1},\dots,P_{k_n}\rangle$, а P_{k_i} - функция вида $P_{k_i}(t^\vee) \leftrightharpoons [\![k_i=t]\!]_{\mathcal{T}}$, где ее аргумент $t^\vee$ пробегает множество $\{t^\vee \mid t\in K\}$. При этом $P_{k_i}\in V^{\mathcal{B}(K)}$. Часто вместо P_{k_i} пишут k_i. Такие элементы K' и P_{k_i} удается определить только для случая $\mathcal{B}$-кольца. Последнее означает следующее условие на кольцо K:

$$[\![k^\vee=t^\vee]\!]_{\mathcal{B}(K)} \le [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}},\ \forall k,t\in K.$$

$\mathcal{T}$-кольцом называется кольцо K, удовлетворяющее условию:

$$[\![k^\vee=t^\vee]\!]_{\mathcal{T}(K)} \le [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}},\ \forall k,t\in K.$$

Нормальное $\mathcal{B}$-кольцо назовем (*)-кольцом, а условие "быть (*)-кольцом" будем записывать *(K). Предложение 4.§8 поясняет, что представляет собой K'. А именно, определим функцию $h(\langle k^\vee,P_k\rangle) \leftrightharpoons 1$, $\forall k\in K$. Тогда $[\![h\colon K^\vee \to K'$ гомоморфизм "на", его ядро равно $P_0 \subseteq K^\vee$ и $K^\vee/P_0 \cong K']\!]_{\mathcal{B}(K)} =1$.

Формулу $\kappa(\cdot)$ (описывающую кольцо $K=\langle K,+,-,\cdot,0,1\rangle$) в языке ZF назовем абсолютной, если $ZFI' \vdash \forall K\ (\kappa(K) \Rightarrow ([\![\kappa(K^\vee/P_0)]\!]_{\mathcal{B}(K)} =1))$. Обычные формулы, описывающие обычные кольца $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{A},M_2(\mathbb{Z}),\mathbb{H}$ и многие другие такого типа кольца, являются абсолютными. Просто потому, что в этих случаях $P_0=\{0^\vee\}$, а $\kappa(K) \Rightarrow ([\![\kappa(K^\vee)]\!]_{\mathcal{B}(K)} =1)$ для обычных формул $\kappa(\cdot)$.

В <u>главе II</u> основным является §1. В §§2,3 мы распространяем результаты §1 на случай кольца, не являющегося нормальным. Хотя при этом возникают новые содержательные случаи, формулировки становятся более грамоздскими.

Пусть $\bar{x}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ – фиксированный список переменных и T,T_φ – любые теории в языке колец, формулы которых в качестве свободных переменных содержат только переменные из списка $\bar{x}$, а $\varphi(\bar{x}),\psi(\bar{x})$ – любые формулы в языке колец, содержашие в качестве свободных переменных также только переменные из списка $\bar{x}$.

Предположим, что теория T_φ состоит из фи–формул, а ψ есть AE–формула. Запись вида $[T(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K$ означает $\forall\bar{k}\in K$ $[T(\bar{k}) \Rightarrow \psi(\bar{k})]_K$. Заметим что, например, любое нормальное кольцо K со счетным носителем удовлетворяет условию $*(K)$. В работе приводятся также примеры $\mathcal{T}$–колец (в частности, любое $\mathcal{B}$–кольцо является и $\mathcal{T}$–кольцом). Формула Φ_3 в языке колец говорит: "любой центральный идемпотент равен 0 или 1".

Теорема 2.

а) Пусть $ZFI' \vdash \forall K\ [\Phi_1,\Phi_3,T(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(\bar{x})]_K$. Тогда $ZFI' \vdash \forall K$ (K есть $\mathcal{T}$–кольцо $\Rightarrow [\Phi_1,T'(\bar{x}) \Rightarrow \varphi'(\bar{x})]_K)$. Формулу Φ_1 можно одновременно опустить в посылке и заключении.
(Таким образом, в любом интуиционистском рассуждении "аксиома" Φ_3 элиминируется.)

б) Пусть $ZF \vdash \forall K\ [T_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K$. Тогда:

1) $ZFI' \vdash \forall K\ (*(K) \Rightarrow [T_\varphi{}'(\bar{x}) \Rightarrow \psi'(\bar{x})]_K)$ и

2) $ZFI' \vdash \forall K\ (*(K) \Rightarrow [\Phi_3,T_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K)$.
(Таким образом, в классическом рассуждении аксиома LEM элиминируется.)

в) В пункте а перед связкой $\Rightarrow$ можно одновременно дописать: в посылке формулу i′, а в заключении формулу i, где i= 2,3,4,5. В пункте б перед связкой $\Rightarrow$ можно одновременно дописать: в посылке формулу i′, а в заключении формулу i, где i= 3,4,5. В обоих пунктах (в заключениях) можно опустить $(\cdot)'$, если T,T_φ h–теории и φ,ψ h–формулы; $(\cdot)'$ можно опустить у формул φ,ψ, если они хорновы.

г) В предыдущих пунктах длина вывода в заключении линейно зависит от длины вывода в посылке.
(Пункты в,г усиливают пункты а,б, как и теоремы 3,4.)

Теорема 3. Пусть $T, T_\varphi, \varphi, \psi$ – такие же теории и формулы, как в теореме 2. Пункты а,б теоремы 2 остаются верными, если в их заключениях заменить T' на T, одновременно добавив (там же) условие K-разрешимости теории $T(\bar{x})$ (или вместо этого метаматематически предположив, что $T(\bar{x})$ – позитивная теория).

Теорема 4. Теоремы 2 и 3 верны, если в них вместо $\forall K \ldots$, написать $\forall K\ (\kappa(K) \Rightarrow \ldots .)$, где $\kappa(\cdot)$ - любая абсолютная формула в языке ZF.

Эти три теоремы (и их доказательства) в сущности представляют собой один результат, изложенный в нескольких вариантах. Из него получаем следствие 1 и легкое следствие 2:

Следствие 1. Пусть $ZF \vdash \forall +,-,\cdot,0,1\ [T_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_{\omega,+,-,\cdot,0,1}$. Тогда $ZFI' \vdash \forall +,-,\cdot,0,1\ [T_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_{\omega,+,-,\cdot,0,1}$. (И то же самое в форме теоремы 4.)

Следствие 2 (LEM). Здесь T фи-теория. Обозначим $\mathcal{K}_T \rightleftharpoons \{K \mid (T)_K\}$ и $\mathcal{K}_{T'} \rightleftharpoons \{K \mid (T')_K \cap (\Phi_1)_K\}$. Если $\mathcal{K}_T \models \psi$, то $\mathcal{K}_{T'} \models \psi'$ и, если ψ – хорнова, то $\mathcal{K}_{T'} \models \psi$. (Заметим: пусть $T' \Rightarrow \Phi_1$; для позитивной теории T выполняется $\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{K}_{T'}$, а также $\{K \mid (T)_K \cap T$ есть K-разрешимая$\} \subseteq \mathcal{K}_{T'}$.)

Перейдем к §2. Формула называется "в слабо A-нормальной форме", если посылка любой ее импликации не содержит $\forall$ и $\Rightarrow$. Формула называется "с тесными отрицаниями", если она содержит импликацию только в форме отрицания атомарных подформул. Кольцо K назовем "с отделимостью", если $\exists \# \in V^{\mathcal{T}(K)}$ $\forall k,t \in K\ [(\llbracket P_k \neq P_t \rrbracket_{\mathcal{B}(K)} \leq \llbracket \langle P_k, P_t \rangle \in \# \rrbracket_{\mathcal{T}(K)}) \cap \llbracket (\langle P_k, P_k \rangle \in \# \rrbracket_{\mathcal{B}(K)} = 0)]$.

Вместо $\langle P_k, P_t \rangle \in \#$ будем писать $P_k \# P_t$. Объект # называется отделимостью кольца K. Определим перевод $\varphi \mapsto \varphi^\#$ (где φ – формула в языке колец с тесными отрицаниями) как замену всех подформул вида $k \neq t$ на формулы $k \# t$.

Теорема 5а. Пусть T – теория в слабо A-нормальной форме в языке колец и ψ есть AE-формула с тесными отрицаниями в том же языке. Тогда в ZFI' выводимо: если K есть $\mathcal{B}$-кольцо с отделимостью, то $[(\llbracket [T(\bar{k}) \Rightarrow \psi(\bar{k})]_{K'} \rrbracket_{\mathcal{B}(K)} = 1) \Rightarrow$
$(\llbracket [T(\bar{k}) \Rightarrow \psi^\#(\bar{k})]_{K'} \rrbracket_{\mathcal{T}(K)} = 1)]$, $\forall \bar{k} \in K$.

Перевод $\varphi \mapsto \varphi'$ легко продолжается на формулы вида $\psi^\#$, и тогда теорема 5а переходит в утверждения вида: если $ZF \vdash [T(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K$, то $ZFI' \vdash [T'(\bar{x}) \Rightarrow \psi^{\#'}(\bar{x})]_K$, которые доказываются в теореме 5б–в.

Напомним, что для любого объекта $L \in V^\Omega$ такого, что $[\![\langle L,+,-,\cdot,0,1\rangle\text{-кольцо}]\!]_\Omega = 1$, определяется "внешнее" кольцо $L^\wedge$ следующим образом: $L^\wedge \rightleftharpoons \{g \in V^\Omega \mid [\![g \in L]\!]_\Omega = 1\}$ и $(l_1 +^\wedge l_2 = l) \rightleftharpoons [\![\langle l_1, l_2, l\rangle \in +]\!]_\Omega = 1$ для любых $l_1, l_2, l \in L^\wedge$, и также для других операций. Получаем структуру $L^\wedge \rightleftharpoons \langle L^\wedge, +^\wedge, -^\wedge, 0, 1\rangle$ (где $[\![0\text{–нуль в } L,\ 1\text{–единица в } L]\!]_\Omega = 1$), которая действительно является кольцом. При этом объекты L и $L^\wedge$ называются соотвественно внутренним и внешним кольцами. Один из способов задания отделимости состоит в рассмотрении колец K с "метрикой" вида $f\colon K \to L^\wedge$, где L – "хорошее" внутреннее кольцо в $V^{\mathcal{T}(K)}$. В качестве такого L можно брать, например, объект $\mathbb{R}^d_{\mathcal{T}}$ – кольцо всех дедекиндовых вещественных чисел в $V^{\mathcal{T}(K)}$ или объект $(Y^\vee)^\sim_{\mathcal{T}}$. Здесь Y – (локально компактное и строго разрешимое) топологическое кольцо, а терм $(\cdot)^\sim_{\mathcal{T}}$ обозначает операцию пополнения топологического кольца (этот терм рассматривается в $V^{\mathcal{T}(K)}$ и применяется к кольцу $Y^\vee$). Второй из этих случаев рассматривается в §3.

Аналогично определяются объекты $\mathbb{R}^d_\Omega$ и $(Y^\vee)^\sim_\Omega$ из V^Ω для любой фиксированной полной гейтинговой алгебры Ω. Знак $(\,)^\vee$ в дальнейшем опускается. Прежде всего возникает вопрос, что представляют собой кольца $(\mathbb{R}^d_\Omega)^\wedge$ и $(Y^\sim_\Omega)^\wedge$. В частности, в том случае, когда $\Omega \rightleftharpoons \mathcal{T}(K)$. Ответим на него с использованием LEM.

Предложения 1.§2,12.§3. Пусть Ω – любая полная гейтингова алгебра и X – ее стоуново пространство. Тогда

$$(\mathbb{R}^d_\Omega)^\wedge \cong C_\Omega(X,\mathbb{R}) \text{ и } (Y^\sim_\Omega)^\wedge \cong C_\Omega(X,Y).$$

Здесь Y – любое указанное выше топологическое кольцо (в частности, Y может равняться $\mathbb{R}$). А выражение $C_\Omega(X,Y)$ обозначает кольцо всех непрерывных функций вида $f\colon \mathcal{O}_f \to Y$, где $\mathcal{O}_f$ – открытое Ω–плотное (см. ниже) подмножество в X; эти функции рассматриваются с точностью до совпадения на пересечении их областей определения. Множество $\mathcal{O} \subseteq X$ называется Ω–плотным, если $\exists A \subseteq \Omega\ (\mathcal{O} = \cup A \cap \cup_\Omega A = 1)$. В частности, обычное кольцо $C(X,Y)$ естественно вкладывается в $C_\Omega(X,Y)$. Если Ω – топология любого пространства Z, то $C_\Omega(X,\mathbb{R}) \cong C(Z,\mathbb{R})$, где $\cong$ есть (поточечный при некоторых ограничениях на Z) кольцевой изоморфизм. Таким образом, мы определили (существенное) расширение класса всех алгебр вида $C(Z,\mathbb{R})$.

Вернемся к отделимости. Отделимость во внутреннем кольце $\mathbb{R}^d_\Omega$ определяется как $(k\#t) \leftrightharpoons [(k-t)^2 > 0]$, где $k,t \in \mathbb{R}^d_\Omega$. Предикат $k\#t$ говорит "k не равно t с подтверждением". Итак, отделимость в кольце K может задаваться, например, с помощью "регулятора" – отображения $f\colon K \to C_{\mathcal{T}(K)}(X,\mathbb{R})$, для которого выполняется: $[\![P_k=P_t]\!]_{\mathcal{B}(K)} \le [\![f(k)=f(t)]\!]_{\mathcal{B}(K)}$, $[\![P_k=P_t \Leftrightarrow \neg(f(k)\#f(t))]\!]_{\mathcal{B}(K)} =1$, $[\![P_k=P_t]\!]_{\mathcal{T}(K)} \le [\![f(k)=f(t)]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ для любых $k,t\in K$. Определим "внутреннюю" функцию $f\_$ (соответствующую внешней функции f) как $f\_(\langle P_k,f(k)\rangle)' \leftrightharpoons 1$ для всех k из K. Тогда $f\_ \in V^{\mathcal{T}(K)}$ и $[\![f\_\colon K' \to \mathbb{R}^d_{\mathcal{B}}]\!]_{\mathcal{B}(K)} =1$. Обозначим $(k \overset{\varepsilon}{=} t) \leftrightharpoons (f(k) \overset{\varepsilon}{=} f(t)) \leftrightharpoons (f(k)-f(t))^2 < \varepsilon$, где $k,t\in K$ и переменная ε пробегает все рациональные строго положительные числа. В терминах внутренней функции это означает, что $f\_(P_k) \overset{\varepsilon}{=} f\_(P_t)$. Здесь мы имеем хорошо известное в конструктивной математике ε–равенство. Оно говорит, что "k равно t с ε–точностью".

Пусть φ,ψ – формулы с тесными отрицаниями. Естественно определяется перевод "в посылке" $\varphi^{\#}$ (заменой всех подформул вида $k\ne t$ на формулы $k\#t \leftrightharpoons (f\_(k) \# f\_(t))$), и перевод "в заключении" $\psi^{\#\varepsilon}$ (такой же заменой всех подформул вида $k\ne t$, а также заменой всех подформул вида $k=t$ на формулы $k\overset{\varepsilon}{=}t$). Естественно, k,t "внешним образом" пробегают кольцо K, а "внутренним образом" пробегают кольцо K'. Далее, $T^{\#} \leftrightharpoons \{\varphi^{\#} \mid \varphi\in T\}$. Перевод $\varphi \mapsto \varphi'$ продолжается на формулы вида $\varphi^{\#}$ и $\psi^{\#\varepsilon}$.

Теорема 6 аналогична теореме 5. В частности, имеет место

Теорема 6а. Пусть T – теория с тесными отрицаниями в языке колец, а ψ AE–формула с тесными отрицаниями в том же языке. В ZFI' выводимо: если K – кольцо с регулятором f, то $([\![\,[T(\bar{k})\Rightarrow\psi(\bar{k})]_{K'}]\!]_{\mathcal{B}(K)} =1) \Rightarrow ([\![\,[T^{\#}(\bar{k})\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \psi^{\#\varepsilon}(\bar{k},\varepsilon)]_{K'}]\!]_{\mathcal{T}(K)}$

$=1)$, и $(\llbracket [T(\bar{k})\Rightarrow\psi(\bar{k})]_K, \rrbracket_{\mathcal{B}(K)} =1) \Rightarrow ([T^{\#,}(\bar{k})\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \psi^{\#\varepsilon,}]_K)$,
$\forall\bar{k}\in K$.

Отсюда в теореме 6б–в обычным образом получаем: если формула $T \Rightarrow \psi$ выводима в ZF, то формула $T^{\#,} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \psi^{\#\varepsilon,}$ выводима в ZFI'.

В этой теореме, в частности, в качестве K можно взять само кольцо $(\mathbb{R}^d_\Omega)^\wedge$ и тождественный регулятор f.

Затем определяется широкий класс формул $\kappa(\cdot,\cdot)$ в языке колец (они называются дедекиндовыми). Для дедекиндовой формулы $\kappa(\cdot,\cdot)$ и тех же T,ψ, что и в теореме 6а, доказывается

Теорема 7. Если $ZF \vdash \forall K, f\ (\kappa(K,f) \Rightarrow [T(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K)$, то $ZFI' \vdash \forall\Omega\ (\llbracket\forall K, f\ (\kappa(K,f) \Rightarrow [T^{\#}(\bar{x}) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \psi^{\#\varepsilon}(\bar{x})]_K\rrbracket_\Omega =1)$. Здесь переменная Ω пробегает класс всех полных гейтинговых алгебр, а $T^{\#} \leftrightharpoons \{\varphi^{\#}\ |\varphi\in T\}$ и $\varphi^{\#},\psi^{\#\varepsilon}$ определяется аналогично тому, как выше.

Перейдем к §3, где изучается указанное выше внутреннее кольцо $Y^\sim_\Omega$ из V^Ω (везде Ω – любая полная гейтингова алгебра). Далее "внутренние" переменные p,q пробегают множество всех фильтров Коши в $Y^\vee$ (точнее, множество их баз в базе топологии $\mathcal{T}^\vee$), а "внешние" p,q пробегают множество $(Y^\sim_\Omega)^\wedge$. Определим предикаты аналогичные предикатам $k\overset{\varepsilon}{=}t$ и $k\#t$. А именно, $(p\overset{\sigma}{=}q) \leftrightharpoons \exists\alpha\in p\cap q$ (α порядка $\sigma^\vee$), где $\sigma\in\Sigma_Y$ – базе окружений равномерного пространства Y, и $(p\#q) \leftrightharpoons \exists\sigma\in\Sigma^\vee_Y$ $\exists\alpha\in p\exists\beta\in q\ (\sigma(\alpha)d\sigma(\beta))$, где d – предикат дизъюнктности двух множеств. Запись $\varphi^{\#}$ означает, что формула φ в языке колец с тесными отрицаниями и в ней все подформулы вида $x\neq y$ заменены на формулы $x\#y$. Запись $\varphi^{\#\sigma}$ означает, что в формуле $\varphi^{\#}$ дополнительно все подформулы вида $x=y$ заменены на формулы $x\overset{\sigma}{=}y$. Перевод $\varphi \mapsto \varphi'$ естественно продолжается на формулы вида $\varphi^{\#}$ и $\varphi^{\#\sigma}$. При некоторых ограничениях доказывается: если $ZF \vdash \forall Z, Y\ (\kappa(Y) \cap Z\text{-плотное подкольцо кольца } Y^\sim \Rightarrow [T(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_Z)$, то $ZFI' \vdash \forall\Omega, Y\ (\kappa_1(\Omega,Y) \Rightarrow [T^{\#,}(\bar{x}) \Rightarrow \forall\sigma\in\Sigma_Y\ \psi^{\#\sigma,}(\bar{x})]_{C_\Omega(X,Y)})$. Теорема 8 содержит интуиционистский вариант этого утверждения, а теорема 9 – его классический вариант.

В <u>главе III</u> изучается нижеуказанная проблема, [15,18]. Напомним, что класс $\mathcal{K}^*$ колец называется модельным компаньоном класса $\mathcal{K}$ колец, если $\mathcal{K}^*$ аксиоматизируем и его теория модельно полна, а, кроме того, любое кольцо из $\mathcal{K}$ является подкольцом некоторого кольца из $\mathcal{K}^*$ и, наоборот, любое кольцо из $\mathcal{K}^*$ – кольца из $\mathcal{K}$. Пусть Φ – теория, имеющая модельный компаньон Φ^*. Здесь и далее все теории пишутся в языке колец и содержат аксиомы колец. По теории Φ образуем класс колец $\mathcal{K}_\Phi \leftrightharpoons \{K \mid (K_p)\models\Phi\}$, а также образуем класс колец $\mathcal{K}^*_\Phi \leftrightharpoons \{K \mid (\Phi_1\cap\Phi_2)_K \cap (K_p)\models\Phi^*\}$. Первый из них определен точно также, как и в первой части реферата. А в определении второго класса используется, кроме условия нормальности Φ_1, еще условие безатомности $\Phi_2 \leftrightharpoons \forall e\exists e_0\ (e_0\le e \cap (e_0=0\cup e_0=e \Rightarrow e=0))$. Если теория Φ^* включает, например, аксиому "первичное кольцо" (в частности, аксиому "тело" или "поле"), то условие Φ_1 в определении класса $\mathcal{K}^*_\Phi$ можно опустить, так как оно вытекает из этого условия на Φ^*. Спрашивается: имеет ли класс $\mathcal{K}_\Phi$ модельный компаньон и каков он? Ответ: при некоторых ограничениях класс $\mathcal{K}^*_\Phi$ хорново аксиоматизируем (эту аксиоматику обозначим T^*) и является модельным компаньоном класса $\mathcal{K}_\Phi$. Причем имеется алгоритм, который (в реальное время) по аксиомам теории Φ^* выписывает аксиомы теории T^*.

В §1 приводятся нужные нам в дальнейшем конструкции и утверждения. Обозначим $\mathbb{B}(K)$ полную булеву алгебру – подалгебру в $\mathcal{T}(K)$, состоящую из всех стабильных в $\mathcal{T}(K)$ элементов. Иными словами, теперь $\mathcal{T}(K)$ можно понимать, как решетку всех открытых множеств стоунового пространства $X(K)$ булевой алгебры $B(K)$. И поэтому $\mathbb{B}(K)$ – решетка всех регулярных открытых множеств компакта $X(K)$ (т.е. дедекиндово пополнение алгебры $B(K)$). Элементы алгебры $B(K)$ отождествляются с открыто-замкнутыми множествами в $\mathcal{T}(K)$.

Для нормального кольца K выполняется $K'\in V^{\mathbb{B}(K)}$, и поэтому определена оценка $[\![\varphi(\bar{k})_{K'}]\!]_{\mathbb{B}(K)}$ (связанная с булевозначным универсумом $V^{\mathbb{B}(K)}$) для любой формулы φ в языке колец с параметрами $\bar{k}\in K$ (вместо k фактически подставляется P_k). С другой стороны, определим оценку $[\![\cdot]\!]_{\mathbb{B}}$ для всех формул φ в языке колец с параметрами из K как $[\![k=t]\!]_{\mathbb{B}} \leftrightharpoons [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}$, $\forall k,t\in K$ и далее обычым образом с использованием операций именно в алгебре $B(K)$.

Предложение 4. Пусть K – нормальное кольцо. Тогда:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi_{K'}]\!]_{\mathcal{T}(K)} \leq [\![\varphi_{K'}]\!]_{B(K)} = [\![\varphi]\!]_{B},$$

где неравенство выполняется для любой формулы φ в слабо Е–нормальной форме (см. ниже), а равенства выполняются для любой формулы φ. Здесь φ с любыми параметрами из K.

Формула называется "в слабо Е–нормальной форме", если посылка любой ее импликации: во–первых, не содержит квантора $\exists$ и, во–вторых, не содержит квантора $\forall$ в области действия связки $\cup$.

Заметим, что $[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} = \{p\in X(K) \mid k^p=t^p\}$, $\forall k,t\in K$, и то же самое выполняется для любой позитивной бескванторной формулы $\varphi(\bar{k})$ вместо атомарной формулы $(k=t)$.

Предложение 6. Пусть K – нормальное кольцо и $(K_p)\models\Phi^*$, где Φ^* – модельно полная теория. Тогда для любой формулы $\varphi(\bar{k})$ в языке колец с параметрами $\bar{k}\in K$ выполняется: $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}} = \{p\in X(K) \mid K_p\models\varphi(\bar{k}^p)\}$ и значение $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}$ оценки является открыто–замкнутым множеством в $X(K)$.

Класс колец $\mathcal{K}$ назовем булево правильным, если $\forall K,L\in\mathcal{K}$ $(K\subseteq L \Rightarrow B(K)\subseteq B(L))$. Это, конечно, так, если $K\subseteq L \Rightarrow Z(K)\subseteq Z(L)$, где $Z(R)$ – центр произвольного кольца R. Если $\mathcal{K}$ – булево правильный класс и $\forall K\in\mathcal{K}$ $(\Phi_1)_K$, то $\mathcal{K}$ называется булево простым, если $\forall K,L\in\mathcal{K}$ $(K\subseteq L \Rightarrow \forall p\in X(L)$ $((p\cdot L)\cap K \subseteq (p\cap K)\cdot K)$. Последнее включение, конечно, влечет равенство $(p\cdot L)\cap K = (p\cap K)\cdot K$. Булево абсолютным называется булево правильный и булево простой класс. Например, любой булево правильный подкласс класса всех бирегулярных колец является булево абсолютным.

Перейдем к §2. Обозначим $\mathcal{P}$ класс всех первичных PI-колец A (рассматриваемых как центральные алгебры над целостными кольцами $Z(A)$) фиксированной степени s. Этот класс легко аксиоматизировать явно выписываемой теорией $T_{\mathcal{P}}$. Обозначим $\mathcal{P}_0$ класс всех центральных простых алгебр размерности n^2, где n – любое натуральное число. Здесь $s=2\cdot n$. Например, $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{H}$ (кватернионы) – алгебры из $\mathcal{P}_0$ при $n=2$. Выполняется: $\mathcal{P}_0\subseteq\mathcal{P}$. И класс $\mathcal{P}_0$ также аксиоматизируется явно выписываемой теорией $T_{\mathcal{S}_0}$. Нас интересуют подклассы в классе $\mathcal{S}_0$, описываемые как $\mathcal{S}_{T_0} \rightleftharpoons \{K\in\mathcal{S}_0 \mid Z(K)\models T_0\}$, где T_0 – какая-то фиксированная теория, имеющая модельный компаньон T_0^*. Например, T_0 – теория "быть формально вещественным полем" или теория "быть полем". Легко показать, что класс $\mathcal{S}_{T_0}$ аксиоматизируется некоторой явно выписываемой (по T_0) теорией Ф. А также то, что класс $\mathcal{S}_{T_0^*}$ (аксиоматизируемый некоторой теорией Φ^*) – модельный компаньон класса $\mathcal{S}_{T_0}$ (а теория Φ^* – модельный компаньон теории Ф). Это проверяется в предложениях 1,4.

Обозначим $\mathcal{K}_{T_0} \rightleftharpoons \{K \mid \{K_p\}\subseteq\mathcal{S}_{T_0}\}$ (иными словами, $\mathcal{K}_{T_0} \rightleftharpoons \{K \mid \{K_p\}\models\Phi\}$) и обозначим $\mathcal{K}_{T_0^*} \rightleftharpoons \{K \mid (\{K_p\}\subseteq\mathcal{S}_{T_0^*}) \cap (\Phi_2)_K\}$ (иными словами, $\mathcal{K}_{T_0^*} \rightleftharpoons \{K \mid (\{K_p\}\models\Phi^*) \cap (\Phi_2)_K\}$).

Теорема 10.2. Класс колец $\mathcal{K}_{T_0^*}$ хорново аксиоматизируем и является модельным компаньоном класса $\mathcal{K}_{T_0}$. Аксиоматика класса $\mathcal{K}_{T_0^*}$ явно выписывается по аксиоматике теории T_0^*.

Например, следующие классы модельно полны: $\{K \mid \forall p\ (K_p\equiv\mathbb{H}) \cap (\Phi_2)_K\}$, $\{K \mid \forall p\ (K_p\equiv\mathbb{H} \cup K_p\equiv M_2(\mathbb{R})) \cap (\Phi_2)_K\}$. Пусть T_0 – теория полей. Тогда хорново аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}_{T_0^*}$ – модельный компаньон класса $\mathcal{K}_{\mathcal{S}} \rightleftharpoons \{K \mid \{K_p\}\subseteq\mathcal{S}\}$. Приводится много других примеров разного сорта модельно полных теорий и модельных компаньонов классов и теорий.

Параграф 3. Теорию T назовем нормально автономной, если всякая ее модель вкладывается в такое нормальное кольцо F, что $\{F_p\}\models T$. Обозначим $X_1(K)$ множество всех собственных идеалов в алгебре $B(K)$. Если $q\in X_1(K)$, то обозначим $K_q \rightleftharpoons K/\bar{q}$, где $\bar{q} \rightleftharpoons q\cdot K$ – идеал в кольце K. Обозначим $\{K_q\} \rightleftharpoons \{K_q \mid q\in X_1(K)\}$. Теорию T назовем тотально автономной, если для любой ее модели K выполняется $\{K_q\}\models T$. Например, если $T\vdash \Phi_3$, где $\Phi_3 \rightleftharpoons$ "неразложимое", то, очевидно, T – нормально и тотально автономная теория.

Теорема 11. а) Пусть $\mathcal{K}_1 \rightleftharpoons \{K \mid (\{K_p\}\models\Phi) \cap (\Phi_1)_K\}$, где Ф AE-теория. Тогда класс колец $\mathcal{K}_1$ хорново аксиоматизируем; а именно: $K \in \mathcal{K}_1 \Leftrightarrow [(\Phi')_K \cap (\Phi_1)_K]$.

б) Если класс $\mathcal{K}_\Phi^*$ булево абсолютен, то он – модельно полный класс.

г) Пусть $\Phi \subseteq \Phi^*$. Если Φ^* – нормально автономная теория, а класс колец $\mathcal{K}_\Phi^*$ – булево абсолютный, то класс $\mathcal{K}_\Phi^*$ – хорнов модельный компаньон класса $\mathcal{K}_\Phi$. В частности, теория $\Phi_1+\Phi_2+(\Phi^*)'$ – модельный компаньон теории Φ'.

д) Пусть Φ^* - нормально автономная теория, Φ – тотально автономная теория, а $\mathcal{K}_\Phi^*$ – булево абсолютный класс колец. Тогда $\mathcal{K}_\Phi^*$ – хорнов модельный компаньон класса $\mathcal{K}_\Phi$.

Теорема 12. Пусть теория Φ модельно вложима в теорию Φ_1 (и это выводимо в ZFC). Пусть Φ AE-теория и Φ_1 – тотально автономная теория. Тогда любое нормальное кольцо K, для которого $\{K_p\} \models \Phi$, вложимо в такое кольцо L, что $\{L_p\} \models \Phi_1$.

Параграф 4. Теперь мы хотим из того, что некоторый класс $\mathcal{K}_{\Phi_1}$ – модельный компаньон некоторого класса $\mathcal{K}_\Phi$, получить, что теория Φ_1 (локально соответствующая классу $\mathcal{K}_{\Phi_1}$) – модельный компаньон теории Φ (локально соответствующей классу $\mathcal{K}_\Phi$). Примером такого результата является теорема 13.

В определении 1 формулируется понятие "класс $\mathcal{K}_1$ – слабый модельный компаньон класса $\mathcal{K}$", которое существенно слабее следующего условия: "класс $\mathcal{K}_1$ – модельный компаньон класса $\mathcal{K}$ и $\forall K \in \mathcal{K} \forall L \in \mathcal{K}_1$ $(K \subseteq L \Rightarrow [\exists p_1 \in X(L) \exists p \in X(K)$ $(p \supseteq p_1 \cap K) \cap \forall k \in K$ $((\exists e \in p_1$ $(e \cdot k=k)) \Rightarrow \exists e \in p$ $(e \cdot k=k))])$.

Теорема 13. Пусть выполняются следующие условия на теории Φ, Φ_0 и класс $\mathcal{K}_0$ колец:

$$\{K \mid \{K_p\} \models \Phi_0 \cap (\Phi_0'+\Phi_1+\Phi_2)_K\} \subseteq \mathcal{K}_0 \subseteq \{K \mid \{K_p\} \models \Phi_0\},$$

а $\mathcal{K} \rightleftharpoons \{K \mid \{K_p\} \models \Phi\}$ и класс $\mathcal{K}_0$ – слабый модельный компаньон класса $\mathcal{K}$. Если $\Phi \nvdash \Phi_3$ и $\Phi_0 \nvdash \Phi_3$, то теория Φ_0 – модельный компаньон теории Φ.

Например, отсюда получаем: класс всех строго регулярных колец не имеет слабого (обычного) модельного компаньона $\mathcal{K}_0$, если $\Phi_0 \vdash \Phi_3$ (соответственно, если $\Phi_0 \vdash$ "простое").

Модельная полнота часто влечет полноту; примером такого сорта результата является теорема 14.

Назовем 1-примитивной такую примитивную формулу, в которой не более одного неравенства. Теория T "разрешает класс Σ замкнутых формул", если $(T\vdash\varphi)$ или $(T\vdash\neg\varphi)$ для всех φ из Σ.

Теорема 14. а) Пусть теория Φ разрешает класс всех 1-примитивных замкнутых формул и для любого кольца K из класса $\mathcal{K} \leftrightharpoons \{K \mid (K_p)\models\Phi\}$ множество B(K) бесконечно. Тогда теория $\mathrm{Th}\mathcal{K}$ разрешает все E-замкнутые формулы.

б) Пусть теория Φ имеет модельный компаньон Φ^*. Если $\mathcal{K}^*_\Phi$ – булево абсолютный класс и теория Φ^* разрешает класс всех 1-примитивных замкнутых формул, то класс $\mathcal{K}^*_\Phi$ аксиоматизируем и его теория $\Phi_1+\Phi_2+(\Phi^*)'$ – полная, модельно полная и хорнова.

Приведем пример возможного перехода от "локальной" теории Φ к "глобальной" теории $\Phi'+\Phi_1$ (обычно существенно более общей, чем теория Φ).

Теорема 15. Если в теории Φ выводима формула φ, то в теории $\Phi'+\Phi_1$ выводима формула (в языке колец) $(\varphi\neg)^\circ \cap (\varphi)^+$ (см. ниже).

Последняя формула определяется следующим явным переводом: классически преобразуем формулу $\neg\varphi$ к предваренной форме $\varphi\neg$, запишем (в языке колец) формулу $(\varphi\neg)^\circ$, выражающую $[\![\varphi\neg]\!]_{\mathcal{J}}=0$. Аналогично: запишем φ в предваренной форме и добавим $\neg\neg$ перед каждым квантором $\exists$ (эту формулу обозначим $\varphi\neg\neg$), запишем формулу (в языке колец) φ^+, выражающую $[\![\varphi\neg\neg]\!]_{\mathcal{J}}=1$.

Приложение, §§1–3 содержит краткие в историческом плане мотивировки рассматриваемых понятий и проблем.

Приложение, §4 содержит формулировки основных, по мнению автора, результатов этой работы.

В приложении, §5 обсуждается задача построения траектории по спецификации и описанию соответствующей сцены. А также обсуждается задача обобщенного описания. Приводятся интерпретации (в рамках понятий и результатов, изложенных в главах I–III) *и некоторых других основных представлений о* поведенческой системе.

Спецификация траектории $y=f(x)$ задается формулой $\psi \leftrightharpoons$

$\forall x \exists y P(x,y)$ языка колец (или языка упорядоченных колец). Например, спецификация может говорить, что траектория должна пересекать несколько указанных областей и не пересекать несколько других указанных областей некоторого пространства K^n; каждая область описывается в этом пространстве системой уравнений и неравенств (с параметрами), включающей, может быть, логические связки и кванторы. Кроме того, спецификация может выражать дополнительные требования к траектории типа перпендикулярности, параллельности, прямолинейности, монотонности ее участков; то, что траектория выходит из определенной области и оканчивается в определенной области. Можно также выразить условие, что траектория – полином фиксированной степени. Например, спецификация может требовать: найти полином фиксированной степени, который пересекает данное алгебраическое многообразие более m раз. Все эти требования спецификация выражает относительно каких-то операций $+,-,\cdot$ в пространстве K^n. Существует представление о том, что эти операции не фиксированы раз и навсегда и что в качестве таких (базовых) операций для разных классов задач следует выбирать разные операции. Эти операции описываются или аксиоматически (набором T их свойств, который может возникать в результате "наблюдений") или явными термами в языке более высокого уровня, чем язык колец. Таким образом, в первом случае спецификация принимает вид $[(T)_{+,-,\cdot} \Rightarrow (\psi)_{+,-,\cdot}]$, а во втором случае она принимает вид $(\psi)_{t,r,s}$, где термы t,r,s в языке теории множеств описывают соответственно три операции. Спецификация (задание на движение) должна сопровождаться обоснованием того, что существует хотя бы одна траектория, ей удовлетворяющая. Иными словами, сопровождаться выводом в языке высокого уровня формулы $[(T)_{+,-,\cdot} \Rightarrow (\psi)_{+,-,\cdot}]$ или формулы $(\psi)_{t,r,s}$. Сам по себе такой вывод может быть предметом поиска в полностью автоматическом или в интерактивном режиме. Результаты главы II позволяют в реальное время перейти от такого вывода к соответствующему интуиционистскому выводу, который (при определенных ограничениях) в свою очередь может быть преобразован в программу вычислимой функции $y=f(x)$ (или коэффициенты полинома $f(x)$).

Набор T свойств задается непосредственно или с помощью нижеуказанного "механизма обобщения входной информации Φ^*". Во втором случае вместо T употребляют обозначение T^* и $T^* \rightleftharpoons Th\mathcal{K}^*_\Phi$, где $\mathcal{K}^*_\Phi$ – "актуальная модель обстановки", см. ниже.

Поведенческая система функционирует дискретными тактами времени $1,\dots,n,\dots$ Актуальная модель обстановки $\mathcal{K}^*_{\Phi_n}$ описывает обстановку (во внешнем мире) на основе текущей входной информации Φ_n и с учетом прошлого опыта (поведенческой системы). Возможно следующее представление: поведенческая система имеет широкий набор "элементарных модулей" K, каждому из которых текущим образом приписывается вес $e_K \in B(K)$. Эти веса меняются по определенному правилу, которое отражает изменяющийся опыт. На n–ом такте образуется "модуль" $\mathcal{K}_{\Phi_n} \rightleftharpoons \{K \mid \forall p \in e_K \ (\Phi_n)_{K_p}\}$. Переход к локализации K_p соответствует переходу к уровню более близкому к входу–выходу поведенческой системы. Например, все K_p могут быть 4–мерными векторными пространствами, и тогда Φ_n может содержать все обычные элементы "физического" описания обстановки. Модуль $\mathcal{K}_{\Phi_n}$ часто весьма сложный и его удобно "апроксимировать модулем" $\mathcal{K}^*_{\Phi_n}$; при этом теория $T^* \rightleftharpoons Th\mathcal{K}^*_{\Phi_n}$ играет роль "обобщенного описания внешней обстановки" в момент n. На этой основе в §5 приложения уточняются представления об изменении весов, о целенаправленных действиях и т.д. Эта модель компъютерно реализуема.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Friedman H. The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic, The Journal of Symbolic Logic, v. 38, no 2, 1973, p. 315-319.

[2] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.– М.:Мир,1973.

[3] Grayson R. Heyting-valued models for intuitionistic set theory.- Lecture Notes in Mathem; v. 753. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979.-p.402-414.

[4] Любецкий В.А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества типа CA.– Доклады Академии Наук, 195, №3, 1970, с. 548–550.

[5] Кановей В.Г. Неразрешимые и разрешимые свойства конституант. Математический сборник, том 124 (166), №4(8), 1984, с. 505–535.

[6] Новиков П.С. О некоторых теоремах существования (1939).- В кн: Новиков П.С. Избранные труды. - М.: Наука, 1979, с. 127.

[7] Myhill J. Some properties of intuitionistic Zermelo-Frankel set theory, Lecture Notes in Mathematics, v. 337, 1971, p. 206-231.

[8] Šc̆edrov A. Intuitionistic set theory. In: "Harvery Friedman's Res. Found. Math.", Amsterdam, 1985, 257-284,

[9] Friedman H. Classically and intuitionistically provable recursive functions. In: Higher Set Theory, Lecture Notes in Mathematics, 669, Springer-Verlag, 1978, p. 21-27.

[10] Бернштейн И.А. О построении движений. М.: Медгиз, 1947, 255 с.

[11] Беркинблит М.Б., Чернавский А.В. Построение движения и метафора интеллекта. В сб.: Компъютеры и познание. М.: Наука, 1990, с. 22–41.

[12] Абдусаматов Р.М., Беркинблит М.Б., Фельдман А.Г., Чернавский А.В. Моторика и интеллект. В сб.: Интеллектуальные процессы и их моделирование, под редакцией Велихова Е.П. и Чернавского А.В..– М.: Наука, 1987.

[13] Беркинблит М.Б., Гельфанд И.М., Фельдман А.Г. Двигательные задачи и работа параллельных программ. В сб.: Интеллектуальные процессы и их моделирование Организация движения. М.: Наука, 1991, с. 37–54.

[14] IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics. Special issue on unmanned vehicle and intelligent robotic systems. Volume 20, №6, 1990.

[15] Макинтайр А. Модельная полнота//Справочная книга по математической логике, том 1., М.: Наука, 1982.–Гл.4.– С.141–182. (Английское издание этой работы: Macintyre A.

Model completeness. - In book: Handbook of mathematical logic.- North-Holland publishing company, Amsterdam-New York-Oxford, 1977, chapter 4, p. 139-180.

[16] Carson A.B. The model completion of the theory of commutative regular rings.- J. Algebra, 27, 1973, p. 136-146.

[17] Lipschitz L. Saracino D. The model companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements.- Proc. Amer. Math. Sos., 37, 1973, p. 381-387.

[18] Macintyre A. Model completeness for sheaves of structures.- Fund. Math., v. 81, 1973, p. 73-89.

[19] Weisspfenning V. Model completeness and elimination of quantifiers for subdirect products. J. Algebra, 28, 1973, p. 146-157.

[20] Neumann J. von. Continnous geometry.- N.Y.: Princeton, 1960.

[21] Goodearl K.R. Von Neumann regular rings.- London e.a.: Pitman, 1979.

[22] Carson A.B. Model completions, ring representations and the topology of the Pierce sheaf. Harlow: Longman, 1989, 107 p.

[23] Eklof P.C., Mez H.C., The ideal structure of existentially closed algebras., J. Symbol. Log., 50, №4, 1985, p. 1025-1043,.

[24] Eklof P.C., Mez H.C., Modules of existentially closed algebras. J. Symbol. Log., 52, №1, 1987, p. 54-63.

[25] Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. М.: Педагогика, 1972, 423 с.

[26] Веденов А.А. Моделирование элементов мышления. М.: Наука, 1988, 159 с.

[27] Вайнцвайг М.Н. Алгоритм обучения распознованию образов "Кора". В сб.: Алгоритмы обучения и распознования образов, М.: Сов. Радио, 1973.

[28] Handbook of Theoretical Computer Science, volume A: Algorithms and Complexity, volume B: Formal models and Semantics; The Mit Press Cambridge, Massachusetts, 1990.

[29] Вапник В.И., Червоненкис А.Я. Теория распознования образов Статистические проблемы обучения. М.: Наука, 1974, 415 с.

[30] Палютин Е.А. Спектр и структура моделей. В кн.: Справочная книга по математической логике, том 1. М.: Наука, 1982, Дополнение, с. 320-387.

[31] Macintyre A., Kreisel G. Constructive logic versus algebraization, I. The L. E. J. Brouwer-Centenary Symposium (Noordwijkerhout-1981). Stud., Logic, Foundations Math. 110, North-Holland, Amsterdam - N-Y, 1982, p. 217-260.

[32] Friedman H., Seress A. Applications of mathematics to theoretical computer science. Emerg. Synth. Sci.: Proc. Found. Workshops, Santa Fe Inst., Santa Fe, N.M., 10-11, Vol. 1, 1988, p. 10-117

[33] Friedman H. Necessary uses of abstract set theory in finite mathematics. Adv. Math., 1986, 60, №1, p. 92-12.

[34] Simmons H. The semiring of topologizing filters of a rings. Israel J. Math., 61, №3, 1988, p. 271-284.

[35] Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1991, 568 с.

[36] Логический подход к искусственному интеллекту От классической логики к логическому программированию. М.: Мир, 1990, 439 с.

[37] Ковальски Р. Логика в решении проблем. М.: Наука, 1990, 278 с.

[38] Вагин В.Н. Дедукция и обобщение в системе принятия решений. М.: Наука, 1988, 385 с.

[39] Нечеткие множества и теория возможностей. М.: Радио и связь, 1986, 406 с.

[40] Fourman M.P., Scott D.S. Sheaves and logic.- Lecture Notes in Mathem. v. 753. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979, p.302-401. .

Работы автора по теме диссертации.

[41] Любецкий В.А. О несуществовании эффективного неизмеримого множества.- В сб.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 4. М.: МО, 1977, с. 36-40.

[42] Любецкий В.А. Булевозначные расширения структур. В сб: Математические методы решения инженерных задач, вып. 6. М.: МО, 1979, с.67–81.

[43] Любецкий В.А. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса.– В кн: 6–ая Всесоюзная конференция по математической логике, Тбилиси, 1982, с. 98.

[44] Любецкий В.А. Алгебраические аспекты нестандартного анализа. -М., 1983.– Деп. ВИНИТИ, номер 9341-83 деп.

[45] Любецкий В.А. Пучки на гейтинговой алгебре: случай колец. -М., 1984.– Деп. ВИНИТИ, номер 3971-84 деп.

[46] Любецкий В.А. Булевозначный анализ алгеброических систем.– В кн.: 9 Всесоюзный симпозиум по теории групп. М.: 1984, с. 218.

[47] Любецкий В.А. Теоремы переноса и нестандартный анализ.– В кн.: Седьмая всесоюзная конференция по математической логике. Новосибирск, 1984.

[48] Любецкий В.А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа.– Доклады АН СССР, т. 280, №1, 1985, с. 38–41.

[49] Любецкий В.А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических системю.– Дополнение к кн: Джонсон П.Т. Теория топосов.–М.: Наука, 1986, с.376–433.

[50] Любецкий В.А. Интерпретация морфизмов алгебр Гейтинга в гейтинговозначном универсуме: Докл. на 8–ом конгрессе по логике, август 1987//Реф. журн. ВИНИТИ.– том 13, вып. 3, 1988, с.17.

[51] Любецкий В.А. Оценки и пучки. - Препринт ИППИ АН СССР, М., 1988, 64 страницы.

[52] Любецкий В.А. О некоторых применениях гейтинговозначного анализа, I. - Сборник работ конференции по компЪютерной логике, Таллинн, Институт кибернетики АН ЭССР, 1988, с. 58-75.

[53] Lyubetsky V.A. On some applications of Heyting-valued analysis, II.- Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, v. 417, 1988, p. 122-145.

[54] Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах

нестандартного анализа.- Успехи математических наук, т. 44, вып. 4(268), 1989, с. 99- 153. (Английский перевод в London Mathematical Society, Russian Mathematical Surveys, 1989, p. 37-112.

[55] Любецкий В.А. О вложимости классов моделей.- Всероссийская школа по основаниям математики и теории функций, Саратов, 1989, с. 52.

[56] Любецкий В.А. Локально аксиоматизируемые классы колец.- В кн.: Международная конференция по алгебре памяти А.И.Мальцева. Новосибирск, 1989, с. 72.

[57] Любецкий В.А. Интерпретации математических структур в гейтинговозначном универсуме.- В кн.: Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик, М.: Наука, 1989, с. 101-111.

[58] Lyubetsky V.A. Locally aximatizable classes of rings, Logic Colloquium'89, Berlin, ASL, 1989, p. 101.

[59] Любецкий В.А. Внутренние и локально аксиоматизируемые классы, пучковые пополнения.- В кн.: 10-я Всесоюзная конференция по логике и методологии науки, Минск, 1990, с.17-18.

[60] Любецкий В.А. Об одной гипотезе П.С.Новикова.- В кн.: Советско-Французский коллоквиум по теории моделей, Караганда, 1990, с. 23.

[61] Любецкий В.А. Модельная полнота теории и оценка формул.- Алгебра и логика, Новосибирск, т. 29, 1990, с. 15-28.

[62] Lyubetsky V.A. Heyting-valued analysis: P.S.Novikov's hypotheses.- Logic Colloquim'90, Helsinki, ASL, 1990, The Journal of Symbolic Logic, v. 31, p. 277.

[63] Любецкий В.А. Гейтинговозначный анализ: гипотеза П.Новикова. В сб.: Философские основания неклассических логик (Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФ АН СССР). М.: АН СССР, 1990, с. 105-119.

[64] Любецкий В.А. Интуиционистская теория алгебраических систем и нестандартный анализ.-Алгебра и Логика, Новосибирск, №3, 1991, с 320-332.

[65] Любецкий В.А. Теоремы переноса. Международная

конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова (Логика, универсальная алгебра. Прикладная алгебра.) Новосибирск, 1991, с. 77.

Отметим также две работы по смежной теме, не вышедшие из печати на данный момент:

[66] Lyubetsky V.A. Heyting-valued analysis: P.S.Novikov's hypotheses.- Mal'cev Conference Proceedings, volume 3, part VI.a (Logic), In Transc. Amer. Math. Sos., Adv. Math., 1991, 20 pp.

[67] Любецкий В.А. Переход от выводимости в классической теории множеств к выводимости в интуиционистской теории множеств для языка колец.– Алгебра и логика, Новосибирск, №6, 1991, 18 сс.

Любец

Подп. к печати 26·VII 1991 г. Ф.П.Л. 2,0 Тираж 110

Типография ОХО Миннефтегазпрома СССР. Зак. № 1789