котором момент, когда последнее из обслуживаемых требований покидает систему, минимален. При этом обслуживание протекает в условиях неопределенности, когда длительности обслуживания требований на стадиях не известны: для каждого требования и каждой стадии заданы лишь интервалы, которым принадлежат соответствующие длительности. Кроме того, на первых двух стадиях все требования имеют одни и те же интервалы длительностей обслуживания (относительно этих двух стадий все требования можно рассматривать как идентичные).

Задача представляет собой модель ситуации, возникающей при планировании работы цеха хлебо-булочных изделий.

В принятой в теории расписаний системе обозначений сформулированная задача может быть представлена как

$$F5(m_1, \ldots, m_5) \mid \text{no-wait, machine availability}, \;\; p_{ij} \in [p_{ij}^{\min}, \;\; p_{ij}^{\max}] \mid C_{\max},$$

где $F5$ обозначает систему обслуживания типа flow-shop с пятью стадиями, m_i — число идентичных приборов на стадии i, no-wait – обслуживание без задержек, machine availability указывает на неодновременную готовность приборов к работе, p_{ij} — длительность обслуживания требования j на стадии i, $p_{ij}^{\min}$ и $p_{ij}^{\max}$ — нижняя и верхняя границы возможных значений величины p_{ij}, а $C_{\max}$ — момент завершения обслуживание последнего требования.

Задача в детерминированном случае ($p_{ij}^{\min} = p_{ij}^{\max}$ для всех требований и всех стадий) является NP-трудной в сильном смысле.

Сочетание условия «без задержек» с неопределенностью длительностей обслуживания дает несколько нестандартный эффект: в отличие от многих задач теории расписаний в условиях неопределенности, эти условия влияют не только на значение целевой функции, но и на допустимость расписаний для рассматриваемой задачи. Указанная особенность существенно затрудняет применение таких типичных для условий неопределенности подходов, как принцип гарантированного результата, например.

Предлагается техника построения расписаний, являющихся допустимыми при любых возможных длительностях обслуживания требований, а также схема декомпозиции задачи и серия приближенных алгоритмов решения получающихся в результате декомпозиции подзадач.

О НУЛЯХ В МАТРИЦАХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
Большой Каретный 19, 1, ГСП-4 127994 Москва, Россия
slvstv@iitp.ru

Поиск точек минимума вещественного квадратичного многочлена на множестве вершин многомерного куба является алгоритмически трудной задачей [1, 2]. В этой работе получены ограничения на взаимное расположение нулей в матрицах квадратичных форм, достигающих минимума на большом множестве точек с координатами ± 1.

Симметричной матрице A порядка n сопоставлен простой неориентированный граф $G(A)$ с n вершинами, в котором вершины с номерами j и k смежные, если отличен от нуля матричный элемент $A_{jk} \neq 0$. Элементы на главной диагонали не влияют на вид графа. Вершину графа назовем точкой сочленения, если ее удаление увеличивает число компонент связности графа. Множество вершин графа независимое, если любые две из этих вершин не смежны.

Квадратичные формы от $(n+1)$ переменных, достигающие минимума на наибольшем по включению собственном множестве ±1-точек с таким свойством, соответствуют фасетам многогранника BQP_n из [3]. Размерность BQP_n равна $n(n+1)/2$. При этом пары противоположных ±1-точек соответствуют одной вершине единичного куба в n-мерном проективном пространстве. Симметричная матрица коэффициентов квадратичной формы определена фасетой многогранника BQP_n с точностью до изменения главной диагонали и умножения на положительное число. Граф такой матрицы однозначно определен фасетой.

Фасеты многогранников BQP_n при $n \leqslant 6$ вычислены программой lrs версии 4.2c [4] (см. также http://cgm.cs.mcgill.ca). У отрезка BQP_1 две фасеты; у симплекса BQP_2 четыре фасеты; у многогранника BQP_3 16 фасет; у BQP_4 56 фасет; у BQP_5 368 фасет; у BQP_6 116764 фасеты. Граф матрицы, определяющей фасету многогранника BQP_n при $n \leqslant 5$, либо полный, либо является объединением клики и одной или нескольких изолированных вершин. Но BQP_6 имеет фасеты с нетривиальным расположением нулей в определяющих матрицах. Некоторые фасеты многогранника BQP_6 нельзя задать матрицами ранга меньше трех; это тесно связано со свойствами корневой решетки E_6, рассмотренной, например, в [5].

Теорема. *Дана симметричная матрица A порядка $(n+1)$, определяющая фасету многогранника BQP_n. Удаление из графа $G(A)$ любого независимого множества его вершин не увеличивает число компонент связности. В графе $G(A)$ нет точек сочленения.*

Литература

1. Береснев В. Л. *Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных.* Новосибирск: Издательство института математики, 2005.
2. Емеличев В. А., Коротков В. В. *Об устойчивости лексикографического решения векторной минимаксной квадратичной булевой задачи* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 2. С. 26–36.
3. Padberg M. *The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives* // Mathematical programming. 1989. V. 45, no. 1–3. P. 139–172.
4. Avis D., Fukuda K. *A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra* // Discrete and computational geometry. 1992. V. 8, no. 1. P. 295–313.
5. Гришухин В. П. *Многогранники Вороного корневой решетки E_6 и ей двойственной* // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 2. С. 133–146.

ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПЛОТНЫХ РАСПИСАНИЙ В ЗАДАЧЕ OPEN SHOP

А.А. Сухорослов

Институт математики СО РАН
пр-т академика Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия
artem.sukhoroslov@gmail.com

В работе [1] рассматривалась задача теории расписаний Open Shop, которая может быть описана следующим образом. Дано m машин и n работ. Каждая работа J_i имеет m операций. На каждой машине M_j выполняется ровно одна операция работы J_i. O_{ij} — операция i-й работы на j-й машине, ее длина обозначается как p_{ij}, а момент начала — s_{ij}. Операции выполняются без прерываний. Никакие две операции одной работы не выполняются одновременно и каждая машина в любой момент времени выполняет не более одной операции.

Задача обозначается как $O||C_{\max}$ и заключается в построении расписания S минимальной длины $C_{\max}(S) = \max\limits_{i,j}(s_{ij} + p_{ij})$.

Определение. *Плотное расписание* — расписание, в котором каждая машина M_j может простаивать в некоторый момент времени тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно: либо операция $O_{i,j}$ завершилась раньше этого момента, либо некоторая операция $O_{i,k}$ $(k \neq j)$ выполняется в этот момент на другой машине.