Информационные процессы, Том 8, № 4, 2008, стр. 201–204.

О квадратичных формах, равных единице на большом множестве вершин n-мерного куба[1]

А.В. Селиверстов, В.А. Любецкий

Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 30.10.2008

Аннотация—В работе рассмотрены свойства вещественных квадратичных форм, которые принимают значение единица на достаточно большом множестве вершин многомерного куба с центром в начале координат (то есть недиагональные элементы соответствующей матрицы определены этим множеством вершин) и не разделяют вершины куба (например, если значения формы не больше единицы на каждой вершине куба).

В общем случае поиск вершины куба, минимизирующей значение квадратичной формы, является трудной вычислительной задачей. Однако знание верхней оценки на ранг квадратичной формы позволяет применять алгоритмы, эффективно работающие для форм маленького ранга. С другой стороны данная работа является вкладом в исследования свойств матриц, чьи недиагональные элементы фиксированы с точностью до общего ненулевого множителя, а диагональные могут меняться. Близкие задачи рассмотрены в обзоре [1]. К ним относится, например, задача определения минимального ранга матрицы для данного графа.

Графом симметричной $n \times n$ матрицы A называется простой неориентированный граф $G(A)$ с n вершинами, причём для любой пары различных индексов i-я и j-я вершины смежны, если элемент матрицы $A_{ij} \neq 0$. При этом граф не зависит от значений диагональных элементов матрицы.

Напомним теорему Фидлера (Miroslav Fiedler) о трёхдиагональных матрицах, [2]. Отметим, что эта теорема была обобщена на другие поля, исключая поле из трёх элементов, [3].

Теорема 1 (Фидлер). *Пусть вещественная симметричная $n \times n$ матрица A такова, что для любой диагональной вещественной матрицы D ранг суммы $\operatorname{rank}(A + D) \geq n - 1$. Тогда существует такая матрица перестановки P, что матрица $P^T AP$ трёхдиагональная и неразложимая.*

Кубом, или точнее n-мерным ±1-кубом, называется многогранник, вершинами которого являются точки с координатами ±1. Диагональную матрицу коротко обозначаем $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Множество M вершин ±1-куба называется *жёстким*, если для любых вещественных чисел $d_1, \ldots, d_n$ существует единственная симметричная матрица A, на главной диагонали которой стоят $d_1, \ldots, d_n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\{V^T AV = 1 | V \in M\}.$$

Пусть A – симметричная матрица порядка n, X – столбец переменных. Квадратичная форма $X^T AX$ называется *жёсткой*, если множество тех вершин ±1-куба, где значение формы равно единице, является жёстким.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта МНТЦ 3807.

Лемма 1. *Пусть $n \geq 3$. Если квадратичная форма жёсткая, то на каждой из $2n$ сторон n-мерного куба форма принимает значение единица в не менее чем $\frac{n(n-1)}{2}$ вершинах; более того, аффинная оболочка этих вершин имеет размерность $n-1$, то есть включает целиком сторону куба.*

Доказательство. Заметим, что значения квадратичной формы в вершинах V и $-V$ совпадают. Поэтому значения формы определяются её значениями в вершинах, лежащих на одной произвольно выбранной стороне куба. В силу жёсткости, коэффициенты формы должны удовлетворять $\frac{n(n-1)}{2}$ линейно независимым соотношениям, каждое из которых соответствует вершине выбранной стороны куба. Следовательно, число таких вершин не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$. Если бы эти вершины лежали в аффинном подпространстве размерности $n-2$, то среди соответствующих соотношений на коэффициенты формы было бы не более $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ линейно независимых. Однако при $n \geq 3$ выполнено строгое неравенство

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} < \frac{n(n-1)}{2}. \ \square$$

Лемма 2. *Если матрица A не является диагональной, то подмножество M вершин куба, в которых значение формы $X^T AX$ равно единице, собственное и либо жёсткое, либо может быть расширено до жёсткого.*

Доказательство. Легко видеть, что если подмножество M несобственное, то есть состоит из всех вершин куба, то матрица A является диагональной.

Предположим, что множество M не является жёстким. Поскольку множество M не собственное, оно определяет вырожденную систему линейных уравнений на элементы матрицы A. Добавляя одну новую вершину к множеству M, мы увеличим ранг соответствующей системы не более чем на единицу. Минимальное расширение M, при котором ранг системы достигнет максимального значения, будет жёстким. $\square$

Жёсткая квадратичная форма *разделяет* вершины куба, если найдутся такие две вершины, что в одной из них значение формы строго больше единицы, а в другой – строго меньше.

Теорема 2. *Если квадратичная форма $X^T(A \oplus B)X$ жёсткая и не разделяет вершины ± 1-куба размерности $n \geq 3$, то одна из матриц A или B является диагональной. Иными словами, граф $G(A \oplus B)$ имеет не более одной компоненты связности, отличной от изолированной вершины.*

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что единица является максимальным значением формы $X^T(A \oplus B)X$ на вершинах куба. Обозначим M множество вершин, в которых значение равно 1. Поскольку формы $X^T(0 \oplus B)X$ и $X^T(A \oplus 0)X$ зависят от разных переменных, они независимо достигают максимальных значений α и β на вершинах куба. При этом $\alpha + \beta = 1$, следовательно, хотя бы одно из чисел α или β ненулевое. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда для каждой вершины $V \in M$ значение $(1/\alpha)V^T(A \oplus 0)V = 1$. По лемме 2 если матрица A не является диагональной, то подмножество вершин куба, в которых $(1/\alpha)V^T(A \oplus 0)V = 1$, может быть расширено до жёсткого. Тогда в силу жёсткости множества M недиагональные элементы матриц $A \oplus B$ и $(1/\alpha)(A \oplus 0)$ совпадают. Следовательно, матрица B диагональная. $\square$

Теорема 3. *Если квадратичная форма $X^T AX$ жёсткая и не разделяет вершины ± 1-куба размерности $n \geq 3$, то после удаления из графа $G(A)$ одного ребра вновь получится граф с тем же числом компонент связности.*

Доказательство. Предположим, что удаление одного ребра разбивает некоторую компоненту связности графа $G(A)$ на две. Можно считать, что единица является максимальным значением формы X^TAX на вершинах куба (поскольку форма не разделяет вершины), а матрица A (с точностью до перенумерации координат) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & S \\ S^T & C \end{pmatrix},$$

где B и C – квадратные симметричные матрицы размеров $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$, а прямоугольная матрица S имеет единственный ненулевой элемент.

Предположим, что единственный ненулевой элемент в матрице S положительный и соответсвует элементу A_{ij}. Индексы $i \leq k$, $j \geq k+1$. Квадратичная форма X^TAX достигает максимального значения на таких вершинах V, что значения координат $V_i = V_j$. Действительно, предположим обратное: на некоторой вершине V значение формы $V^TAV = 1$ и $V_i = -V_j$. Рассмотрим вершину W с координатами $W_\ell = -V_\ell$ при $1 \leq \ell \leq k$ и $W_\ell = V_\ell$ при $k+1 \leq \ell \leq n$. Значение формы $W^TAW = V^TAV + 2A_{ij} > 1$. Это противоречит предположению о максимальности значения единица.

Таким образом, форма достигает значение единица в вершинах, лежащих на гиперплоскости $X_i = X_j$. Это противоречит лемме 1.

В случае, когда единственный ненулевой элемент в матрице S отрицательный, форма достигает значение единица в вершинах, лежащих на гиперплоскости $X_i = -X_j$. Это также противоречит лемме 1. $\square$

Теорема 4. *Если квадратичная форма X^TAX жёсткая и не разделяет вершины ± 1-куба размерности $n \geq 3$, то найдётся такая диагональная матрица D, что ранг суммы матриц $\mathrm{rank}(A+D) \leq n-2$.*

Доказательство. Если матрица A перестановочно подобна трёхдиагональной матрице, то её граф $G(A)$ является незамкнутым путём. Это невозможно по теореме 3. В силу теоремы Фидлера 1 найдутся числа $d_1, \ldots, d_n$ для которых матрица $A + \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ имеет ранг не больше $n-2$. $\square$

Теорема 4 непосредственно не может быть обобщена на случай поля комплексных чисел, поскольку оно не является линейно упорядоченным. Косвенным подтверждением возможности значительно снизить ранг недиагональной комплексной матрицы, меняя главную диагональ, служит такой факт: если разрешить подставлять на главную диагональ матрицы произвольные комплексные числа, можно получить матрицу, у которой только лишь одно собственное значение (с учётом кратности) отличается от нуля. Но комплексная симметричная матрица может оказаться недиагонализуемой; тогда число ненулевых собственных значений меньше ранга. Именно так бывает для неразложимых трёхдиагональных симметричных матриц. Сформулируем теорему.

Теорема 5. *Для любой квадратной комплексной матрицы A порядка $n \geq 2$ существуют такие комплексные числа $d_1, \ldots, d_n$, что нуль является $(n-1)$-кратным собственным значением для матрицы $A + \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство матриц вида

$$\{uA + \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \mid u, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}\}.$$

Каждой такой матрице сопоставим характеристический полином

$$x^n + F_{n-1}x^{n-1} + \dots + F_1 x + F_0 = \det(-uA + \mathrm{diag}(x - d_1, \dots, x - d_n)),$$

коэффициенты которого F_k являются формами от параметров $u, d_1, \dots, d_n$. В частности,

$$F_{n-1} = -d_1 - \dots - d_n - u \operatorname{tr} A.$$

Согласно теореме Гильберта, любые $n \geq 2$ формы над $\mathbb{C}$ от $n+1$ переменной имеют общий нуль, отличный от начала координат, [4]. В частности, система уравнений

$$\begin{cases} F_{n-1} - u = 0 \\ F_{n-2} = 0 \\ \dots \\ F_1 = 0 \\ F_0 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение $\check{u}, \check{d}_1, \dots, \check{d}_n$.

Предположим, что $\check{u} = 0$. Тогда $F_0(\check{u}, \check{d}_1, \dots, \check{d}_n) = \dots = F_{n-1}(\check{u}, \check{d}_1, \dots, \check{d}_n) = 0$. Поэтому характеристический полином матрицы $\mathrm{diag}(\check{d}_1, \dots, \check{d}_n)$ равен x^n. Это означает, что все числа $\check{d}_1 = \dots = \check{d}_n = 0$. Но решение $\check{u}, \check{d}_1, \dots, \check{d}_n$ ненулевое. Противоречие доказывает, что система имеет решение при $u \neq 0$. Из однородности следует, что есть решение при $u = 1$. Соответствующие ему значения $d_1, \dots, d_n$ удовлетворяют требованию теоремы. □

Авторы благодарны К.Ю. Горбунову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fallat S.M., Hogben L. The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: a survey. *Linear algebra and its applications*, 2007 , vol. 426, pp. 558–582.

2. Fiedler M. A characterization of tridiagonal matrices. *Linear algebra and its applications*, 1969, vol. 2, pp. 191–197.

3. Bento A., Duarte A.L. On Fiedler's characterization of tridiagonal matrices over arbitrary fields. *Linear Algebra and its applications*, 2005, vol. 401, pp. 467–481.

4. Прасолов В.В. *Многочлены.* М.: МЦНМО, 1999, теорема 25.10.