МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. К.Д.УШИНСКОГО»
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ
XII МЕЖДУНАРОДНЫХ
КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2014

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я43478
Т782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Труды XII международных Колмогоровских чтений : сборник статей. –
Т 782 Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2014. – 465 с.
ISBN 978-5-87555-963-1

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей XII Международных Колмогоровских чтений (2014 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-87555-963-1

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А. Н. Колмогоров и модернизация математического образования в России

Любимый ученик великого учителя. Об академиках В. И. Арнольде и его учителе А. Н. Колмогорове

А.Д. Белова

Доклад посвящён выдающемуся учёному широчайшего диапазона, одному из великих математиков XX (начала XX1) века Владимиру Игоревичу Арнольду и его учителю академику Андрею Николаевичу Колмогорову; единству учителя и ученика с точки зрения высоких духовно-человеческих качеств.

12 июня 1987 года отмечали 50-летие со дня рождения Владимира Игоревича Арнольда.

В.М. Тихомиров, профессор Мехмата МГУ, доктор физ-мат наук вспоминает: «…Я спросил у А.Н. Колмогорова, не хочет ли он что-нибудь сказать своему ученику. Андрей Николаевич сразу же стал диктовать. Слова давались ему с трудом: уже несколько лет ужасный недуг – болезнь Паркинсона – сковывал его речь. Но разум его оставался ясным…»

Об Арнольде:

« Если бы мне было позволено, то я перед всеми столпами нашего факультета высказал своё убеждение в том, что происходит чествование Первого советского математика – не только по силе полученных результатов, но и по темпераменту личности, по способности воспринимать новое и смелости в преодолении препятствий.

В Арнольде меня всегда поражала неограниченная активность: если птицы, то знать всех птиц; если купание в холодной воде, то без ограничения времени; если на лыжах, то … километров 60-70 – это для него обычные прогулки, самые заурядные дистанции и преодолеваются они в одних плавках ... Это такой всегдашний избыток сил…

Обо всём, что угодно, его можно расспросить, и обнаружатся очень широкие знания.

А. Колмогоров» *13.06.1987 г.*

Послание учителя ученику замечательным образом характеризуют обоих: Владимира Игоревича, личность и творчество которого получили столь восторженную и проницательную оценку, и самого Андрея Николаевича, стоявшего на пороге смерти (через четыре месяца его не стало), но сохранившего запас душевной щедрости и способности восхищаться.

Это было последнее выступление Андрея Николаевича в его жизни. Но оно не воспринимается как прощание. Это – благословение».

Пройдут десятилетия, столетия …, и то, что открыл Арнольд в науке, его задачи, теоремы будут изучать, решать, доказывать… Но никто, кроме нас, учившихся вместе с Арнольдом на Мехмате МГУ, ходивших с ним в походы, убиравших с ним целинный урожай, кроме его друзей, учеников – всех нас, живущих сейчас, уже не сможет рассказать о нём, каким он был в жизни. Мы попытались это сделать в пятой книге серии «Мы -

математики и с Ленинских гор» – «В.И. АРНОЛЬД».. Все его друзья, коллеги всегда называли его просто Димой.

Сейчас, когда с нами рядом нет Димы, выдающегося математика широчайших знаний, прекрасного педагога, ощущая его значение и необходимость общения с ним, хочется, чтобы люди знали, как происходило формирование яркой личности учёного.

Детство

Владимир Игоревич родился в Одессе в семье математика, окончившего в 1929 г. Московский университет, ставшего прекрасным педагогом, первым доктором педагогических наук в СССР, членом-корреспондентом АПН РСФСР; с 1930 по 1947 г. работал в Московском университете.

Четыре поколения родных Димы были связаны с математикой.

Среди родственников по отцу немало тех, кто служил в Черноморском флоте, были пять адмиралов. Мама В.И. Арнольда (искусствовед) была племянницей выдающегося физика Л.И. Мандельштама.

Дома у Арнольдов нередко собирались учёные, высокообразованные люди, общение с которыми оказало большое влияние на мальчика; появилась любознательность, которая привела к тому, что он в свои шесть лет уже хорошо знал все улицы центра Москвы, а в семь лет, прихватив с собой младшего брата и компас, измерил шагами Садовое кольцо.

Выдающийся математик, основоположник кибернетики А. А. Ляпунов организовал у себя дома добровольное научное общество ДНО для детей, в котором дети делали для себя много открытий, например, почему Земля похожа скорее на репу, а не на лимон. Там Дима открыл для себя интерференцию волн и сделал об этом свой первый в жизни доклад, используя стакан с водой.

«Ещё бы, - кто-то может сказать, - при такой родословной и таких покровителях не стать великим учёным». Но отец Димы умер, когда мальчику было 11 лет, и он остался главным помощником мамы - в семье были ещё младший брат и годовалая сестрёнка.

Дима учился в обыкновенной московской пятьдесят девятой школе, где замечательным учителем математики был Иван Васильевич Морозкин. Одну из задач, предложенных ему учителем, двенадцатилетний мальчик обдумывал весь день, «и решение, - писал он спустя многие годы, - снизошло на меня, как откровение. Испытанный мною тогда (1949 г.) восторг был в точности тем же, который я испытывал при решении гораздо более серьезных проблем».

В школьные годы Дима стал принимать участие в математическом кружке МГУ и в московских математических олимпиадах. Дима обычно получал вторую премию, а первую – Саша Кириллов. Это были два самых одарённых студента, окончивш школу с золотыми медалями, по собеседованию поступившие в 1954 г. на Мехмат университета.

МГУ, студенческие годы и первые результаты научной деятельности

То была пора расцвета механико-математического факультета. «Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде, - писал впоследствии В.И. Арнольд; при этом им были названы имена А.Н. Колмогорова, И.М. Гельфанда, И.Г. Петровского, Л.С. Понтрягина, П.С. Новикова, А.А. Маркова, А.О. Гельфонда, Л.А. Люстерника, А.Я. Хинчина и П.С. Александрова; - тогда он (А. Н. Колмогоров) был деканом механико-математического факультета... Уровня, которого достиг тогда факультет, благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и я мог бы назвать очень известных сейчас математиков, которых он тогда спас от исключения из Университета. Снимая буйного студента со стипендии, этот декан сам же тайком помогал ему пережить трудное время. От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента…»

Уже на первом курсе Дима и Саша пощли в семинар аспиранта Толи Витушкина (в будущем академика РАН). У участников заранее не предполагалось никаких предварительных знаний. Давались только определения и формулировки задач. Участники семинара заново переоткрывали основные факты вещественного анализа, включая меру Лебега, дифференцируемость почти всюду монотонных функций...

Летом, после первого курса, большинство студентов поехало в село Троицкое под Москвой помогать колхозу справиться с сельскохозяйственными работами. Дима бросал вилами сено в стог. Весело и высоко взлетали его вилы с сеном. «Казалось, в Диме жила и била через край не только великая любовь к математике, но и безмерная любовь к физическому труду. Это привело, в частности, к тому, что он аккумулировал огромный запас знаний, и не только математических, ещё в бытность студентом. Он восхищался чужими математическими достижениями не меньше, чем своими. Узнавая чей-нибудь результат, его поражающий, он немедленно заявлял: «Это должны знать все!» - вспоминает А. Архангельский, однокурсник Арнольда (затем профессор МГУ).

На втором курсе Дима руководил в МГУ одной из секций школьного математического кружка. В 1957 и 1958 годах в серии «Математическое просвещение» бала опубликована статья Д. Арнольда «Два занятия школьного кружка при МГУ». Сразу было отмечено, что статья второкурсника написана рукой зрелого мастера, воодушевлённого красотой математики.

После второго курса по призыву Комсомола большая группа студентов Мехмата по собственному желанию поехала убирать целинный урожай в Южный Казахстан. Дима, Саша и ещё несколько юношей освоили управление трактором, комбайном, встали за штурвалы и намолачивали по 20 центнеров пшеницы с гектара. По ночам Дима рассказывал о созвездиях, учил находить звёзды. Он прекрасно знал звёздное небо.

На заработанные деньги Дима, Саша с друзьями путешествовали по Средней Азии. Эти путешествия были началом многих других, составивших десятки тысяч километров.

Студенты в то время очень увлекались туризмом, и в первых рядах чаще всего был Дима Арнольд, считавшийся самым опытным туристом – будь то пеший поход, байдарочный или лыжный. Ловко спускался на лыжах по горным склонам, летом собирал и ремонтировал байдарки, очень хорошо ориентировался по картам, выбирая маршрут.

Третий курс. Начало открытий и преподавание

А.Н. Колмогоров, объявил свой семинар, который стал посещать и Д. Арнольд. Андрей Николаевич сказал, что можно «помечтать» о том, чтобы найти подходы к решению поставленной Гильбертом 13-й проблемы. Он доказал, что непрерывные функции многих переменных можно свести к функциям трех переменных. А можно ли обойтись двумя переменными? Об этом подумать он предложил своим ученикам.

В апреле 1957 года на стол Колмогорова легла ученическая тетрадка – курсовая работа студента третьего курса Д. Арнольда. В курсовой работе была решена тринадцатая проблема Гильберта. Эта работа Арнольда сделала его имя известным всему математическому миру.

(Когда-то и А.Н. Колмогоров тоже в 19 лет стал известен всему математическому миру, построив ряд Фурье, расходящийся почти всюду).

Затем началась череда открытий, само перечисление которых заняло бы несколько страниц. Арнольд оказался в центре внимания математического мира, воплощал собой с необычайной силой и яркостью молодую любовь к математике. Это впечатление усиливалось его внешними качествами: быстротой движений и реакций, прекрасной физической формой.

После третьего курса вновь студенты поехали помогать собирать урожай, теперь уже на Алтай. Дима был оставлен на Всемирный Фестиваль молодёжи и студентов (июль 1957 г.) в группе молодых учёных. Он легко общался с иностранцами, т.к. владел несколькими языками. Но после фестиваля ему и ещё нескольким студентам по их просьбе разрешили поехать на целину второй раз вместе с младшим курсом в сентябре и октябре.

В книге «Владимир Игоревич Арнольд Избранное- 60» Дима приводит несколько писем А.Н. Колмогорова, по которым можно судить, насколько доверительно, дружески осуществляется диалог учителя с учеником.

«Кисловодск. 31-5-57. ... Вы ещё не ответили мне насчёт кружка или семинара для первого курса. Без Вас я все же ничего открывать для 1-го курса не буду, так как моя программа и так состоит из 1) более активного, чем в прошлые годы, руководства нашим постоянным семинаром кафедры теории вероятностей, 2)регулярных собраний сотрудников и аспирантов стекловского института и кафедры по различным прикладным работам,...3) курса «случайные процессы», ...5)семинара с В. Тихомировым для 3-го и 4-го курса по избранным вопросам теории вероятностей и комбинаторике…Тем не менее мое обещание еженедельно бывать на кружке или семинаре… и приносить туда достаточно задач, а также уберегать Вас от возможного уклона в сторону приучения… мальчиков… к безответственной… болтовне, я берусь…»

*... Я считаю формальную строгость **обязательной** и думаю, что в конечном счёте после большой (и обычно полезной для **окончательного** понимания) работы она всегда может быть соединена…с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этих идеалов, это строго требовать логической отчётливости даже там, где она пока обременительна…»*

(Удивительно, через много лет нескольким из нас, однокурсникам Димы, удалось услышать от него то же самое (о чём писал Колмогоров А.Н.) во время доклада одного молодого учёного, к которому обращался Арнольд).

15 апреля 1958, Париж. ... Погода была крайне капризная, каждый день по нескольку раз шёл снег… По проложенному следу я проделал весь… маршрут… раза три… под крупными хлопьями снега (не вызывавшими, впрочем, никакого желания надевать одежду сверх трусов)… Сейчас уже прочел две лекции после пасхального перерыва, завтра делаю доклад на вероятностном семинаре. ...»

Этот фрагмент письма привожу потому, что… (улыбнёмся) вот и Арнольд бегал на лыжах так, как его учитель, т.е. в одних плавках.

Ученики, как правило, становятся похожими на своих учителей в некоторых характерных чертах. «Все ученики Колмогорова копировали его жизнь, - вспоминает ученик Колмогорова В.В. Козлов,- но больше всех, лучше всех, отчётливее и ярче получилось это у Первого ученика – Арнольда. Когда он выступал с докладами, то чувствовалась манера Колмогорова… На лыжне - и его взмахи палками, и остановка, и начало разговора, и рисунки на снегу… опять же Колмогоровские…»

В своей дипломной работе Арнольд далеко развил один Колмогоровский метод в теории динамических систем. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах выдающегося математика Юргена Мозера. Теория, построенная этими тремя математиками, получила название «КАМ» - Колмогоров-Арнольд-Мозер. Она нашла многочисленные приложения к математике, механике, космологии и физике.

Дальше, конечно, аспирантура. Руководитель у Димы академик А.Н. Колмогоров.

Арнольд не раз говорил, что разговаривать о чём угодно с А.Н. Колмогоровым было очень интересно, да и отношение учителя к ученику было очень внимательным и тёплым. В разговоре с кем-то, если речь заходила о каких-то задачах, темах, связанных с А.Н. Колмогоровым, Дима часто говорил: «Мой дорогой учитель».

Ректор МГУ И. Г. Петровский предложил друзьям Арнольду и Кириллову закончить аспирантуру досрочно и поступить в МГУ на работу в качестве ассистентов, и с осени 1961 г. они начали трудовую деятельность на Мехмате. Оба в 26 лет защитили докторские диссертации. В 1962 году на Международный математический конгресс в Стокгольм (Швеция) была послана делегация математиков из 50 человек, в которой Д. Арнольд, С. Кириллов входили в группу самых молодых учёных.

В 1963 году по инициативе А.Н. Колмогорова была организована первая летняя математическая школа для учащихся старших классов СССР. В Красновидово под Москвой в дом отдыха МГУ в августе 1963 года приехало 40 школьников из числа победителей и призеров 3-й Всероссийской математической олимпиады, закончивших 9-е и 10-е классы. Школа была организована на высоком научном уровне. Для преподавания А.Н. Колмогоров пригласил своего друга академика П. С. Александрова, а также несколько своих учеников. Среди них был и В.И. Арнольд. Он прочитал первый курс, рассчитанный на продвинутых школьников, и сразу стал большим авторитетом для учащихся.

2 декабря 1963 г. в Москве при МГУ открылась Физико-математическая школа. Туда были зачислены первые 19 человек, успешно сдавшие зачёты по завершении летней школы. Арнольд стал одним из преподавателей этой школы. Уроки проходили в очень живой атмосфере, поддерживающейся благодаря острым репликам и шуткам Арнольда.

Выпускники ФМШ становились студентами Мехмата, некоторые из них затем – учениками и аспирантами Арнольда.

У Димы сохранились письма Андрея Николаевича 60-х годов. Тёплые, интересные. Чувствуется, что, находясь в разлуке, оба нуждались в общении друг с другом. Письма объёмны, насыщены интересными фактами. Приведу несколько фрагментов из одного письма.

Москва, 28 марта 1965.

«…Был очень рад получить Ваше письмо от 14 февраля по возвращении с Кавказа, куда я уехал 5 марта и оттуда вернулся 23-го. Ездили мы впятером (Дима Гордеев, Леня Бассалыго, Миша Козлов и Пер Мартин-Лёв – двадцатидвухлетний мой шведский стажер). В Бакуриани сначала шесть дней шел снег, что не мешало нам путешествовать кругом. Вдвоем с Пером мы, в частности, преодолели большой спуск в Цагвери по ущелью Черной речки. Дима же Гордеев упорно тренировался по восемь часов в сутки на слаломной горке. Потом приехал С.В. Фомин и привез солнечную погоду. В первый же солнечный день мы пошли на склоны местного хребтика Цхара-Цхара, и там за три часа на высоте около 2400 все мои мальчики так обожглись (гуляя в плавках ...), что две следующие ночи даже не спали как следует. В четвертый солнечный день мы прошли упомянутый хребтик (высотою в 2800) по верху,…. В Тбилиси я, Миша Козлов и Мартин-Лёв делали доклады… в Кинцвисси – недалеко от Гори на склонах Триалетского хребта… имеется ... замечательная роспись начала 13 в., впечатление от которой,… сравнимо с впечатлением от Дионисиевых фресок в Ферапонтове….

Я несколько скуп на усилия по изучению вещей, в которых не предполагаю проявлять того, чтобы с пониманием слушать обзорные доклады… У моих молодых друзей… часто бывает непонимание неизбежных возрастных отличий, такое же, как при желании научить меня непременно кататься на велосипеде или на водных лыжах.

Но склонности отрицать объективный интерес и значительность новых направлений… я за собой не наблюдаю. ... иногда даже активно поддерживаю и рекомендую для изучения молодым вещи, которые по общему впечатлению кажутся мне значительными и перспективными…

Дима говорил, что Андрей Николаевич всегда предполагал в собеседнике равный себе интеллект…Вероятно, именно поэтому замечательные лекции Андрея Николаевича были столь непонятными для большинства студентов. Для математических работах Андрея Николаевича, - говорил Арнольд, - характерно то, что он является пионером и первооткрывателем во многих областях, решая порой двухсотлетние проблемы.

<u>Математические открытия</u> Арнольда В.И. трудно перечислить. Им были преобразованы целые математические области. Например – «теория особенностей». Эта теория описывает скачкообразные изменения в окружающих нас процессах, которые происходят при медленных, плавных изменениях параметров, характеризующих процесс.

Такие резкие изменения называются иногда катастрофами, а сама теория – «теорией катастроф», которую основательно описал Арнольд в книге с таким названием.

Арнольд далеко продвинул особый раздел современной геометрии, так называемую симплектическую геометрию, и заложил новое направление в топологии, получившее фундаментальное развитие. Он был выдающимся геометром; занимался алгеброй и теорией чисел, комбинаторикой, логикой и основаниями математики, словом, его творчество охватило почти все разделы современной математики.

Велики его достижения в естествознании - в гидродинамике, космологии, теории потенциала. С увлечением и убежденностью В.И. Арнольд развивал и пропагандировал идеи Пуанкаре о том, что математика - это часть естествознания. Арнольд ощущал математику как единое целое. Она была для него естественной частью окружающего нас прекрасного мира. Чувство гармонии, ощущение красоты и единства мира присущи всем работам Арнольда.

Саша Кириллов (Александр Александрович – 33 года профессор Мехмата МГУ) отмечает завораживающий стиль Арнольда, в котором написаны его учебники и обзорные статьи. «Особенно замечательны… небольшие популярные книжки, которых Дима написал много в последние годы его жизни: …«Жёсткие и мягкие математические модели», 2000; «Цепные дроби», 2001; «Задачи для детей от 5 до 15 лет», 2004; …«Что такое математика?», 2008; … «Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора)», 2009…

Эти книги - не только незаменимое пособие для школьников, студентов и аспирантов, но и очень полезное чтение для взрослых математиков. Я думаю, что со временем влияние этих публикаций на современную математику окажется сравнимым с влиянием чисто научных результатов Арнольда… В одной из книжек… Дима отметил, что радуга - одно из самых красивых и часто наблюдаемых физических явлений - объясняется законами отражения и преломления света в капле воды. В то же время, этот факт мало известен математикам, хотя он может отлично служить для иллюстрации и пропаганды математического анализа среди неспециалистов… Дима был редким примером универсального учёного-естествоиспытателя …».

В.И.Арнольд был удостоен множества премий, званий, докторских степеней.

Среди премий - премия Московского математического общества (1958), Ленинская премия (1965), вместе с А.Н.Колмогоровым), Крафоордская - Шведской академии наук (1982)… премия Жунь Жуньшоу (2005) (ее называют Нобелевской премией Востока), … Государственная премия Российской Федерации (2008). За громадный вклад Арнольда в теорию, позволяющую оценивать движение космических тел, Международный Астрономический Союз в 2000 году присвоил малой планете №10031 его имя Vladarnolda.

Арнольд имеет почётные докторские степени нескольких университетов: в Париже (Пьера и Марии Кюри), в Торонто, в Мадриде… состоит членом трёх американских академий, французской, Европейской и некоторых других.

Общая одарённость личности Арнольда проявлялась в самых разнообразных его увлечениях. Он необычайно много читал и массу прочитанного помнил в деталях. Он помнил множество событий, их участников, эпизодов, всех своих учеников и их работы; людей, с кем приходилось встречаться, маршруты походов, места исторические, речки и даже название рыб в них, голоса птиц…

Среди его собеседников были крупнейшие ученые нашего времени. Арнольд оставил множество замечательных автобиографических заметок, которые составляют лишь малую долю того, что могло бы быть им сказано. Им написаны прекрасные воспоминания об А.Н. Колмогорове, Я.Б. Зельдовиче, Н.Н. Боголюбове…

Часто беседовал Дима с академиком Сергеем Михайловичем Никольским (соседом по даче) и не раз слышал от старшего человека: «Какие же вы ещё дети. У вас всё впереди». Дима моложе С.М. Никольского на 32 года, но ушёл из жизни на два года его раньше.

Я поспешила после смерти Димы самым первым навестить С.М. Никольского. Он сожалел о смерти Димы. Потом улыбнулся: «Дима, ну и задавака! Как он любил похвастаться полным ведром клюквы: «Я нашёл новое место в шестидесяти километрах отсюда». Был он с апломбом, но очень много знал и этим всех удивлял. Как-то я рассказывал, что мы вернулись после эвакуации в сорок третьем году в город Жуковский. Арнольд тут же поправил: «В те годы это был не город Жуковский, а рабочий посёлок Стаханово. Только 23 апреля 1947 года он переименован в город Жуковский». - Откуда он всё это выкопал и для чего запомнил? Как будто в голове у него была энциклопедия».

По ходу дела Арнольдом совершались и гуманитарные открытия; он нашёл, откуда заимствовал А.С. Пушкин эпиграф к «Евгению Онегину и письмо Татьяны.

Дима увлекался переводами с французского и английского языков; прекрасно знал русскую и зарубежную поэзию да и сам писал стихи *(...Вновь зима, леса пустые -/ Белки спят и кабаны,/ Только лыжи, мне родные, / Пробежали полстраны...),* Он рисовал полюбившиеся места, храмы, в которых бывал во время походов и поездок.

Арнольд служил своей профессии и просвещению на всех возможных поприщах, написал замечательные учебники (его учебник по классической механике сравнивают с величайшим научным произведением «Математические начала натуральной философии» Ньютона); монографии и обзорные статьи, посвященные проблемам математики. Начиная с руководства знаменитым школьным математическим кружком в пятидесятые годы, Арнольд очень много внимания уделял работе со школьниками. Как когда-то Колмогоров открыл летнюю школу в Красновидове, Арнольд последние десять лет ежегодно проводил занятия со старшеклассниками в Дубне.

Владимир Игоревич унаследовал у Андрея Николаевича сбор семинара в аудитории 1408. До ночи и у того, и у другого не хватало времени наговориться о задачах, о проблемах, о личных открытиях. Семинар Арнольда тоже не был ограничен никакой узкой темой и занимался самой разнообразной математикой. Каждую осень Арнольд открывал семинар новым списком задач и гипотез и новых замечательных работ других математиков, которые по его мнению нужно срочно разобрать и понять. Ему приходило в голову столько идей, что довести их до конца было не по силам даже ему. Эти идеи формулировались в виде задач и предлагались участникам семинара.

Специальные курсы и семинары, которые Арнольд читал и вёл на Мехмате с 50-х по 90-е годы, привлекали сотни слушателей. Ему присуща яркая эмоциональная манера изложения, умение кратко, геометрически наглядно и, проникая в самую суть, излагать математические теории, историю науки.

Всё, что Владимир Игоревич прочел, понял, продумал, придумал, он спешил передать слушателям и читателям. Из конспектов его курсов по теоретической механике, дифференциальным уравнениям, теории особенностей родились замечательные учебники, аналогов которым не было и нет.

В 2007 году математический мир отмечал 70-летие В. И. Арнольда. К этой дате вышла статья «Владимир Игоревич Арнольд глазами учеников» (Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 2007, т.259) – дань уважения, любви и благодарности учеников учителю. Там, в частности, отмечается: «Решить задачу, поставленную Арнольдом, большое счастье. Решения многих из них дали начало новым направлениям в математике. В 2000 г. издательство «Фазис» выпустило большой том «Задачи Арнольда». Ему предпослан эпиграф, который не нуждается в комментариях: *«Я очень благодарен большому числу своих бывших и нынешних учеников, написавших эту книгу».*

В.И. Арнольд .

В статье приведён неполный (54 фамилии) список математиков, которые защитили диссертации под руководством Арнольда: С.Аносов, А. Варченко, В. Гинзбург, С. Гусейн-Заде, А. Давыдов, В. Закалюкин, М. Казарян, А. Леонтович, А. Хованский…

Жизненная и гражданская позиция Владимира Игоревича Арнольда всегда была проникнута любовью к Отечеству и болью за него. Он не мог равнодушно относиться к тому, что происходит в отношении к математике в мире и, тем более, в своём Отечестве.

Ему ли не знать, как и чему учат в других странах - трудно перечислить академии, университеты, научные общества, куда приглашали Арнольда читать лекции, где он (имея основную работу профессором в МГУ, затем главным научным сотрудником в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН) по несколько месяцев работал: в учреждениях СССР – от Киева, Воронежа, Тбилиси... до Хабаровска, Магадана…; во Франции, Америке (университеты, институты), в Швейцарии, Ирландии, Польше, Китае, Японии, Индии, Израиле, Бразилии... – всего более 80 учреждений, где слушали его лекции.

Где можно было защищать высокую науку, где можно быть услышанным, прочитанным, он боролся за неё, выступал, публиковал свои статьи. (Смотрите курсив).

Математика и математическое образование в современном мире

... планируемое во всех странах подавление фундаментальной науки и, в частности, математики ... принесёт человечеству ... вред, сравнимый со вредом, который принесли костры инквизиции западной цивилизации.

Математика в образовании и воспитании

Сост. В.Б.Филиппов. - М: ФАЗИС, 2000; 256 с.

Сборник … статей, в которых авторы затрагивают наиболее общие проблемы образования и воспитания, в том числе, связанные с математическим образованием.

Подготовка новой культурной революции

….ослабление научного образования в стране вредно повлияло бы не только на интеллектуальный, но и на индустриальный, а впоследствии и на военный, уровень России.

Арнольд был страстным борцом против губительных реформ образования… В своей речи на Парламентских слушаниях в Государственной думе 23 октября 2002 г. он резко выступил против плана реформ, который *«производит общее впечатление плана подготовки рабов, обслуживающих сырьевой придаток господствующих хозяев».* Он доказывал, что наше математическое образование выше американского и европейского, и скатываться ниже, до их уровня, нельзя

... Страна без науки не имеет будущего, и принятие обсуждаемого плана было бы преступлением против России. ... уровень подготовки школьников в России до сих пор остается, особенно в области математики, очень высоким по сравнению с большинством стран мира (несмотря даже на ничтожность затрат нашей страны на науку и образование по сравнению с другими странами). Трагическая утечка мозгов, происходящая вследствие этой ошибки, — только одно из последствий… антинаучной ... политики… частью которой является и обсуждаемый безобразный проект «стандартов»….

…в сегодняшних Штатах …из «стандартов» простые дроби давно… исчезли, поскольку компьютеры считают только десятичные. ... Обучить после такого «образования» думать, доказывать, правильно рассуждать никого уже невозможно. Всё это делается,… как мне объяснили мои американские коллеги, сознательно,… по экономическим причинам: приобретение населением культуры ... плохо влияет на покупательную способность в их обществе потребителей…

Вот к этому-то состоянию общества наши реформаторы и стремятся привести Россию, традиции которой совершенно противоположны. Наши школьники и сегодня хотят настоящих знаний, вечных истин….

Образование, которое мы можем потерять.

Сборник. Под общей редакцией ректора МГУ академика В.А. Садовничего. 2003. - 368 стр.…. *Ближняя перспектива для России: «переориентация» ее науки на «прикладные исследования» — резкое снижение сначала интеллектуального уровня страны, затем вследствие этого и индустриального, а значит и оборонного.*

...Наука стоит гроши по сравнению с тем доходом, который от неё получают. Ни страны, ни правительства до сих пор не расплатились с учёными (начиная от Фарадея и Максвелла), снабдившими их и электрическим током, ...и электромоторами, и освещением, и радио, и телевидением, и электропоездами. Стоили все эти открытия малую долю процента того дохода, который ... получили.

*... Учить детей «непосредственно тому, что понадобится», невозможно и бессмысленно: надо учить их понимать причины вещей, думать... **О**сновной частью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира.*

***У**важение к науке нужно воспитывать. Доступное неспециалисту изложение сущности науки многим необходимо, и мы должны прилагать все усилия для удовлетворения традиционной любознательности российского читателя, издавая недорогие хорошие книги.*

Выпускники 1959 года Мехмата создали четыре тома воспоминаний о студенческой жизни в МГУ, о своих преподавателях «Мы – математики с Ленинских гор». Активным автором в каждом томе был Дима Арнольд. Все его материалы интересны и значимы.

В начале лета 2008 года однокурсников быстро облетела весть о том, что Диме будут вручать Государственную премию РФ – в День России 12 июня, совпадающий с днём его рождения. Мы взволнованно смотрели по телевизору, как Дима шёл по ковровой дорожке, как Президент РФ Д.А. Медведев прикреплял к его пиджаку знак государственной награды. После этого Д.А. Медведев сказал: «Я знаю, что Вас все зовут Димой и у Вас сегодня день рождения. Я поздравляю Вас с днём рождения!»

В сентябре Диме вручили в Гонконге Мировую премию «The Shaw Prize Lecture».

Мы, однокурсники Димы, организовали музыкально-поэтический вечер и банкет в Московском городском Доме учителя 24 октября 2008 г.. Переполненному залу зрителей представили нашего гениального сокурсника, поздравили с присуждением премий. Зал приветствовал его стоя, длительными мощными аплодисментами. Звучала музыка его любимого композитора Моцарта. Зачитали Адрес, в котором выражали свою гордость за Диму - Владимира Игоревича Арнольда, выдающегося математика современности. Символическим подарком была большая двухведёрная корзина для сбора даров природы; желали законсервировать своё здоровье так, как он консервирует грибы и клюкву. И было заметно, как Дима взволнован, рад, неожиданно ощутив такую искреннюю любовь и внимание к нему его однокурсников.

У В.И. Арнольда было выявлено серьёзное заболевание, но он не признавал его; очень много работал, даже больше, чем прежде.

11 января 2010 г. в Математическом институте имени Стеклова РАН на конференции, посвящённой 60-летию академика В.В. Козлова, директора института, В.И. Арнольд читал доклад «Случайны ли квадратичные вычеты?» Доклад оказался последним в его жизни.

То, что в жизни Арнольда уникальное место занимал А. Н. Колмогоров, особенно ощутимо было в последние годы жизни Андрея Николаевича. когда он был уже очень болен. Ученики каждый день навещали Учителя и читали ему то, что он просил, когда сам уже это не мог делать из-за катастрофической потери зрения. Д. Арнольд, несмотря на свою большую занятость, отыскивал время в плотном графике дел, чтобы навещать Учителя. Они выводили Андрея Николаевича на прогулку, захватив с собой раскладное кресло для отдыха Учителя. Василию Козлову удалось запечатлеть на фотографии рядом двух великих учёных – А. Н. Колмогорова, уже очень больного, и В. И. Арнольда, полного

В последние месяцы жизни А.Н. Колмогорова необходимы стали круглосуточные дежурства, и продолжались они до последних минут его жизни. Дима пытался всегда находить возможность быть рядом с Андреем Николаевичем...

Арнольд много работал, и его планы были расписаны на несколько месяцев вперёд.

В мае 2010 г. М.Б. Пиотровский, член-корреспондент РАН (директор Эрмитажа) пригласил В.И. Арнольда на Международную конференцию 24-25 июня; речь шла о том, как привлечь в Россию хоть на какие-то периоды времени наших учёных, уехавших за рубеж. Арнольд знал, что это сделать очень трудно, но отказаться не мог: «Поеду!»

Арнольд В.И. скончался скоропостижно в Париже 3 июня.

Господь избавил его от страданий, выпавших на долю Учителя в конце жизни.

В Академии наук РФ на панихиде слова, слова, что … Пройдут десятилетия, столетия… Вряд ли учёный такого масштаба может появиться когда-либо ещё…

Новодевичье кладбище 15 июня 2010 года навсегда закрыло землёй нашего дорогого сокурсника Диму – Арнольда Владимира Игоревича, великого математика. Он ушёл из жизни за девять дней до исполнения ему 74-х лет. Его 75-летие отмечали уже без него.

Через год, в 2011 г. в серии «Мы – математики с Ленинских гор» вышел наш 5-й том - «В.И. АРНОЛЬД». Каким был – с детских лет до последнего дня жизни – этот человек, ставший великим учёным; каким запомнили его однокурсники, друзья, ученики.

Когда я собирала воспоминания об Арнольде В. И., часто слышала, что невозможно говорить о нём, не вспоминая его учителя Колмогорова А.Н. Это что-то единое целое во всём: в широте их научного мира, в мировоззрении, в жажде всё знать, в глубине знаний; в отношении к своим ученикам, которые, получив себе в дар, отпущенный судьбой, учителя, слились с ним во всём, и невозможно разорвать эту связь. И тому, и у другому каждый ученик дорог, а руководитель – это всё на свете: от поставленных задач, их решений, докладов, разговоров на любые темы до купанья в ледяной воде, многокилометровых походов на лыжах и путешествий по стране…

И мы живём под знаком совмещения двух великих личностей.

Александр Рубинштейн, доктор физмат наук, профессор выразил общее мнение сокурсников: «Безусловно, судьба сделала нам – математикам набора 1954 года – подарок: на пять лет превратила нас в соучеников Димы». Димы, о котором ранее А.Н. Колмогоров сказал, что в беседах с ним ощущает «наличие Высшего разума».

Доктор физмат наук, Заслуженный профессор МГУ В.М. Тихомиров: «…Он основал выдающуюся математическую научную школу,… Всё связанное с ним – необыкновенная одаренность личности, творчество, служение человечеству – делает его образ незабываемым для всех, кому посчастливилось соприкоснуться с ним на своём жизненном пути».ст

М.В. Козлов, ученик А.Н. Колмогорова, кандидат физмат наук, доцент Мехмата МГУ: «… Владимира Игоревича, как учёного, достигшего высочайших вершин в науке, отличает от многих, несколько подобных ему учёных, высокое чувство патриотизма, постоянная связь с Россией. Он не отождествлял себя с Западом… Он отстаивал свои, патриотические позиции: Россия достигла в математике вершин гораздо более высоких, чем Запад, и именно Россия велика своими научными достижениями. Таким учёным должна гордиться Россия»..

В. М. Закалюкин, ученик В.И. Арнольда, профессор МГУ: «… Я счастлив, что был рядом с ним, слушал его яркие доклады, мог понять красоту его новых открытий… Для меня всегда Владимир Игоревич был высшим судьей... после беседы с ним возникало ощущение, что узнал истину в последней инстанции…

Личность Арнольда совершенно уникальна. Я не знал и не знаю никого, кто хотя бы приблизительно мог сравниться с ним. Мало того, что Владимир Игоревич был гений, наделённый сверхчеловеческими способностями, памятью, работоспособностью и увлечённостью, он был величайший педагог, которой, по-видимому, не повторится никогда… семинары были уроками творчества… Идеи и доказательства рождались прямо у доски… Атмосфера была накалена азартом, он умел зажигать учеников своим примером гения. Теперь такого уже не увидишь.

…Везде его гениальность и работоспособность поражали… Он обладал уникальной эрудицией - знал сотни направлений в математике… Но самое потрясающее и неповторимое в нём - это его понимание и ощущение единства мира во всём: в математике… он любил искать разные проявления универсальных законов; в физике, в природе, истории, в человеческой психологии он ценил простоту, естественность. Он мог объяснить почти всё и многое предвосхитить.

Какой удивительно прекрасный и огромный мир носил он в себе, гораздо лучше всего того, что окружает нас... Отблеск этого мира был виден в его глазах. Мне кажется, он очень хотел отдать нам этот Великий мир Великого Арнольда…»

Мир, который был создан им вместе с Андреем Николаевичем Колмогоровым.

12 июня 2013 г. открыт памятник В.И. Арнольду на Новодевичьем кладбище.

Московское математическое общество в жизни отечественного математического сообщества (к 150-летию Общества)

С.С. Демидов, Т.А. Токарева

Первая попытка организации математического общества в Москве была предпринята группой преподавателей и студентов университета еще в 1810 г. [1, с. 316; 2]. Однако просуществовало оно недолго: тогдашняя первопрестольная еще не обладала достаточным количеством активных профессиональных математиков, способных поддерживать его нормальную деятельность. Необходимые для этого условия сложились лишь к 1860-м гг., когда в Москве сформировался математический центр европейского уровня. Его созданию способствовала сама атмосфера, царившая в российском обществе того времени – в период судьбоносных преобразований в социальной жизни, случившихся в России после восшествия на трон в 1855 г. Александра II. Самой известной из тогдашних реформ стала отмена в 1861 г. крепостного права.

Из преобразований, имевших прямое отношение к рассматриваемому нами вопросу, назовем фундаментальные изменения в организации системы народного образования, в частности, образования высшего. Принятый в 1863 г. новый университетский устав увеличил в университетах число позиций для представителей математических наук , а также содержал рекомендации об учреждении при университетах научных обществ.

В этой атмосфере в 1864 г. при Московском университете было создано Математическое общество. Первое его заседание было собрано 15(27) сентября на квартире профессора Н.Д. Брашмана, состоявшего в то время на пенсии и по состоянию здоровья уже не имевшего возможности посещать университет. Он же был избран его президентом. Вице-президентом общества стал А.Ю. Давидов, а секретарем В.Я. Цингер. Первоначально общество состояло из 14 человек. Среди них были как преподаватели университета (астроном Ф.А. Бредихин, математик Н.В. Бугаев, механик Ф.А. Слудский, физик Н.А. Любимов), так и других учебных заведений: профессор Московского высшего технического училища А.В. Летников, скромный преподаватель математики немецкой гимназии (Московского петропавловского училища) К.М. Петерсон. Среди первых членов общества всего лишь один оказался не москвичем – это был воспитанник Московского университета, проживавший в Петербурге академик П.Л. Чебышев.

Поначалу Общество преследовало в своей деятельности очень скромные цели. Как следует из протокола его первого заседания, «цель Общества есть взаимное содействие в занятиях математическими науками» [3, с. 472]. Однако вскоре выяснилось, что лидеры Общества ставили перед ним более амбициозные цели. Так, представляя в 1866 г. документы (и среди них проект нового устава) для высочайшего его утверждения (а утверждено оно было в январе 1867 г.), они так сформулировали стоящие перед Обществом задачи: «Московское математическое общество учреждается с целью содействовать развитию математических наук в России» [4, с. III].

На четвертом заседании Общества 15 декабря 1864 г. его руководители высказали мнение, что доклады, прочитанные на заседаниях, заслуживают публикации. И уже в апреле 1865 г. было принято решение об издании журнала. Первый том журнала, получившего наименование «Математический сборник», появился в октябре 1866 г. и был посвящен памяти скончавшегося в мае того же года основателя и первого президента Н.Д. Брашмана. Так началось издание одного из самых влиятельных математических журналов XX века [5].

Последняя треть XIX – начало XX вв. – время становления и активного развития Общества. Как мы уже сказали, в год своего создания оно насчитывало всего 14 членов, из которых только один был иногородним. В 1913 г., накануне Первой мировой войны, оно состояло из 112 членов, 34 из которых жили в Москве, 57 – в различных городах Империи, а 21 составляли иностранные члены Общества. Таким образом, Общество приобретало общероссийский характер.

Влияние Общества на научную жизнь в России было чрезвычайным. Его деятельность стала важным фактором в становлении и развитии российского математического сообщества. «По своему значению, – писал А.П. Юшкевич [1, с. 317], – Московское математическое общество уступало только Академии наук».

Общество регулярно собиралось на свои заседания и по докладам, произнесенным на этих заседаниях, а докладчиками выступали ученые из разных городов Империи (информация о них публиковалась на страницах «Математического сборника»), можно судить об эволюции математических исследований не только в Москве, но и во всей стране. О том значении, которое придавали Обществу московские математики, говорит тот факт, что его руководителями избирались крупнейшие ученые – достаточно взглянуть на список президентов Общества. Вот первые его президенты: Н.Д. Брашман (1864–1866), А.Ю. Давидов (1866–1886), В.Я. Цингер (1886–1891), Н.В. Бугаев (1891–1903), П.А. Некрасов (1903–1905), Н.Е. Жуковский (1905–1921), Б.К. Млодзеевский (1921–1923). Еще более внушительно выглядит список (он будет приведен ниже) последующих руководителей Общества.

И, конечно, Общество стало ведущей силой в преобразовании Москвы на рубеже XIX–XX вв. в заметный в Европе центр математических исследований, известный достижениями в области прикладной математики (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин), дифференциальной геометрии (К.М. Петерсон, Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров), а также результатами по проективной геометрии (К.А. Андреев, А.К. Власов), теории чисел (Н.В. Бугаев), теории функций комплексного переменного (П.А. Некрасов) и теории вероятностей (П.А. Некрасов).

Для исследований москвичей стали характерными интерес к приложениям, предрасположенность к геометрии и ясным геометрическим конструкциям, а также стремление к философскому осмыслению предмета и методов развиваемой ими математики. При этом доминирующими в их среде стали интерес к идеалистической и даже религиозной философии. Этот интерес стал основанием для закрепившегося за московской школой этого периода наименования философско-математической.

Лидером этой школы стал наиболее влиятельный в Москве того времени математик Н.В. Бугаев. Оригинальный философ, он стал автором собственной философской системы – «эволюционной монадологии». Его философские идеи стали основанием для особого интереса к разрывным функциям. Создание теории таких функций Бугаев рассматривал как одну из важнейших задач современной математики и пытался вместе со своими учениками решить ее в рамках так называемой «аритмологии» [6].

Деятельность Московской философско-математической школы протекала в условиях острого конфликта с другой более известной тогда в Европе школой – Петербургской школой или школой Чебышева (А.А. Марков, А.М. Ляпунов и др.). Основанием для этой конфронтации стали, прежде всего, разногласия идейного порядка, определивших, в известной мере, математическую ориентацию столичных школ: позитивизм, либеральный демократизм и антимонархизм, доминировавшие в петербургской среде, с одной стороны, воинствующий антипозитивизм, увлеченность идеалистической и даже религиозной философией, православие и монархизм, присущие москвичам, с другой.

Противостояние математиков двух столиц наложило отпечаток на жизнь всего российского математического сообщества последней трети XIX – первой трети XX вв., создав в нем известное напряжение. Это напряжение приводило к конфликтным ситуациям, зачастую заканчивавшихся открытыми столкновениями. Так случилось, например, в случае споров о методе, предложенном В.Г. Имшенецким в работах 1887–1891 гг.: методе нахождения дробно-рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений с целыми рациональными коэффициентами. Эти работы, вызвавшие критику со стороны А.А. Маркова, А.Н. Коркина и других петербургских математиков, были поддержаны москвичами – К.А. Андреевым, П.А. Некрасовым и др. Другим примером может служить критика А.А. Марковым знаменитых результатов 1888 г. С.В. Ковалевской, касающихся уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. На стороне Ковалевской опять выступили москвичи. Все эти конфликты обсуждались на заседаниях Московского математического общества, выступавшего в роли арбитра. Здесь со всей отчетливостью проявилась особенная роль Общества, столь важная в период становления российского математического сообщества – роль общественной организации. Притом организации, деятельность которой носила не местный (московский!), но общенациональный характер. Уже в первую половину столетия своего существования в вопросах, имевших значение для всего российского математического сообщества, Московское математическое общество брало на себя роль общенационального.

Разумеется, особо важную роль играло Общество в развитии математических исследований в самой Москве, начавшей трансформироваться из заметного в Европе центра математических исследований в одну из ведущих мировых математических столиц.

Хотя, как мы уже говорили, к началу XX в. Москва заявила о себе как о заметном центре математических исследований, москвичи не были в восторге от положения сообщества, третируемого академическим Петербургом. Они искали тематику, разработка которой позволила бы им выйти на передовые линии современных исследований. При этом тематика эта должна была быть по возможности удаленной от сюжетов разрабатывавшихся математиками северной столицы. И такую тематику они нашли – ею оказалась новая теория функций действительного переменного, зародившаяся в 90-е гг. XIX в. в работах французских математиков Э. Бореля, А. Лебега и Р. Бэра. В этих работах на базе теории множеств Г. Кантора строилась новая теория разрывных функций – цель которую безуспешно пытался достичь в своей аритмологии Н.В. Бугаев с учениками. Один из них Д.Ф. Егоров даже начал с работы по аритмологии свою научную карьеру. Однако, будучи математиком с великолепной интуицией, он быстро разочаровался в бугаевской аритмологии и в качестве темы своих дальнейших исследований избрал дифференциально-геометрическое направление, развитие которому в Москве положил К.М. Петерсон. И хотя на этом пути ему сопутствовала удача – в 1899 г. он защитил магистерскую диссертацию «Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов, характеристики», в 1901 г. – докторскую «Об одном классе ортогональных систем», основные результаты которой вошли во второе издание известного трактата Г. Дарбу «Lesons sur les systimes orthogonaux et les coordonnйes curvilignes» (Paris, 1910), назвавшего в честь него класс Е-поверхностей), он не забывал и аритмологических сюжетов своей юности – теории разрывных функций [7]. Познакомившись с работами по теории функций действительного переменного молодых французских математиков он сразу увидел в ней чаемую покойным Бугаевым теорию разрывных функций и увлекся ею. В 1911 г. в «Comptes Rendus» Академии наук Франции появилась заметка «О последовательности измеримых функций», содержавшая теорему, известную ныне как теорема Егорова, а уже в 1912 г. – в том же журнале статья его ученика Н.Н. Лузина «К основной теореме интегрального исчисления» о С-свойстве. Так началась история знаменитой Московской школы теории функций или, как ее часто называют, школы Егорова–Лузина. Ее рост был стремительным, успехи поразительными. В 1915 г. публикуется знаменитый труд Н.Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», в который наряду с его собственными достижениями включены и результаты одного из первых его учеников – А.Я. Хинчина. Уже в годы предшествующие революционным событиям 1917 г. Лузиным и его учениками – Хинчиным, Д.Е. Меньшовым, П.С. Адександровым, М.Я. Суслиным – были получены результаты, заявившие о появлении в Москве одной из наиболее интересных школ современной Европы.

Безусловно, в этом успехе присутствует и вклад Московского математического общества. На его заседаниях докладывались основные результаты по теории множеств и теории функций действительного переменного, полученные москвичами. Особую роль в становлении школы сыграл организованный при Обществе в 1902 г. студенческий математический кружок [8; 9]. Его первым секретарем был П.А. Флоренский, а его преемником Н.Н. Лузин. Проблематика теории множеств и теории функций занимала особое место на заседаниях этого кружка. И хотя с началом войны 1914 г., а тем более после революции 1917 г. и разразившейся впоследствии гражданской войны издательская деятельность чрезвычайно снизила свои обороты (так сначала замедлился, а затем и вовсе остановился выпуск «Математического сборника»), тем не менее, как мы уже отметили выше, в 1915 г. свет увидела выпущенная отдельным первым номером 30-го тома «Математического сборника» диссертация Н.Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд».

Особенное значение имела деятельность Общества в тяжелые для науки и образования 1917–1923 гг. Это был период, когда университетская жизнь лишь теплилась – сложности с продуктами и топливом вынудили многих преподавателей покинуть город. Продолжались заседания Общества, которые собирали всех математиков, которые на момент их проведения оказывались в городе. Президенты Общества оставались в Москве на протяжении всего трудного периода. И Общество взяло на себя роль не только организатора московской математической жизни, но и одного из созидателей общегосударственного (теперь уже советского) математического сообщества. Такой его роли способствовал случившийся в 1918 г. перенос столицы в Москву. Важным обстоятельством стало то, что в 1923 г. президентом Общества стал Д.Ф. Егоров – выдающийся математик и замечательный организатор [7].

Прежде всего Егоров поставил задачу возобновления издания «Математического сборника» [5]. И в 1924 г. в Госиздате увидел свет 31-й его том. Учитывая складывающуюся ситуацию в советской уже науке, он изменил характер журнала, преобразовав его из издания прежде всего московского во всесоюзное и даже международное. Для этого он в 32-м томе ввел в редколлегию журнала В.А. Стеклова – лидера Ленинградской школы, по уже установившейся традиции противостоявшей москвичам. Более того, начиная с этого тома журнал был объявлен органом не только Московского, но также Ленинградского и Казанского математических обществ – это положение сохранялось до 1936 г., когда издателем выступила АН СССР. Кроме русского официальными языками журнала становятся немецкий, французский, итальянский и английский языки. В результате голода на научную периодику, возникшую после окончания Первой мировой войны в Европе, инициатива Егорова оказалась в высшей степени востребованной. Среди авторов «Математического сборника» 1920 – начала 1930-х гг. мы видим Ж. Адамара, Б. Гамбье, С. Лефшеца, Э. Картана, Р. Мизеса, Э. Нетер, В. Серпинского, Л. Тонелли, М. Фреше, Х. Хопфа.

Главным для советского математического сообщества, которое лишь начинало формироваться, было появление общесоюзного печатного органа, нацеленного на широкое международное сотрудничество. Кроме работ москвичей в журнале печатались работы ленинградцев (А.С. и Я.С. Безиковичей, Н.М. Гюнтера, Л.В. Канторовича, И.А. Лаппо-Данилевского, С.Л. Соболева, Г.М. Фихтенгольца, В.А. Фока), а также математиков из различных городов страны – Казани (Н.Г. Чеботарев), Ростова-на-Дону (Д.Д. Мордухай-Болтовского), Киева (Д.А. Граве, Н.М. Крылов), Одессы (М.Г. Крейн).

Другой важной инициативой президента Московского математического общества Д.Ф. Егорова, направленной на укрепление отечественного математического сообщества, стала организация и проведение в Москве весной 1927 г. Всероссийского съезда математиков [10]. Этот съезд, председателем которого был избран Егоров, собрал 378 участников из 33 городов Советского союза (от Ленинграда до Тифлиса и Баку, от Минска до Перми – в европейской части, от Омска до Ташкента и от Томска до Владивостока – в азиатской). На нем было принято решение о создании Всесоюзной ассоциации математических учреждений, и был избран ее Совет, который взял на себя издание трудов съезда, которое было осуществлено в 1928 г., и подготовку Первого Всесоюзного съезда математиков в Харькове, который прошел в июне 1930 г. в Харькове. Так инициативой Московского математического общества было положено начало регулярной жизни отечественного математического сообщества. Выступив инициатором создания его новой структуры – Всесоюзной ассоциации – Общество, не претендуя в ней при этом на какую-то особую роль, продолжило традицию содействовать развитию математики в России.

Общество сыграло важную роль в процессе активного роста исследований Московской школы теории функций в конце 1920 – начале 1930-х гг. – в период активного «ядерного процесса» распада школы на множество дочерних и чрезвычайного расширения ее тематики. Этот процесс, явившийся, с одной стороны, свидетельством необычайных жизненных сил школы и открывающихся перед ней перспектив, с другой, стал причиной конфликтной ситуации, сложившейся между Лузиным и некоторыми из его учеников. Сложный идеологический климат, в который оказалась погруженной наука в тот непростой период нашей истории, придал этой ситуации, вылившейся в «дело академика Н.Н.Лузина» [11], идеологический характер.

Этому драматическому эпизоду в истории математики в Москве предшествовало еще одно «дело», одним из фигурантов которого стал Д.Ф. Егоров. В 1920–1930-е гг. он – центральная фигура математической жизни Москвы: директор Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета, президент Московского математического общества. В то же время это человек глубоко верующий и резко отрицательно настроенный к советской власти, при этом не только не скрывавший своих политических и религиозных убеждений, но активно с ними выступавший [7]. Разумеется, советская власть не могла с этим долго мириться. Егоров стал объектом постоянных нападок пролетарских идеологов, которые в конечном итоге привели к его аресту в 1930 г. по сфабрикованному ОГПУ делу «всесоюзной контрреволюционной монархической организации “Истинно-православная церковь”» и к его смерти в Казани в 1931 г.

После ареста Егорова под ударом оказалось возглавлявшееся им Общество. Стала реальной угроза его закрытия (подробнее см.: [12]). Лишь своевременными действиями его лидеров (в частности, удалением с поста президента партийного идеолога Э. Кольмана – было и такое, определенного рода риторикой, реформой «Математического сборника»), удалось вывести Общество из под удара. Президентом Общества в 1932 г. стал П.С. Александров, сохранявший эту позицию до 1964 г.

«Дело Егорова» обозначило начало нового этапа в жизни математического сообщества – открытая антисоветская позиция его членов была отныне нетерпима.

«Дело Лузина» можно рассматривать как дальнейшее развитие идеологического наступления на советском «математическом фронте» [11]. Ученым указали на необходимость поставить всю свою научную деятельность под полный идеологический контроль советского государства. И математики правильно угадали смысл акции: нельзя воевать с государственной идеологией, ей нужно подчиниться, но подчиниться так, чтобы идеология, по возможности, не мешала свободному развитию математической мысли, а если и мешала, то в наименьшей возможной степени, чтобы «идеологи» рекрутировались, по возможности, из круга лиц совместимых с лидерами математического сообщества. То есть поставить заслон лицам типа Кольмана, но благожелательно отнестись к фигурам типа С.А. Яновской. Более того, взять марксистско-ленинскую интерпретацию предмета и методов математики в собственные руки. Отсюда и появление в 1956 г. трехтомного коллективного труда «Математика, ее содержание, методы и значение», подготовленного под редакцией А.Д. Александрова, А.Н. Колмогорова и М.А. Лаврентьева.

К середине 1930-х гг. Общество оказалось одной из самых авторитетных организаций в отечественном математическом сообществе. Вместе с Математическим институтом им. В.А. Стеклова АН СССР, который в 1934 г. переехал в Москву, и механико-математическим факультетом Московского университета, оно вошло в состав того ядра, вокруг которого начала формироваться одна из ведущих математических школ второй половины XX в. – Советская математическая школа.

От двух названных институтов Общество отличает одна особенность – оно является организацией не государственной, но общественной. Прежде всего, оно играло роль своего рода профессионального клуба – здесь докладывались и обсуждались новейшие результаты отечественных и зарубежных математиков. Но здесь же дискутировались и внутренние проблемы жизни отечественного сообщества: мы уже упоминали о дебатах по поводу результатов Имшенецкого или Ковалевской – математиков отнюдь не московских – проходивших на заседаниях Общества, отметим также занятия Обществом проблемами школьного математического образования. А в некоторые переломные моменты этой жизни именно общественный характер Общества позволял ему выходить на ее передний край, задавая само направление движения отечественной математики.

В 1936 г. Институт им. В.А. Стеклова вместе с Обществом начали издание «Успехов математических наук», выходивших поначалу нерегулярно – в 1933–1946 гг. появилось 10 его выпусков, а в 1946 г. преобразованного в журнал, ставший основным советским математическим изданием, выходящим 6 раз в год, публикующим обзорные статьи, научные сообщения, сделанные на заседаниях Общества, а также информационные материалы о математической жизни в стране (в частности, о заседаниях Московского и Ленинградского обществ) и за рубежом.

Именно Общество взяло на себя основную роль в создании фундаментальных трудов «Математика в СССР за 15 лет», «Математика в СССР за 30 лет», двухтомника «Математика в СССР за 40 лет», а также вышедшего в двух книгах второго тома «Математики в СССР. 1958–1967». Общество организовывало съезды, конференции, семинары и присуждало специальные премии. Среди лауреатов премии Общества мы видим цвет математической мысли страны.

Велико значение Общества и в развитии преподавания математики, прежде всего в советской средней школе. Эта тема находилась в центре внимания Общества с момента его основания. В первых томах «Математического сборника» существовал даже специальный раздел, предназначенный для учителей гимназий. В феврале 1934 г. была создана секция элементарной математики, вскоре переименованная в научно-педагогическую, а затем в секцию средней школы. Во время войны секция не функционировала, возобновив свою работу лишь в 1948 г. (под руководством А.И. Маркушевича). Основная задача секции – содействовать повышению уровня преподавания математики в школе, обмениваться преподавательским опытом, устанавливать постоянные связи между преподавателями средней и высшей школы. Особенно следует отметить инициативу Общества середины 1930-х гг., связанную с организацией школьных математических олимпиад, первая из которых была проведена осенью 1935 г. Так было положено начало мощному впоследствии олимпиадному движению в стране. Многие из известных математиков XX в. начали свою карьеру, став победителями таких олимпиад.

На протяжении своей истории Общество неоднократно обсуждало проблемы, связанные с программами и учебниками по математике для средней школы. Одно из последних, бурное и чрезвычайно многолюдное заседание Общества, состоявшееся 27 ноября 2001 г., было посвящено предполагаемой реформе школы и перспективам математического образования, планируемым Министерством образования РФ и вызвавшим негативную реакцию в математическом сообществе.

Роль общественной организации сделала деятельность Московского математического общества особенно важной в идеологизированном советском обществе. На заседаниях общества трибуна предоставлялась и математикам, находившимся в сложных отношениях с советскими и партийными властями. Более того, Общество «позволило» себе в начале 1970-х гг. избрать в качестве своего президента И.Р. Шафаревича, который вел в те годы активную правозащитную деятельность.

Обратим внимание также на то немаловажное обстоятельство, что президентами Общества всегда были крупные, по большей части, даже крупнейшие математики своего времени, что, конечно, поднимало его престиж и значение в отечественном математическом сообществе. Вот их список, начиная с 1923 г.: Д.Ф. Егоров (1923–1931), П.С. Александров (1932–1964), А.Н. Колмогоров (1964–1966, 1973–1985), И.М. Гельфанд (1966–1970), И.Р. Шафаревич (1970–1973), С.П. Новиков (1985–1996), В.И. Арнольд (1996–2010). С 2010 г. Общество возглавляет В.А. Васильев.

Основанное как кружок математиков, поддерживающих друг друга в научных занятиях, оно трансформировалось в неформальную ассоциацию, в значительной степени координирующую и организующую деятельность национального математического сообщества. В советском математическом сообществе Московское математическое общество взяло на себя роль ведущей в стране (не надо забывать, что речь идет о столичном математическом обществе, которому в сверхцентрализованном советском обществе отводилась особая роль) общественной, до известной степени независимой от партийных и государственных органов, организации. Маневрируя между не всегда действовавшими в унисон административными организациями – Отделением математики АН СССР и Математическим институтом им. В. А. Стеклова, с одной стороны, Министерством высшего и среднего специального образования СССР, руководством Московского университета и его механико-математического факультета, с другой стороны – Московское математическое общество успешно преодолевало встречавшиеся на его пути рифы, сохраняя высокую научную репутацию и авторитет в отечественном математическом сообществе.

Свою высокую миссию Общество продолжало исполнять и в тяжелые годы перестройки, и в последующий непростой период нашей истории. Традиции, заложенные его основателями, укрепленные и развитые выдающимися представителями последующих поколений, создали прочный фундамент для продолжения его успешной научной и организационной деятельности. Основанием этих традиций стали высокие академические стандарты, о сути которых так сказал на столетнем юбилее Общества тогдашний его президент Павел Сергеевич Александров [13, с. 9]: «...Московское математическое общество всегда культивировало... многогранное развитие математики, не стараясь втиснуть его ни в какие заранее данные рамки и системы оценок. В течение десятилетий Московское математическое общество было тем местом, на котором произрастали и жили математические открытия, искания, волнения, все творческие эмоции московских математиков нескольких поколений. Московское математическое общество не было только местом, где регистрировались отдельные математические результаты, где читались популярные лекции по математике. Московское математическое общество было школой математической эстетики, математического вкуса, очень взыскательного, и школой математической этики, научной этики, тоже очень взыскательной...». В тяжелые периоды переживаемые отечественной математикой Общество не колеблясь брало на себя роль общества национального. Сегодня российская математика переживает именно такой период. И мы хотим выразить надежду на успешность дальнейшей деятельности Общества, которое в своем развитии будет продолжать исполнение возложенной на себя высокой миссии – «содействовать развитию математических наук в России».

Библиографический список

1. *Юшкевич, А.П.* История математики в России до 1917 года [Текст] / А.П. Юшкевич / М., 1968.
2. *Токарева, Т.А.* Филоматический пролог Московского математического общества [Текст] / Т.А.Токарева / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2002. Вып. 7(42). С. 39–61.
3. Материалы для истории Московского математического общества [Текст] // Математический сборник. 1889. Т. XIV. Вып. 3. С. 472–474]
4. Устав Московского математического общества [Текст] // Математический сборник. 1867. Т. II. Вып. 1. С. III–VI.
5. *Демидов, С.С.* «Математический Сборник» в 1866–1935 гг [Текст] / С.С. Демидов / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 1996. Вып. 1(36). № 2. С. 127–145.
6. *Демидов, С.С.* Н.В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного [Текст] / С.С. Демидов / Историко-математические исследования. М., 1985. Вып. 29. С.113–124.
7. *Демидов, С.С.* Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия [Текст] / С.С. Демидов / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 1999. Вып. 4 (39). С. 122–156.
8. *Половинкин, С.М.* О студенческом математическом кружке при Московском математическом обществе в 1902–1903[Текст]/ Половинкин С.М./ Историко-математические исследования. М., 1986. Вып. 30. С. 148–158.
9. *Флоренский, П.А.* Черновик выступления на открытии студенческого математического кружка при Московском математическом обществе [Текст] / П.А.Флоренский / Историко-математические исследования. М., 1990. Вып. 32–33. С. 467–473.
10. *Токарева, Т.А.* Первые съезды отечественных математиков: предыстория и формирование Советской математической школы [Текст] / Т.А. Токарева / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2001. Вып. 6(41). С. 213–231.
11. Дело академика Николая Николаевича Лузина [Текст] СПб: РХГИ, 1999.
12. *Токарева, Т.А.* Белое пятно, или черные страницы в истории Московского математического общества [Текст] / Т.А. Токарева / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2007. Вып. 12(47). С. 104–124.
13. *Александров, П.С.* Вступительный доклад на торжественном заседании Московского математического общества 20 октября 1964 г. [Текст] / П.С.Александров / Успехи математических наук. 1965. Т. XX. Вып. 3(123). С. 4–9.

Эволюция методической системы обучения математике: проектирование, моделирование, технологизация, информатизация, инновационный режим модернизации

В.М. Монахов, С.А. Тихомиров

Современная модернизация образования и ее проблемы носят фундаментальный и устойчивый характер, а к ожидаемым результатам модернизации предъявляются такие глобальные требования, которые по своим политическим последствиям предполагают и соответствующие философские, методологические, дидактические и управленческие подходы. Почему? Один из возможных ответов можно найти в монографии О.Н.Смолина [1], где дана теоретическая модель образовательной политики и её законодательного обеспечения. О.Н.Смолин рассматривает радикальное преобразование российского общества в контексте трансформации образования и науки, а образовательную политику в контексте развития человеческого потенциала. «Россия находится в состоянии выбора: либо ускоренная, но органическая модернизация (что не тождественно вестернизации), либо переход в разряд стран “третьего мира” с шансами остаться среди них навсегда»[1]. И еще: «**В современной России… удалось сохранить значительный интеллектуальный потенциал и богатые традиции наиболее передовых и успешных образовательных технологий**».

В настоящее время можно констатировать, что в обществе и у педагогической общественности не сформировалось общепринятого и обоснованного *понимания* того, что такое модернизация образования. Налицо достаточно существенные расхождения в многообразии смыслов модернизации. Поэтому очевидна необходимость создания соответствующей **идеологии мониторинга процесса модернизации**, отслеживающего траекторию модернизации, начиная *от глобальной цели модернизации и до конечного результата* в виде многопараметрической экспертной оценки. Главным **критерием качества** проводимой модернизации естественно должно стать **качество выпускника школы** как некоего культуросообразного продукта, которого не было до модернизации, но который, т.е. выпускник школы, став **полноправным гражданином страны, обеспечит выход России из стран третьего мира**. Из последнего положения с очевидностью следует необходимость исследования и решения задачи создания **инновационной теории дидактического результата**. В XX веке в педагогике получила распространение идея формулировать педагогические цели в образе ожидаемого или желаемого результата. При этом необходимо получить ответы на ряд вопросов, ранее не стоявших перед педагогической наукой: ***как*** создавать и использовать **структуры исследовательского пространства модернизации**, ***как*** разрабатывать **инновационные методы моделирования педагогических и дидактических результатов,** т.е. моделей проектируемых объектов**,** ***каковы*** **алгоритмы решения** современных дидактических задач. Анализ возможностей решения вышеуказанных задач выявил ряд кризисных областей. *Основная зона кризиса* не только отечественного, но и *мирового образования, это* ***целеполагание,*** *т.е. необходимость правильного понимания и осознания* того, что мы хотим получить на выходе в результате предстоящей проектировочной деятельности или экспериментальных педагогических исследований.

Следующая зона кризиса – это непонимание того, что, к глубокому сожалению, педагогическая наука не обладает точными методами решения дидактических задач. До сих пор все решается или волевыми методами, или методами, не имеющими ничего общего с наукой. Видимо следует осознать разницу между точными методами и приближёнными методами. При реформировании и модернизации отечественного образования не были в должной степени использованы философия и методология педагогического проектирования. Не лишним будет напомнить, что педагогическое проектирование позволяет достаточно точно представить вектор движения к цели, целесообразную последовательность этапов проектировочной деятельности, логическую структуру содержания пути исследования от поставленной цели к ожидаемому результату [8].

Еще *одной зоной кризиса* является отсутствие философского обоснования *соотношения* между проектировочной деятельностью по решению дидактической проблемы и экспериментальной деятельностью, подтверждающей или не подтверждающей правомочность или неправомочность *построенной модели* объекта или системы. Проблема соотнесения получаемого результата с ранее поставленной целью порождает целый спектр вопросов: как выбирать *оценочные параметры* для такого сравнения, какие *отклонения* допустимы.

Многие исследователи серьёзно обеспокоены вопросами выхода из перечисленных зон кризиса. Так А.В. Боровских и Н.Х. Розов **[4,с.74]** отмечают, что:

«**а)** Современное состояние педагогической аргументации явно неудовлетворительно. Она использует целый ряд логических систем, подчас противоречащих друг другу уже в исходных посылках...

б) Реальная педагогическая деятельность не дает решения возникших вопросов, поскольку сама изобилует хаотичными и бессвязными инициативами и инновациями. **в)** Проблемы образования являются системными и упираются в главный вопрос – о целях образования».

Системные проблемы отечественного образования требуют и системного анализа как самого процесса, так и результатов модернизации образования. Такой системный анализ был сделан В.А.Сухомлиным **[16].** Он констатирует следующее: «В ФГОС используется **примитивнейшая модель компетенции**»; «В мировой образовательной практике давно применяются гораздо более искусные системы компетенций, в том числе использующие **специальные метрики для количественной оценки компетенций - целей обучения**. Такие системы основаны на описаниях **стандартизованных объемов знаний**»; «…весь мир вовлечен **в процесс проектирования знаний**, и эти знания есть **основной продукт** и **товар** в обществе». Вышеприведенное убедительно показывает, насколько «**дезориентирован вектор методической работы системы ВПО**». Если суммировать приведенные цитаты безусловных авторитетов в области высшего профессионального образования, то мы приходим к следующему выводу эволюция и переналадка методической системы обучения математике при реализации ФГОС затрагивает основные методические понятия и встраивает в них целый ряд **инновационных методических функций**, о которых речь будет дальше.

Но перед этим несколько слов об инновациях, о процессе реализации инноваций и о полезности инноваций глазами авторитетных ученых МГУ им.М.В.Ломоносова **[19].**

Прежде всего приходится констатировать весьма низкий государственный спрос на реальные инновации в области образования и весьма скромные шаги в деле *институционального* обеспечения инновационного образования. Много проблем и в деле коммерциализации существующего *научно-технологического потенциала* в области образования. Здесь речь идет о трансформации уже имеющихся исследовательских заделов в рыночно-эффективные продукты. Уже отмеченное наличие институциального вакуума, когда финальные стадии педагогических инноваций оказываются в положении, в котором их просто некому обеспечивать. Одним из важнейших ограничений перехода России на инновационный путь развития является слабость позиций России на мировом рынке инноваций и высокотехнологичных продуктов. Объем мирового рынка наукоемкой продукции оценивается в 2 триллиона 300 миллиардов долларов. Причем на долю Америки приходится 39%, а на долю России 0,3%.... **[19,** с.88, А.И.Колганов]. На фоне этой сопоставительной картины весьма грустно анализировать процесс фактического самоотказа от фундаментальных достижений и преимуществ системы отечественного образования и нашей методической науки, которая однако не смогла в должной мере представить нашу ***школьную систему в виде, который радикально влиял бы на мировую школу.*** Авторы отчетливо понимают весь джентельменский набор трудностей, который бы пришлось преодолевать в условиях фактической технологической монополии наиболее развитых держав и происходящего болонского процесса. Ставится под сомнение вообще наличие в России национальной **инновационной системы как целостного явления**. Крайне *слабы факторы*, определяющие потребность в создании соответствующих *институтов инновационного развития*. Под институтами в нашем контексте понимаются некие сложившиеся "*правила игры*", т.е. формальные и неформальные правила в обществе, в том числе и мероприятия по их установлению. В последние двадцать лет в области российского образования сложилась модель развития образования, которая в первую очередь опирается на *факторы, вообще несвязанные с технологическими инновациями*. Другой фактор, о котором надо говорить особо в аспекте развития отечественного образования, - это переход на **структуру и стандарты капиталистического образования** и полное игнорирование нашей отечественной системы воспитания в условиях *всеохватывающей системы образовательных услуг.* Предпринимаемые попытки в этих условиях дожидаться формирования **эффективных институтов и систем инновационного развития** могут привести к окончательной утрате остатков инновационного потенциала и к необратимой в среднесрочной перспективе деградации всего российского образования. Следует помнить о том, что инновационный путь развития требует больших затрат. Почему? По мнению многих источников из всех инноваций только **5 процентов** оказываются полезными, а из этих пяти процентов только **1,7 процентов** получают полезное завершение или, как принято говорить успешную *коммерциализацию*. Другими словами, **99,9 процентов** всех инноваций оказываются **бессмысленными**. Ожидаемый подъем и инновационный режим развития системы образования или ее упадок, по мнению экспертов **[19,** с.66, В.Г. Белолипецкий**]** в той или иной степени связан с *необходимостью соответствующей адаптации институциональных рамок*, возможно даже институциональных инноваций. Другими словами, именно институциональная среда оказывает решающее влияние на характер и успешность реализации инноваций. Нам представляется далеко неправильным тезис о *догоняющем образовательном развитии*. В методическом плане нам не нужна практика заимствования технологических нововведений. Что касается заимствования институциональных рамок, то догоняющим странам часто приходится создавать собственные нововведения для обеспечения *устойчивого роста* в долгосрочной перспективе! САМОЕ ГЛАВНОЕ в проводимом анализе заключается в том, что Россия среди догоняющих стран занимает **особое место**. Но не только вследствие наличия богатых природных ресурсов, но и благодаря достаточно **хорошо развитой системе образования**, значительному научному базису и технологическим НОУ-ХАУ. Перечисленное наследие советских времен в целом представляет гораздо **более *значительный инновационный потенциал*** чем тот, которым сегодня располагают другие страны с сопоставимым ВВП. Так что же надо сделать? Прежде всего создать необходимые ***рамочные институциональные условия,*** обеспечивающие реализацию инновационных возможностей. Инновации надо рассматривать как основные движущие элементы непрерывных изменений. Согласно эволюционному подходу рассматриваемый процесс по своей природе историчен,- а это значит, что **настоящее и прошлое взаимосвязаны.** Следует заметить, что эволюция - принципиально открытый процесс, который генерирует новшества, но последствия которого **непредсказуемы [19.**с.95-103, С.Айхелькраут**].** Существует суждение, что инновационный потенциал образовательной системы зависит от того, какое пространство и какие стимулы эта система предоставляет для ***экспериментирования с альтернативными возможностями***. Жизнеспособность системы образования в значительной степени зависит от того, насколько она умеет приспосабливаться к окружающей среде и ее изменениям **[10] - самоорганизация системы и ее саморазвитие!!**

Далее приводятся наиболее радикальные дидактические и методические ***новшества*** в области методики обучения математике (и не только), которые в определенной степени уже оказали и продолжают оказывать влияние на эволюцию методической системы обучения и о которых не следует забывать в это ответственное для нашего отечественного образования время. **"Ключ к инновационному прорыву находится в руках ученых и преподавателей, которые формируют мировоззрение и целевые установки новых поколений"** [19, с.113, Ю.В. Яковец]**.**[*]

1. Конструирование самодостаточной **модели** учебного процесса - ***параметрической модели***, состоящей из пяти **параметров** - *целеполагание, диагностика, коррекция, дозирование, логическая структура* - и широкое практическое распространение такой модели в профессиональной деятельности учительства России **[2] (рис1).**

---

[*] С 1990 г. по 2012 г. проводился многоэтапный масштабный педагогический эксперимент по апробированию и развитию педагогических технологий В.М.Монахова. Было создано 12 разных моделей внедрения технологий на экспериментальных площадках в Туле, Симферополе, Ульяновске, Донецке, Новокузнецке, Прокопьевске, Кургане, Шадринске, Тольятти, Волгограде, Волжске, Алматы, Кызылорде, Минске с учетом местных условий и факторов. Базовых школ было более 200, а всего школ, освоивших технологии, по данным отдела писем газеты "Педагогический вестник" более 6000. Практически по большинству предметов и классов были созданы совместно с учителями базовых школ экспериментальные школьные технологические учебники. После их издания они в течение ряда лет использовались во многих школах. В 1997 г. в Новокузнецке была проведена Межрегиональная научно-практическая конференция "Педагогические технологии В.М.Монахова: методология, внедрение, развитие".

2. Разработка и введение в учительскую образовательную среду **технологической карты - ТК** как *проекта учебного* процесса в границах одной учебной темы. (**рис.2**). Естественно, что в основу технологической карты и была положена *параметрическая модель* учебного процесса **[2] (рис.2).**

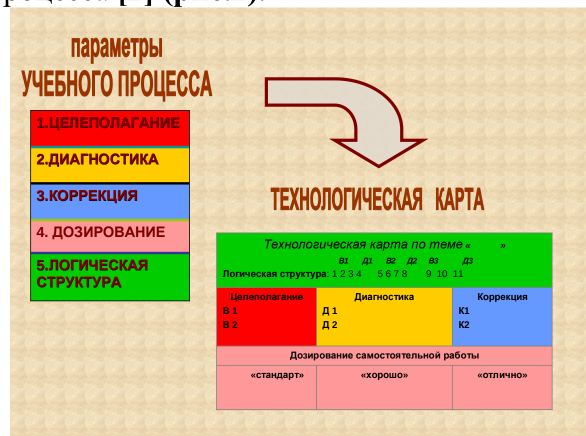


Рис.1 **Рис.2**

3. Серьезным шагом в *технологизации и инструментализации* методической системы стало добавление компонента **"Управление"** в модель **МСО,** построенной на базе дидактической системы В.П.Беспалько (**рис.3**). Далее поиск новых *инновационных структур управленческого процесса*, трактовка управления как *управленческого процесса* и исследование возможностей **автоматизации** управленческого процесса **(рис.4),** переводя сам процесс управления на язык технологической карты **[17], [14]**.

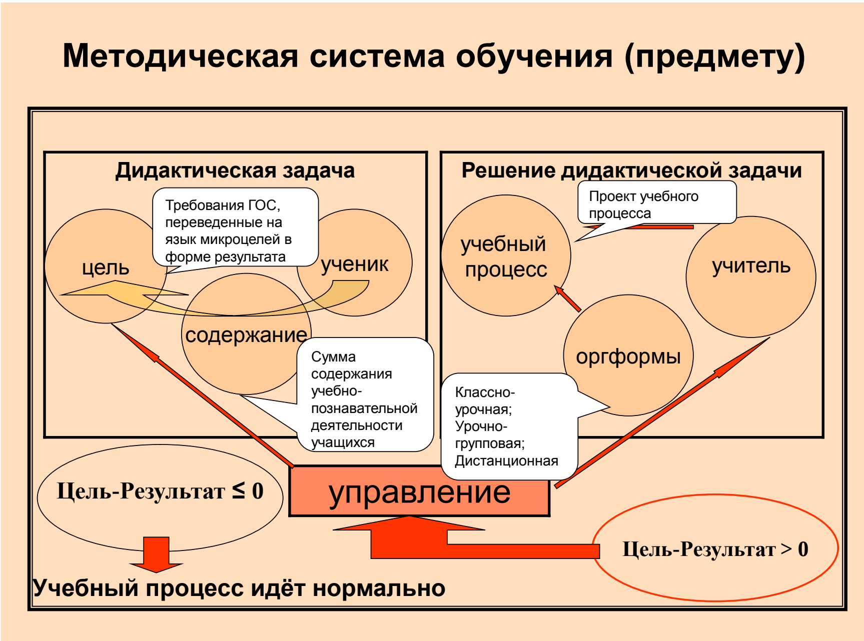

Методическая система обучения (предмету)
Дидактическая задача
Требования ГОС, переведенные на язык микроцелей в форме результата
цель
ученик
содержание
Сумма содержания учебно-познавательной деятельности учащихся
Решение дидактической задачи
Проект учебного процесса
учебный процесс
учитель
оргформы
Классно-урочная; Урочно-групповая; Дистанционная
управление
Цель-Результат ≤ 0
Цель-Результат > 0
Учебный процесс идёт нормально

Рис. 3

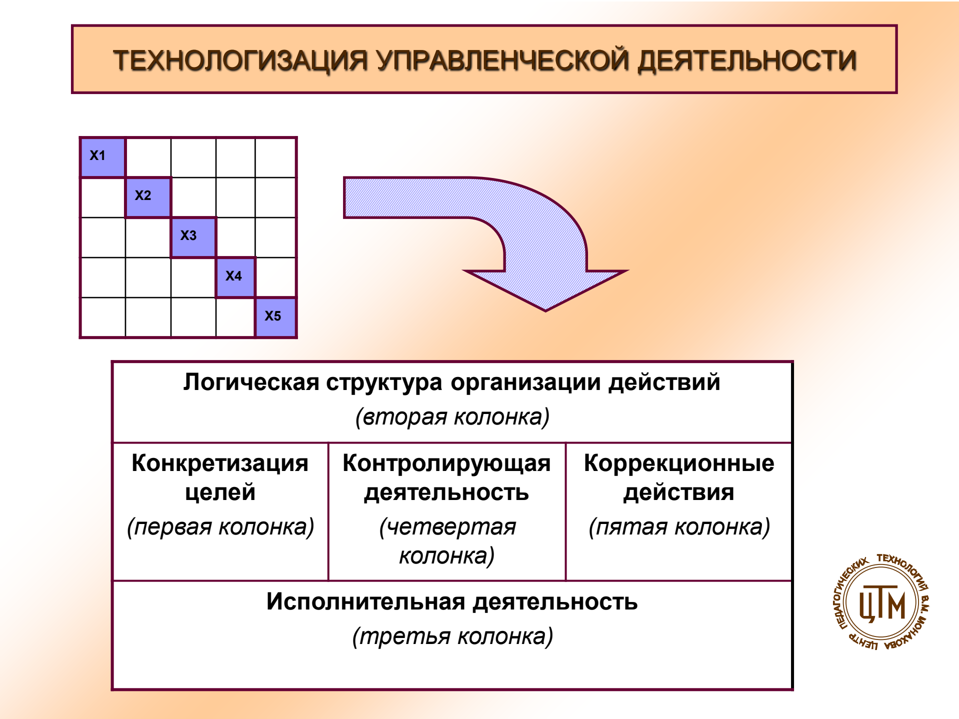


Рис.4

4. Создание и широкое внедрение **системы профилактики типичных ошибок**, как функционирование компонента ТК **"Коррекция",** включая: созданную большим коллективом учителей России своего рода *энциклопедию* типичных математических ошибок по классам, *технологию* профилактики типичных ошибок. Особо следует обратить внимание на **наказ учительства** методической науке рассматривать понятие типичной ошибки как ***объективный фактор развития*** самой методики обучения математике**. [5], [6], [11].**

5. Инновационный вид методической работы учителя с компонентом **"Логическая структура" ТК** и создание для учителя с учетом его профессиональных интересов объективной ***методики оптимизации логической структуры*** технологической карты, и самого реального учебного процесса. Еще раз посмотрим на эти комоненты МСО. **"Цель".** Результаты исследования взаимосвязей следующих *пар компонент*: цель - учебник (его содержание), цель - учебная программа, цель - система микроцелей ТК, цель - содержание ФГОС, предоставили возможность *оптимизировать логическую структуру* учебного предмета. Следует различать оптимальность для учителя и оптимальность для учащихся. Для последних на первый план выступает естественность и органичность введения, формирования и усвоения основных понятий. Оценив взаимосвязь цели предмета и микроцелей учебной темы, можно более наглядно и предельно четко представить *планируемые результаты* обучения, другими словами, установить однозначное соответствие между заявленными во ФГОСе *компетенциями и микроцелями*. После такого методического анализа компонента **цель** можно обоснованно сформулировать и задать основные *методические требования* к компоненту **содержание:**

- логическая структура предмета,
- номенклатура формируемых компетенций**,**
- внутрипредметные связи понятийно-категориального аппарата,
- необходимый планируемый уровень раскрытия понятий.

"Содержание". Из предыдущего мы имеем**: а)** заданную логическую структуру, **б)** единицу содержания в виде учебной темы, **в)** планируемые результаты обучения по каждой теме**, г)** что и в какой последовательности надо проверять в процессе изучения темы и при ее завершении.

Главные *методические инновации*: **а)** язык микроцелей, **б)** необходимость представления содержания в виде, удобном для проектирования учебного процесса, при этом вид представления содержания диктуется моделью будущего учебного процесса (пять параметров, которые при проектировании последовательно *проявляются*!), **в)** в содержании представлены три составляющих: *первая* – **диагностика** - это то, что будет *диагностироваться, вторая* - **дозирование** - это то, что обеспечивает *гарантированность* успешной диагностики, *третья* составляющая - это **коррекционная профилактика** прогнозируемых затруднений и типичных ошибок при освоении содержания. *Важный нюанс*: обязательное участие самого учителя и преподавателя при формировании и проектировании содержания. Именно это **де-факто** современной *методической культуры преподавателя*! *Инновационное представление* содержания в виде, специально подготовленном к **технологическому мониторингу качества его усвоения.**

"Учебный процесс" представляется в виде проекта, состоящего из *технологических карт. Инновационные требования:* каждая микроцель оперативно диагностируется, ведется постоянный мониторинг результатов всех диагностик и визуализация результатов учебного процесса в виде *индивидуальных траекторий* каждого обучаемого (обучаемый сам сравнивает желаемую траекторию с реально выданной компьютором) и *спектрального портрета группы* в целом (преподаватель получает с компьютера распечатанные методические рекомендации по улучшению уже использованного варианта проекта учебного процесса).

"Обучаемый" получает возможность **самостоятельно** выбирать уровень успешного обучения. Остальные компоненты **МСО** в полной мере обеспечивают для конкретного обучаемого его выбор уровня успешности. В итоге резко увеличивается активность и самостоятельность обучаемых.

"Учитель" профессионально осваивает весь спектр вышеприведенных *инновационных методических функций.*

Новые аспекты методических функций технологической карты при **сопровождении учебного процесса**: проектирование, чтение, язык общения учителя и учеников между собой **[9].**

7. Использование результатов исследований модели **целостного процесса формирования компетенций**, представленных в ФГОС ВПО, как принципиально нового *методического обеспечения*. Использование результатов исследований проблемы **методических функций мониторинга формирования компетенций** при создании **технологического мониторинга** в форме **компьютерной системы аналитической обработки** результатов диагностик, основанной на *принципиально иной природе оценки*, органично соединившей в себе процесс формирования компетенции и процесс установления *самого факта сформированности* компетенции, ее полноты и уровня **[8], [9] (рис. 5).**

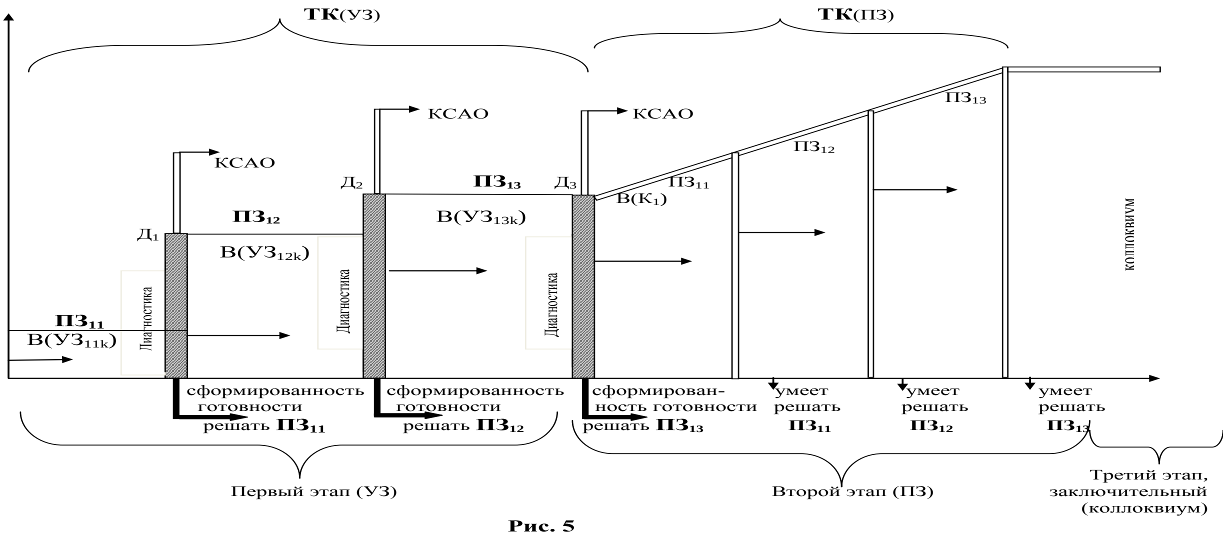


Рис. 5

8. Исследование современных *проблем школьного и вузовского учебников*: аспекты технологизации и информатизации. Создание принципиально новой модели **технологического школьного учебника по математике полного цикла** и экспериментальное уточнение *новых методических функций* такого учебника в отличии от концепции В.В.Воеводина и Вл.В.Воеводина электронной энциклопедии "ЛИНЕАЛ". ***Полный цикл*** подразумевает в технологическом учебнике соединение в единое целое *формирование* компетенций, задаваемых ФГОС, и технологический *мониторинг* качества формируемых у каждого обучаемого той или иной компетенции **[9], [13], [15].**

9. **Визуализация информации** технологического мониторинга для учителя и учащихся, для преподавателя и студентов. Особо принципиально при визуализации обязательно учитывать различные *функции визуализации информации* отдельно для учителя и отдельно для учащихся, для преподавателя и студентов! [**[5], [13]**.

10. Многолетнее исследование фундаментальной проблемы **инструментализации методики обучения математике** в плане ухода от приближенных или "волевых" решений дидактических и методических задач и первые экспериментальные попытки реализации идеи **алгоритмически - точного решения** вышеуказанных проблем**. [2], [14].** В 2010 г. ректор МГУ академик РАН В.А.Садовничий, выступая на Всероссийском съезде учителей математики, обратил внимание на то обстоятельство, что до недавнего времени в математике большой класс задач не имел «формульно-точных» решений. В математике "...задачи, ранее не решавшиеся «формульно-точно», стали исследоваться сегодня «компьютерно», т.е. приближенно, а затем на этой основе часто удается сделать строго математически доказанные выводы. Тем самым, постепенно расширяется и меняется само понятие доказательства. Появляющаяся дискретно-компьютерная составляющая стала довольно часто рассматриваться как необходимый первый этап исследований особо сложных научных задач. В последнее время существенно вырос процент «компьютерно угаданных», а потом строго математически доказанных теорем" **[4, с.10-11].**

11. Реализация концептуальной идеи использования категории "**заданные свойства**" при проектировании методических систем. Разработка **технологии проектирования** модели педагогического объекта **с заданными свойствами.** Напомним, что в 90-е годы Министерство просвещения в течении ряда лет так и не смогло перейти на двенадцатилетку. Почему? Одним из ответов может быть то, что необходимая для перехода технология только начала создаваться **[6], [7].**

12. Канонизация формулировки методических и дидактических задач и проблем. Цель канонизации - предельно однозначно определиться с поставленными задачами исследования, т.е. четко понимать, **что** хотим получить в результате решения! Это фактически стало *предтечей* возникновения другой не менее фундаментальной и современной идеи создания **теории дидактического результата.**

Дано:	**следующие заданные свойства модели объекта**: 1)... 2)... 3)...
Необходимо построить:	Модель педагогического объекта, которая обладала бы всеми наперед **заданными свойствами**.

Эта ***канонизированная форма и заданные свойства*** проектируемых педагогических объектов в инструментальной дидактике должны стать основополагающим и системообразующим ***методологическим основанием*** для решения задач модернизации и для создания дидактического инструментария.

13. Разработка и внедрение в исследовательскую практику ***четырехэтапного процесса*** **алгоритмически -точного решения методических и дидактических задач и проблем.** Именно с этих четырех этапов начинает продуктивно работать **структура** алгоритмически-точного решения, существенно усиливая *определенность* самого процесса методических и дидактических исследований:

Первый этап. *Построение* ***первоначальной математической модели*** возможного решения дидактической задачи.

Второй этап. "***Внутримодельные исследования"*** глубинных закономерностей поведения модели педагогического объекта в "рабочем исследовательском поле", в результате чего получаем существенно уточненное представление *о поведении* проектируемого педагогического объекта.

Третий этап. *Специально организованный "****натурный педагогический эксперимент"*** *и управление его проведением*, в задачи которого входит проверить в реальной образовательной практике **основные параметры** существенно уточненной модели педагогического объекта после второго этапа.

Четвертый этап. *"****Многопараметрическая экспертиза"*** полученного дидактического решения на *адекватность наперед заданным свойствам*, которые содержатся в государственном заказе на модернизацию **[14].**

14. Реализация идеи о необходимости и важности **"Внутримодельного исследования**" поведения спроектированной модели педагогического объекта. Это принципиально новый подход в методических исследованиях, позволяющий выявить целый ряд основных *параметров* поведения модели педагогического объекта в образовательном пространстве, оптимизировать число этих параметров, обеспечив возможность адекватно соотнести получаемые результаты с поставленными целями **[12].**

15. Концептуальное обоснование и реализация идеи **"Натурного эксперимента"**, для которого должно стать обязательным *жесткое и строгое задание* условий организации и проведение педагогического эксперимента. ***Стандартизация основных задач и процедур "натурного эксперимента"*** с моделью педагогического объекта в реальном образовательном пространстве повышает вероятность получения исследователем ***достоверных данных*** **[14].**

16. Выдвижение, обоснование и реализация идеи **"Многопараметрической экспертизы**" полученного дидактического результата**.** "**Многопараметрическая экспертиза"** дидактических результатов функционирования модели педагогического объекта как на этапе *внутримодельного исследования* поведения модели, т.е. теоретического исследования, так и на этапе *натурного эксперимента, способствует существенной объективизации дидактического результата* **[14].**

17. Реализация идеи *дидактической оптимальной адаптивной системы проектирования процесса модернизации* **- ДСМ**, как своего рода нового структурного **центра управленческих процессов** проходящей модернизации системы образования [**3**] **(рис. 6).**

ВЕКТОР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЭТАПОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРОЦЕСС ДОПУСТИМЫХ КОРРЕКЦИЙ, ВЕДУЩИЙ К ОПТИМАЛЬНОМУ ФУНКЦИОНИРОВАНИЮ ОБЪЕКТА

ВЕКТОР, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЙ ДЕТЕРМИНИРОВАНИЕ ЦЕЛИ И ОБСЛУЖИВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМОРАЗВИТИЯ

СТРУКТУРЫ ОС	ПРОЦЕССЫ				
	Определение целевого множества	**Определение дидактических условий**	**Определение возможных системных изменений объекта**	**Фиксация результатов системных изменений**	**Проектирование программы коррекционных действий**
Ресурсы	**Прогностическая модель**	Возможности ресурсов	Проектирование распределения ресурсов	Систематизация параметрических изменений	Обеспечение ресурсами
Информационное пространство	Вероятностная оценка прогнозирования достижения цели	**Концептуальная модель**	Проектирование перспективных системных изменений в компонентах	Формирование информационного поля результатов системных изменений	Отбор системных изменений, не давших прогнозируемых результатов
Команды исполнителей	Профессиональное обучение команд исполнителей	Предметное поле профессиональной деятельности исполнителей	**Инструментальная модель**	Фиксация результатов изменений и их анализ	Программа ликвидации несоответствий
Обратная связь	Определение оптимальной функции обратной связи	Определение параметрического критерия достижения цели	Дидактический инструментарий проведения диагностики	**Мониторинговая модель**	Систематизация результатов диагностики
Неопределенности и противоречия в результате	Прогнозирование затруднений	Опыт ликвидации возможных недостатков	Имеющийся алгоритм устранения недостатков	Систематизация имеющихся алгоритмов для нейтрализации имеющихся недостатков	**Рефлексивная модель**

Рис. 6

18. Целостное осмысление, систематизация и методический анализ всех вышеперечисленных промежуточных результатов эволюции с целью создания **современной модели методической системы обучения математике** с обязательным *технологическим мониторингом и новой структурой управления, и обязательным выводом на печать методических рекомендаций преподавателю по оптимизации как проекта, так и самого учебного процесса, и предоставление каждому студенту его индивидуальной траектории успехов* **[7], [8] (рис.7).**

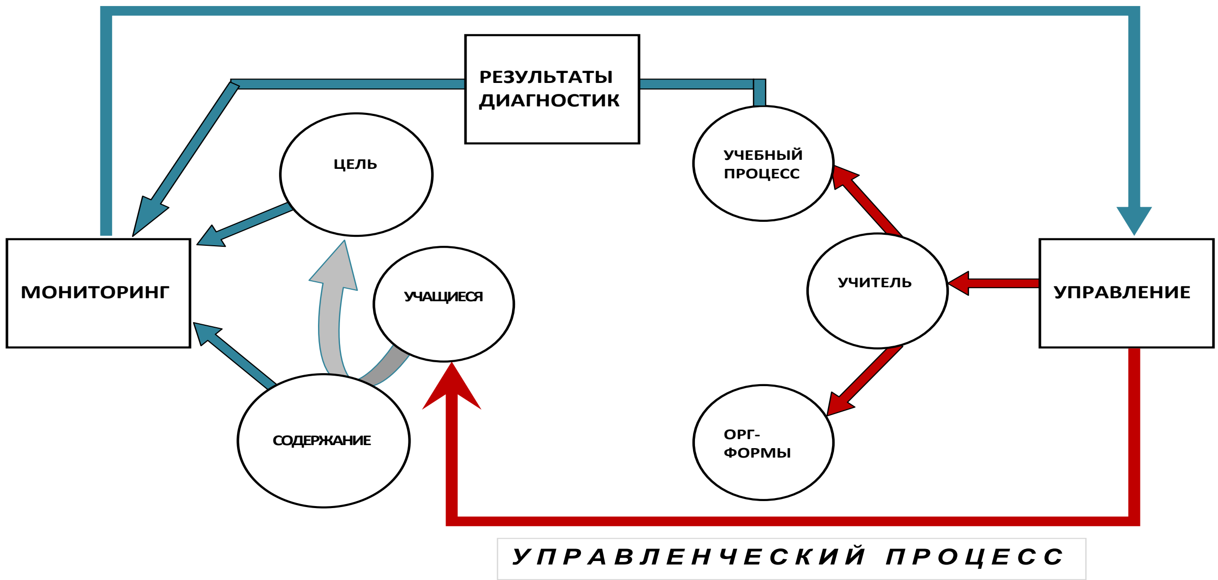


Рис. 7

19. Дальнейшая инструментализация алгоритмически-точных решений дидактических задач.

Исследование глубинных закономерностей процесса обучения остается по-прежнему актуальным. Сегодня на мехмате МГУ исследуются компьютерные интеллектуальные системы, связанные с учебным процессом. Фактически их можно классифицировать по трем направлениям**:** ***распознающие системы, думающие системы****,* ***обучающие системы****.*

Первое направление ***«Учебный процесс – как целенаправленное распознавание образов дидактической информации».*** В отечественном образовании этому направлению положили начало известные пионерские работы М.М. Бонгарда (60-е гг. ХХ в.), который с помощью нейросетевых моделей (перцептрона Ф. Розенблатта) реализовал программы «Арифметика» (распознавание числовых таблиц, построенных по разным арифметическим законам) и «Геометрия» (распознавание геометрических образов в виде биполярных клеток. Хочется напомнить один из результатов М.М. Бонгарда, который буквально ошеломил математическую и программистскую общественность. Речь шла о решении задачи распознавания электронными вычислительными машинами (той эпохи) цифр, предложенных им в рукописном виде. М.М. Бонгард предъявил блоку ввода информации 800 самых разнообразных начертаний цифры «2». Сегодня можно лишь догадываться, каких только «каракулей» не было в этом множестве. ЭВМ только в двух случаях не распознала цифру «2», а в 798 случаях однозначно оперировала с цифрой «2»! К сожалению, М.М. Бонгард не смог эти работы продолжить, жизнь альпиниста оборвалась при восхождении в горах Памира.

Второе направление – это ***«понимание»*** поставленной задачи посредством извлечения семантического смысла из текстов и чертежей.

Третье – обучающие системы, ***моделирующие*** деятельность учителя и уровни подготовки учащихся **[4].**

Следует особо подчеркнуть важность инструментализации в такой области как геометрия – области в силу ряда объективных и субъективных причин трудно поддающейся инновационному развитию. Еще Г. Биркгофф, говоря о сложности геометрии, отмечал: «…Усвоение и проверка ее истин включают трудную задачу координации нескольких человеческих способностей» [20]. Преодоление трудностей инновационного развития геометрии мы увязываем с формированием у школьников алгебро-геометрического мышления. Алгебра и геометрия - два важнейших взгляда на математические проблемы, они часто играют взаимодополняющие роли: геометрия позволяет "увидеть идею", а алгебра - подвести под неё необходимую формальную базу, развить её и обобщить. Именно гармоничному сочетанию этих подходов обязана своим успехом алгебраическая геометрия.

И.Ф. Шарыгин называл геометрию «витамином для мозга» и утверждал: «*…Первонаука, которой является геометрия, получила новый толчок к развитию, как образовательный предмет и как наука, благодаря самым современным компьютерным технологиям...*»[21]. Позиция И.Ф. Шарыгина во многом справедлива - привлечение популярных программных пакетов, средств информатизации, алгоритмических методов исследования и в самом деле зачастую помогает вскрыть ряд интересных закономерностей (строгое доказательство которых, тем не менее, необходимо), сформулировать нестандартные гипотезы и т.п. [22]. Параллельно, говоря о процессе обучения, следует всецело осознать и важность постановки акцента (в нужное время и в нужном месте!) на решение задач многоцелевого использования, чтобы иметь возможность систематически демонстрировать учащимся интегративность математического знания. Необходимо также более активное внедрение прогрессивных локальных методик, основанных на «краеугольном» для математики факторе наглядности в обучении – своеобразных «инструментальных механизмов» внедрения наглядности [23], [24].

Библиографический список

1. *Смолин, О.Н.* Образование. Политика. Закон. Федеральное законодательство как фактор образовательной законодательной политики современной России [Текст] / О.Н. Смолин / М., 2010.
2. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий: Монография [Текст] / В.М. Монахов / Волгоград: Изд-во «Перемена», 2006.
3. *Ерина, Т.М.* Нужна ли сегодня адаптивная оптимальная система модернизации с наперед заданными свойствами [Текст] / Т.М. Ерина, В.М. Монахов / Известия ВГСПУ.2013.№7 (82). С.44-51.
4. *Садовничий, В.А.* О математике и ее преподавании в школе [Текст] / В.А. Садовничий / – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.
5. *Монахов, В.М.* Информатизация учебно–методического обеспечения целостного процесса формирования компетенций и технологического мониторинга управления их качеством [Текст] / В.М. Монахов / Вестник МГГУ. 2012. №4. С.46-59.
6. *Монахов, В.М.* Технология проектирования методической системы с заданными свойствами в высшей школе [Текст] / В.М. Монахов / Педагогика. 2011. №6. С.43-46.
7. *Монахов, В.М.* Технолого – инструментальные основания проектирования методической системы преподавания с наперед заданными свойствами в условиях ФГОС III поколения [Текст] / В.М. Монахов / Вестник Московского университета серии 20. Педагогическое образование. 2012. №1. С.50-56.
8. *Монахов, В.М.* Компетентностно – контекстный формат обучения и проектирование образовательных модулей [Текст] / В.М. Монахов / Вестник МГГУ им. М.А. Шолохова. 2012. №1
9. *Монахов, В.М.* О модели вузовского технологического учебника полного цикла, обеспечивающего реализацию ФГОС ВПО [Текст] / В.М. Монахов / Педагогика. 2012. №10. С.17-25.
10. *Монахов, В.М.* Дидактический потенциал синергетического подхода к формированию общенаучного методологического основания модернизации образования [Текст] / В.М. Монахов, В.Е. Фирстов / Труды УШ Международной научно-практической конференции " Современные информационные технологии и ИТ- образование", 8-10 ноября 2013г. МГУ им.М.В.Ломоносова, с.108-123.
11. *Монахов, В.М.* Новая дидактика: технология проектирования современной модели дистанционного образования [Текст] / В.М. Монахов / М.: РИЦ «Альфа» МГОПУ им. М.А.Шолохова, 2002.-98 с.
12. *Власов, Д.А.* Математические модели и методы внутримодельных исследований: Монография [Текст] / Д.А. Власов, Н.В. Монахов, В.М. Монахов / – М.: 2007.
13. *Монахов, В.М.* Математика. Технологический учебник полного цикла [Текст] / В.М. Монахов, А.Г. Мусаелян, Д.Н. Монахов / – М.: Изд-во МГУП. 2012.
14. *Монахов, В.М.* Инструментальная дидактика: миф или реальность [Текст] / В.М. Монахов, Т.М. Ерина, Е.М. Архипова / Известия ВГСПУ. 2014. №2.
15. *Воеводин, В.В.* Энциклопедия линейной алгебры [Текст] / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин / Электронная система «ЛИНЕАЛ», С.-Петербург, БХВ-Петербург, 2006.
16. *Сухомлин, В.А.* Реформа высшей школы – анализ итогов [Текст] / В.А. Сухомлин / Сборник избранных трудов международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование», Москва, МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 2010.
17. *Беспалько, В.П.* Слагаемые педагогических технологий [Текст] / В.П. Беспалько / М.1989.
18. *Лазарев, В.С.* Новое понимание метода проектов в образовании [Текст] / В.С. Лазарев / Педагогика.2011.№

19. Экономический суверенитет и суверенная экономика. Коллективная монография под ред. Ю.М.Осипова, С.Ю.Синельникова, Е.С.Зотовой [Текст] МГУ им. М.В.Ломоносова, Экономический факультет, М, 2009
20. *Биркгофф, Г.* Математика и психология [Текст] / Г. Биркгофф / М.: Советское радио, 1977.
21. *Шарыгин, И.Ф.* Нужна ли школе 21-го века Геометрия ? [Текст] / И.Ф. Шарыгин / Матем. просв., сер. 3, 8, Изд-во МЦНМО, М., 2004, С. 37–52.
22. *Kytmanov A.A.* Finding Ein's components in moduli spaces of stable 2-bundles with c_1=0 on P^3 and calculation of spectra of such bundles [Текст] / A.A. Kytmanov, N.N. Osipov, S.A. Tikhomirov, T.L. Troshina / "Journal of Geometry and Physics", 2014, 0,6 п.л.
23. *Афанасьев В.В.* Наглядная математика: Монография [Текст] / В.В. Афанасьев, В.Н. Алексеев, С.А. Тихомиров / Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012.
24. *Афанасьев, В.В.* Наглядная математика. Часть 2: Монография [Текст] / В.В. Афанасьев, В.Н. Алексеев, С.А. Тихомиров / Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013.

Малоизвестный факт истории создания «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

Р.А. Симонов

Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) известен как автор замечательной математической энциклопедии «Арифметика», изданной в Москве в 1703 г.[1]. «Арифметика» включала знания по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии, физике, наблюдательной астрономии, морской навигации, геодезии и географии. М.В. Ломоносов назвал «Арифметику» Магницкого «вратами своей учености», наряду с «Грамматикой» Мелетия Смотрицкого и «Псалтырью рифмотворной» Симеона Полоцкого. «Арифметика» Магницкого – удивительный феномен русской книжной культуры. Она признается «одной из самых замечательных книг, созданных русскими авторами в течение XVIII века…»[2]. Считается, что «вопрос о зарубежных книгах, которыми располагал Магницкий, исследован не до конца»[3]. В этой связи заслуживает внимания вопрос о "некотором иноземце", "чтоб

---

[1] См., напр.: *Депман И.Я.* Л.Ф. Магницкий // *Депман И.Я.* История арифметики. 2-е изд. М., 1965. С. 341-353; *Юшкевич А.П.* «Арифметика» Магницкого // *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 58-71 *Симонов Р.А.* 300 лет «Арифметике» Леонтия Магницкого // Научная книга. 2003, № 3/4. С. 68-76, перепечатка: *Симонов Р.А.* 300 лет «Арифметике» Леонтия Магницкого // Селигер – родина Л.Ф. Магницкого, первого выдающегося русского учителя. Старица, 2010. С. 60-70; *Симонов Р.А.* Логистика в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого // Русская речь. 2004, № 2. С. 103-106; *Буланин Д.М.* Магницкий Леонтий Филиппович // Словарь книжников и книжности Древней Руси. СПб.., 2004. Вып. 3, часть 4. Дополнения. С. 481-487; *Гнеденко Б.В.* «Арифметика» Магницкого // *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России / Предисл. и коммент. С.С. Демидова. 2-е изд. М., 2005. С. 53-68; *Симонов Р.А.* Предыстория знаменитой «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (Москва, 1703 г.): малоизвестная арифметическая рукопись «некоторого иноземца» // XIII Международная научная конференция по проблемам книговедения «Книга в информационном обществе» (Москва, 28-30 апреля 2014 г.): В 4 ч. М., 2014. Ч. 1. С. 95-98.

[2] *Гнеденко Б.В.* «Арифметика» Магницкого // *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. 2-е изд. М., 2005. С. 53.

[3] *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 61.

ему печатать книги арифметики", обсуждавшийся в письме дьяка А.А. Курбатова царю Петру I от 22 июня 1701 года[4].

История с арифметикой «некоторого иноземца» была примерно такой (насколько позволяют источники): иноземец хотел, чтобы его книгу издали в России за государственный счет и заплатили гонорар. А.А. Курбатов же предлагал разрешить иноземцу печатать книгу за свой счет, а гонораром считать прибыль от ее продажи. Допуская, что иноземец откажется от такого невыгодного варианта, А.А. Курбатов договорился с Л.Ф. Магницким, что тот напишет аналогичную книгу, причем, за цену более, чем приемлемую, по сравнению с предполагавшемся гонораром иноземцу. Из письма следует, что А.А. Курбатов для работы Магницкого над арифметикой предоставил свой дом («И по моему, государь, убогому старанию он, Леонтий, сочиняет у меня в доме»). Курбатов считал, что книга Магницкого принесет выгоду казне («…От чего прибыток будет твоей государевой казне, а не иноземцу тому»).

Бросаются в глаза два факта, отмеченные в письме, на которые, кажется, не было обращено в историографии должного внимания. Первый: Курбатов брал к себе домой рукопись иноземца и давал ее для изучения Магницкому («Которую ево книгу брал я к себе и казал искусным во арифметике и геометрии Леонтью Магнитскому с товарыщи»). Второй: рукопись «иноземцевой книги» была написана на плохом славяно-русском языке, и ее смысл не был понятен («…Та ево иноземцова книга преведена на славянский диалект зело неисправно, и разуметь невозможно…»). Кроме того, в ней отсутствовали данные по геометрии, наблюдательной астрономии, навигации и др. вопросам.

Эти факты говорят о том, что для вынесения суждения об «иноземцевой книге» Магницкому пришлось много поработать над ней: по-видимому, существенно что-то уточнить, тщательно разобравшись в содержании. В условиях сжатых сроков, связанных с открытием основанной в январе 1701 г. Математико-навигацкой школы в Москве и возможным применением в ней «Арифметики», допустимо предположить, что Магницкий при ее составлении в значительном объеме мог использовать записи, образовавшиеся при работе над книгой иноземца.

В указанной связи заслуживает внимания интересный результат, который получил В.Е. Прудников при анализе книги Магницкого. Оказалось, что автор начальной части «Арифметики» «обнаружил большой педагогический талант»; наоборот, при «изложении Магницким алгебры и геометрии мы уже не найдем этой полноты и тщательности…»[5]. С этим согласуется мнение авторов четырехтомной «Истории отечественной математики», вышедшей десятилетием позже: «…В арифметической части книга Магницкого была написана на уровне европейских учебников того времени (начала XVIII в.- Р.С.), в части же алгебры она ближе всего подходила к учебникам алгебры конца XVI–начала XVII в.»[6]. Эти характеристики могут выражать беспристрастное мнение о том, что арифметическая часть книги Магницкого отличалась от остального материала. Напрашивающийся вывод о том, что на «Арифметику» могла повлиять «иноземцева книга», никак не умаляет значительность вклада Л.Ф. Магнитского в математическое просвещение России. Ведь он сам заявлял, что выступал составителем «Арифметики», которая была «с разных диалектов на славенский язык преведеная, и во едино собрана»[7].

Может создаться впечатление, что «Арифметика» Л.Ф. Магницкого могла отражать не гений ее русского автора, а достоинства «иноземцевой книги». Однако есть дополнительные аргументы в пользу приоритета Л.Ф. Магницкого в этом деле - аргументы, ранее

---

[4] Письмо издано в кн.: *Лаврентьев А.В.* Люди и вещи. Памятники русской истории и культуры XVI-XVIII вв., их создатели и владельцы. М., 1997. С. 76-77 (фототипическое воспроизведение), 104 (археографическое воспроизведение).

[5] *Прудников В.Е.* «Арифметика» Л.Ф. Магницкого // *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. М., 1956. С.24.

[6] *Швецов К.И. и др.* Развитие математических знаний в России в первой четверти XVIII в. // История отечественной математики: В 4-х т. Киев, 1966. Т. 1. С. 159-160.

[7] *Магницкий Л.Ф.* Арифметика, сиречь наука числителная. М., 1703. Титульный лист.

недостаточно известные или игнорируемые исследователями его творчества. Эти аргументы связаны со слабо изученным периодом жизни Л.Ф. Магницкого, когда он приехал в Москву из Осташкова, где родился. Этот период простирается примерно от его 15-летнего возраста до 30 лет (1699 г.), когда появляются о нем сведения в документах. Но именно этот период был наиболее важным в его формировании как личности. Где и каким образом проходило его становление как математика – об этом с достоверностью ничего неизвестно.

Ранним и достаточно авторитетным источником, приоткрывающим завесу тайны в этом вопросе, является эпитафия на могильном камне Л.Ф. Магницкого, составленная его сыном Иваном. Об обучении Л.Ф. Магницкого наукам здесь говорится кратко и неопределенно: «Наукам изучился дивным, и не(удобовероятным способом)» [8]. В соответствии с этимологическим словарем А.Г. Преображенского, слово «дивным» может значить «наблюдательным»[9]. Не совсем понятное словосочетание «неудобовероятным способом» можно условно истолковать как «странным способом». Получается, что Л.Ф. Магницкий мог обучиться математике неким странным образом в связи с выполнением наблюдений. Почему сын Л.Ф. Магницкого Иван как бы зашифровал наблюдательную деятельность своего отца, связанную с научными занятиями математикой? И что это за такая загадочная деятельность, о которой нельзя сказать прямо, чтобы не повредить репутации человека? Можно представить, что это астрология. Все-таки для вывода, что Л.Ф. Магницкий действительно мог профессионально заниматься астрологией, недостаточно косвенных данных, почерпанных из толкования слов эпитафии. Нужно прямое доказательство причастности Л.Ф. Магницкого к предсказательной деятельности. И оно есть.

Соответствующее доказательство зафиксировал в печати «первый биограф»[10] Л.Ф. Магницкого - В.Н. Берх: «Замечательно, что он («Магнитский» - уточнил Берх в переиздании своей работы 1835 г.) предъузнал кончину императора Петра I, и объявил о сем жене своей Марье Гавриловне». Как указал здесь же В.Н. Берх, эти сведения ему стали доступны благодаря семейным преданиям, «сообщенным мне внуком Л.Ф. М[агницкого] М.Л. Магнитским» [11]. С позиции научной археографии и документального источниковедения, “предание, не достоверное повествование”[12]. Но в данном случае достоверность информации, отраженной в предании, гарантировалась статусом информанта. Им был крупный государственный чиновник, действительный статский советник (чин соответствовал званию генерала) Михаил Леонтьевич Магницкий (1778-1855), правнук (а не внук) Л.Ф. Магницкого. В.Н. Берх не стал бы подвергать себя ненужным осложнениям и даже возможным преследованиям со стороны государственных служб, если бы приводимые им неизвестные или малоизвестные данные из жизни Петра I не были под серьезной информационной защитой в лице авторитетного в глазах властей родственника Л.Ф.

[8] *Серебрякова Е.И.* Надгробная плита Л.Ф. Магницкого // Памятники науки и техники (1987-1988). М., 1989. С. 239. Надгробная плита Магницкого сохранилась. Она находится в филиале Государственного исторического музея (Москва) – Покровском соборе (храме Василия Блаженного) (ГИМ. Ф. н/в 5639/39). Утраченные части текста восстановлены Е.И. Серебряковой (в круглых скобках) по изданию эпитафии И.М. Снегиревым в «Московских ведомостях» № 76 за 1836 г. и др. публикациям текста.

[9] *Преображенский А.Г.* Этимологический словарь русского языка: В 2 т. М., 1959. Т. 1. С. 184. Статья «Диво»: из санскритского devas – ‘Бог’, ‘божественное’ – идет индоевропейская основа ‘небесный’, отсюда славянское ‘смотреть’, ‘наблюдать’.

[10] *Лаврентьев А.В.* Люди и вещи. Памятники русской истории и культуры XVI-XVIII вв., их создатели и владельцы. М., 1997. С. 100.

[11] [*Берх В.Н.*] Жизнеописание учителя математики Леонтия Филипповича Магнитского // Записки, издаваемые государственным Адмиралтейским департаметом, относящимся к мореплаванию, наукам и словесности. СПб., 1825. Часть 8. С. 413-417, 421.

[12] *Козлов В.П.* Археографическое обозрение России: 1991-2012 годы. М., 2013. С. 243.

Магницого, который мог подтвердить достоверность сведений о былом предсказании своего прадеда, сделанным царю.

Предание о прогнозе отличается предельной компактностью, и на его основе нельзя понять, какая математика была использована Л.Ф. Магницким при его создании. Однако в историографии накоплены сведения о математической составляющей работы астрологов Западной Европы в период Ренессанса или Возрождения. В этот период, когда возрождался интерес с ценностям Античности, формировалась новая гуманистическая парадигма, состоящей в возвышении роли человека. В связи с распространением этих гуманистических настроений стал формироваться стиль жизни, направленный на приоритетное удовлетворение потребностей людей. В этой связи возросла роль университетов, особенно медицинских факультетов. Здесь стали развиваться новые науки, получившие в историографии название «ятронаук» (от греч. iatros– врач). Ятронауки это такие, например, дисциплины, как «ятроматематика», «ятрофизика», «ятрохимия» и пр. Ятронауки опирались на методы знания Античности, как астрология, натуральная магия и др., так как наук математического естествознания (современного типа) просто еще не было. Постепенно внутри ятронаук стали формироваться новые подходы и методы научного знания, превратившись впоследствии в современные математику, физику, химию и т.д.

И.М. Рабинович в 1974 г. выявил некоторые особенности превращения ятроматематики в современную математику[13]. Он поставил вопрос: «Какую роль играли математики XVI в. в окружающей их среде? Чем они кормились?»[14]. Изучение привело его к выводу, что «среди исследователей XVI в., которых историки науки относят к математикам, были такие …, которые занимались математикой в связи с потребностями медицины»[15].

Так, работу математика с врачом И.М. Рабинович исследовал на примере деятельности Захария Стопия, врача Рижского архиепископа Вильгельма (умер в 1563 г.)[16]. Врача консультировал математик, «который помогал доктору Стопию при составлении астрологического прогноза болезни». И в этом случае И.М. Рабинович задался вопросом: «Являлось ли такое представление об обязанностях математика распространенным в Европе? Ответ на этот вопрос, притом утвердительный, дает перечень альманахов XVI в., составленный историком метеорологии Г. Хеллманом». Математики «занимались астрологией в той мере, в какой это требовалось для медицинской практики. Впрочем, в перечне Хеллмана встречается эпитет, полностью соответствующий новому назначению искусства вычислений: ятроматематикус»[17].

Процесс формирования ятронаук происходил и в России. Он начался в XV в. и длился до XVIII в., о чем свидетельствуют выявленные и изученные источники[18]. Важное место в этом процессе занимали иноземные аптекари и врачи, которые на царскую службу приглашались на основе довольно строгого отбора и только при наличии диплома об окончании университета. Сохранившиеся архивные материалы свидетельствуют, что их деятельность была связана с астролого-астрономическими наблюдениями и математическими расчетами, на основе которых принимались решения о времени и типе медицинских процедур (например, флеботомии) и др. видов врачевания, а также при изготовлении лекарств. Как и на Западе, в прерогативу врачей, находившихся в России, также входило составление политических, сельскохозяйственных и метеорологических прогнозов. Несомненно, что иноземные врачи в Росси владели математическими методами, необходимыми для астрологических вычислений, не отказываясь они и от помощи профессиональных математиков.

---

[13] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках // Историко-математические исследования. М., 1974. Вып. 19. С. 223-230.
[14] *Рабинович И.М.*О ятроматематиках. С. 223.
[15] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках. С. 224.
[16] *Рабинович И.М.* Рижский врач-астролог Захарий Стопий из Вроцлава // Из истории медицины, 5. Рига, 1963. С. 147-151.
[17] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках. С. 225-226.
[18] *Симонов Р.А.* Исследования предыстории научной книги в России (ятронаучный аспект) // Федоровские чтения 2011 / Отв. ред. В.И. Васильев. М., 2012. С. 395-417.

Учитывая прогностические умения Л.Ф. Магницкого, можно предположить, что он их приобрел в процессе работы у врачей или провизоров в Немецкой слободе. Вначале он, по-видимому, находился в положении ученика или подсобного служителя. Затем, овладев необходимыми знаниями, мог сам производить астрологические расчеты, постепенно накапливая соответствующие вычислительные навыки, фиксируя добытые знания в памяти и в записях. В таком случае он должен был иметь хоть какие-то сведения из медицины. Однако в довольно обширной историографии о Л.Ф. Магницком, накопившейся за XIX-XX вв., не было данных об этом. И сравнительно недавно такие сведения «нашел» А.В. Лаврентьев в «Записке» Л.Ф. Магницкого по судебному делу о вольнодумстве Д.Е. Тверитинова 1713-1717 гг.[19] Излагая перипетии процесса, Л.Ф. Магницкий попутно дал краткую медицинскую характеристику болезни брата Д.Е. Тверитинова Фадея: «Ибо в корени языка его имелася болезнь, именуемая рак, от неяже нужно душу изверже» [20]. Данные о знании Л.Ф. Магницким медицины А.В. Лаврентьев оценил так: «…Магницкий обладал, очевидно, некоторыми познаниями в медицине: им вполне профессионально описана «болезнь рак», от которой скончался брат Д.Е. Тверитинова»[21].

Знания Л.Ф. Магницкого по медицине, по-видимому, можно обусловить его занятиями ятроматематикой. И при этом встает вопрос о Немецкой слободе. В историографии есть данные, что до Математико-навигацкой школы Л.Ф. Магницкий «вращался и образовывался» в среде иностранной диаспоры Москвы. Так, А.В. Лаврентьев, изучая факт использования Л.Ф. Магницким иностранных языков, пришел к соответствующему выводу: "… Первые 30 лет жизни Магницкого – загадка, и исключать его службу у "московских иноземцев" как, очевидно, самый прямой путь к изучению языков нельзя"[22]. Нельзя также исключать, что возможные контакты Магницкого с "московскими иноземцеми" не исчерпывались только желанием усвоить иностранные языки, но были также связаны с его интересом к магии, точнее – к ятроматематике (математической астрологии для врача и фармацевта).

Магический аспект деятельности Леонтия Филипповича мог получить отражение в его фамилии Маг-ницкий. Свою фамилию, по преданию, он получил от Петра I в 1700 г., о чем впервые говорится в эпитафии. Причина проявления такой формы расположения царя к Леонтию Филипповичу здесь выражена как-то "несерьезно": понравился Леонтий царю "для остроумия в науках", он и назвал его "Магницким". Но это "остроумие" очевидно привело к какому-то важному для Петра I результату, но о нем в эпитафии нет ни слова. Таким результатом могла быть "Арифметика", но она появилась тремя годами позже. Остаются магические занятия Леонтия Филипповича, которые привели к понравившемуся царю предсказанию, и Петр I в награду назвал его автора «Магницким» Но в таком случае общественное мнение должно было бы сохранить об этом память.

И она действительно сохранилась. Такая возможность описана в историографии. Так, Н.А. Криницкий в начале XX в. сообщил в статье, посвященной Л.Ф. Магницкому, что существует «магическая» версии происхождения этой фамилии: «Другие производят его фамилию от слова magia, magicus, что значит волхвование или волшебный, волхвователь, приписывая ему знание (в тексте «звание» – Р.С.) и этой науки»[23]. В.Н. Берх в 1825 г. придумал «магнитную» версию происхождения фамилии Л.Ф. Магницкого: «Государь,

---

[19] Д.Е. Тверитинов (Дерюжкин): «Около 1692 г. он перебрался в Москву из Твери, обучался лекарскому делу в Немецкой слободе, участвовал в 1695-1696 гг. «с иноземными врачами» в Азовских походах, а около 1700 г., женившись на дочери серебряника Олисова, начал собственную лекарскую практику» (*Смилянская Е.Б.* Волшебники. Богохульники. Еретики. Народная религиозность и «духовные преступления» в России XVIII в. М., 2003. С. 266)

[20] *Магницкий Л.Ф.* Записка Леонтия Магницкого по делу Тверитинова // Памятники древней письменности. СПб., 1882. Т. 38. С. 5.

[21] *Лаврентьев А.В.* Указ. соч. С. 78.

[22] *Лаврентьев А.В.* Указ. соч. С. 78.

[23] *Криницкий Н.А.* Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739 гг.) // Труды второго областного Тверского археологического съезда 1903 года, 10-20 августа. Тверь, 1906. С. 439.

беседуя с ним многократно о математических науках, был так восхищен глубокими познаниями его в оных, что называл его магнитом, и приказал писаться Магнитским»[24]. В оценке Берха все верно кроме одного, вместо слова «магнит» надо поставить magia/magicus. Такое понимание текста наиболее точно отвечает имеющимся данным. Из них следует, что занятия Л.Ф. Магницкого математикой до встречи с Петром I в 1700 г. могли быть связаны с расчетной прогностикой по запросам ятроматематиков (врачей-астрологов или аптекарей) из числа «московских иноземцев». А сама встреча 1700 г. могла ознаменоваться передачей царю составленного Магницким прогноза его жизни, чем Петр I восхитился, так как не ожидал встретить русского специалиста в соответствующей сфере знаний. В этой связи он мог назвать его магом и прозвать Магницким. В.Н. Берх просто мог не знать о «магической» версии, так как писал о Магницком спустя век с четвертью после встречи Магницкого с царем, когда ятроматематики уже «перевелись», и память о них стерлась. Н.А. Криницкий же опирался на данные, уходящие в XVIII в., когда соответствующие события были более свежи.

Следует иметь в виду, что кроме составления прогноза для царя Л.Ф. Магницкий мог участвовать в подготовке прогностического «Брюсова календаря», изданного при одобрении Петра I и под «надзрением» его ближайшего сподвижника графа Я.В. Брюса. В историографии автором «Брюсова календаря» считается сотрудник Магницкого по написанию и изданию «Арифметики», его земляк Василий Киприанов, о чем были найдены архивные свидетельства Т.Г. Куприяновой[25]. Она же в Государственном историческом музее изучила хранящийся там рукописный «Планетник» начала XVIII в., и определила, что он был основой «Брюсова календаря». По некоторым данным, можно заключить, что в работе над ятронаучным «Планетником» также принимал участие и Л.Ф. Магницкий, но это предположение требует дальнейшей разработки и изучения[26].

Возвращаясь к роли в судьбе «Арифметики» Л.Ф. Магницкого книги «некоторого иноземца», на основе проведенного исследования можно заключить, что она заметного влияния на вычислительное содержание учебника могла не оказать. Будучи в течение продолжительного времени помощником иноземных ятроматематиков (астрологов-врачей и аптекарей), живших в Немецкой слободе, Л.Ф. Магницкий мог в совершенстве овладеть вычислительными методами, необходимыми для выполнения прогностических расчетов. Этот арифметический материал должен был иметь выраженную практическую направленность и высокое научное качество, иначе он утрачивал конкурентоспособность, и труд Л.Ф. Магницкого мог потерять спрос у достаточно требовательных к качеству математического исполнения иностранных работодателей. Если это учесть, то будет понятен тот фурор и ажиотаж, который вызвало появление «Арифметики», и особенно интерес к ней, как к самоучителю (вспомним М.В. Ломоносова). Книгу «некоторого иноземца» Л.Ф. Магницкий мог использовать как структурное «вместилище», готовые рамки учебника, в которые он вложил свой уникальный материал, придавший изложению «Арифметики» присущую ей неповторимость.

[24] [*Берх В.Н.*]. Указ. соч. СПб., 1825. С. 413-417, 421.

[25] *Куприянова Т.Г.* Новые архивные сведения об истории создания «Арифметики» Л. Магницкого // Естественнонаучные представления Древней Руси. М., 1988. С. 280-282.

[26] Любезно сообщено автору настоящей статьи Т.Г. Куприяновой, за что выражаю ей свою признательность.

Глава 2

Математика в ее многообразии

Алгебраизация гипертопографов: особенности аксиоматической реализации[27]

А.Е. Баранович, И.П. Соловьев

В развитие однообъектной парадигмы в обобщениях графов в отношении последующей алгебраизации введенных моделей исследуются общность и различия существующих аксиоматических систем дефиниции понятия гипертопографа (графа, гиперграфа). Предлагаются и исследуются (в аспекте существования потенциальных аксиоматических противоречий) различные варианты синтеза базовых алгебраических операций.

Введение. В настоящее время, определены две основные, в общем случае неравномощные, системы аксиом дефиниции графа-гиперграфа [5, 6]. И если первая, 2-3-объектная (двух-трёхобъектная), относится к категории «классических», вершинно-порожденных (по Л. Эйлеру), то вторую, 1-объектную (однообъектную) (А. Баранович, 2011), можно условно отнести к классу реберно-порожденных.

Классическую 2-3-объектную («2-3-основную») аксиоматическую систему дефиниции теоретико-графовых моделей (и их обобщений) обозначим через $[G]^{2-3}$ [2,9-10]. Определение гипертопографа и *k*-гиперпространства гипертопографов на платформе системы $[G]^{2-3}$ приведено и детально исследовано в [1-2,4,6].

В 1-объектной системе аксиом, обозначенной нами через $[G]^1$, $\eta\tau$-граф определен сходным, но не тождественным образом: пусть задан линейно упорядоченный булеан B_k^V *k*-го порядка топологизации $(k \geq 1)$ некоторого вполне определенного множества V, $\mathsf{B}_k^V \equiv \{ \mathsf{b}_{i_1}^V, \ldots, \mathsf{b}_{i_N}^V \}$, $N = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{|V|-1}}}-1}}\}$ ($k-1$ экземпляров 2 в показателе). Тогда $\eta\tau$-граф HTG_V^k, с носителем V, уровня топологизации *k*, есть произвольное *подмножество* булеана B_{k+1}^V $k+1$ уровня топологизации множества-носителя ($HTG_V^k \subseteq \mathsf{B}_{k+1}^V$)[28], где элементы HTG_V^k входящие в булеан B_k^V и не входящие в булеан B_{k+1}^V, т.е. не принадлежащие множеству $\mathsf{B}_{k+1}^V \backslash \mathsf{B}_k^V$, образуют множество его *топовершин* V_τ^k ($V_\tau^k \subseteq HTG_V^k \subseteq \mathsf{B}_k^V$, $V_\tau^k \not\subset \mathsf{B}_{k+1}^V \backslash \mathsf{B}_k^V$), а множество $E_{\eta\tau} \equiv HTG_V^k \backslash V_\tau^k$ - множество *гипертопоребер* HTG_V^k [1, 7].

Мы можем говорить о гиперпространстве Γs^m вложенных $\eta\tau$-графов, вследствие доказанного изоморфизма алгебр $\mathsf{A}_{\mathsf{B}_{k+1}^V}: <\mathsf{B}_{k+1}^V, (\bigcup, \bigcap)>$ и $\mathsf{A}_{[GF(2)]^{|\mathsf{B}_k^V|}}: <[GF(2)]^{|\mathsf{B}_k^V|}, (\vee, \wedge)>$, определенных относительно отображения $\varphi: (\mathsf{b}_{k+1}^V)_i \to (\overrightarrow{\mathsf{b}_{k+1}^V})_i$, где $(\mathsf{b}_{k+1}^V)_i$ есть произвольный элемент булеана B_{k+1}^V (подмножество B_k^V) и $(\overrightarrow{\mathsf{b}_{k+1}^V})_i$ есть индикатор соответствующего подмножества B_k^V (элемента B_{k+1}^V), т.е. элемент булева *k*-гипер-

---

[27] Работа подготовлена в рамках реализации Программы стратегического развития РГГУ, проект 2.1.1 «Решение комплексных проблем в области общественных и информационных наук» в Центре системного анализа и моделирования мышления [11].

[28] Заметим, что произвольное *подмножество* B_{k+1}^V есть *элемент* («точка») булеана $k+2$ порядка B_{k+2}^V.

пространства $[GF(2)]^{|\mathrm{B}_k^V|}$ размерности $|\mathrm{B}_k^V|$ при биективном соответствии монохромного $\Gamma s^m \leftrightarrow \mathrm{B}_{k+1}^V \leftrightarrow [GF(2)]^{|\mathrm{B}_k^V|}$ для заданного уровня топологизации *k*.

В результате, для системы аксиом $[G]^1$ в качестве основных объектов модели выступают выборки не из основного множества «вершин», но произвольные выборки из топологической структуры пространства «потенциально возможных» гипертопографов на некотором универсальном множестве-носителе [5, 6].

Определение 1. *Аксиоматическим противоречием* одноосновной *метаалгебры* на Γs^m назовем ситуацию выхода результата алгебраической операции за пределы *основного множества метаалгебры*, определенного в базисе выбранной аксиоматической системы дефиниции Γs^m ⊲

Система $[G]^1$ априори является более «обширной» в отношении системы $[G]^{2-3}$. Системы равномощны только в условиях вполне определенных ограничений, наложенных на $[G]^1$ [6]. Нетрудно заметить, что в обеих системах аксиом $[G]^{2-3}$ и $[G]^1$ алгебры в сигнатуре $< \bigcap, \bigcup >$[29] замкнуты относительно основного множества. Однако того же нельзя сказать о некоторых унарных операциях, например, операции удаления вершины. Эта операция легко может перевести *$\eta\tau$-граф* из базиса $[G]^{2-3}$ в базис $[G]^1$. Таким образом, возникает актуальная задача исследования сигнатуры операций над $\eta\tau$-графами на предмет возникновения возможных аксиоматических противоречий, возникающих в ходе их реализации, а также выявления условий, обеспечивающих выполнение необходимого требования замкнутости синтезируемых алгебр.

П. 1. В работе [7] в отношении опорных монохромных $\eta\tau-$графов, по аналогии с графами, при реализации операций «трансформации - развития» (составных в алгоритмической интерпретации) было предложено использовать «атомарные микрооперации» («элементарные трансформации»), образующие базовую сигнатуру синтеза исходных. Однако при детальном анализе подхода оказалось, что предложенные «элементарные трансформации», «атомарные» в модели *графа-гиперграфа* в аксиоматике $[G]^{2-3}$, в ряде случаев не являются таковыми в модели *гипертопографа* *k*-порядка топологизации, являясь составными в отношении исследуемой операции трансформации СХ-$\eta\tau$-графов [1], что в результате заведомо приводит к появлению аксиоматических противоречий в результирующем $\eta\tau-$графе. В настоящей работе основное внимание уделено исследованию базовых операций в $[G]^{2-3}$, результатом выполнения которых является аксиоматически непротиворечивый $\eta\tau-$граф.

Необходимо отметить, что используемые аксиоматические системы базируются на вполне определенных теоретико-множественных феноменологических платформах, характеризующих механизмы введения и использования на них *k*-местных отношений, $k \le n,\ |V| = n$ [2, 5]. Соответственно в определениях тех операций, где они («*k*-гипертопоребра» [8]) задействованы, априори подразумевается возможность учёта особенностей реализации подобных механизмов.

Пусть ${}^1HTG_{V_1}^k$ и ${}^2HTG_{V_2}^k$ есть $\eta\tau$-графы на различных множествах-носителях V_1 и V_2 соответственно, являющихся подмножествами универсального множества V. В отношении модели $\eta\tau$-графа в аксиоматиках $[G]^1$ и $[G]^{2-3}$ определим следующие (уточненные) алгебраические операции: *удаление гипертопоребра* ($\eta\tau$-ребра), *добавление* $\eta\tau$-ребра, *замыкание* $\eta\tau$-ребер, *расщепление* $\eta\tau$-ребер, *удаление топовершины* (τ-вершины) из $\eta\tau$-ребра, *добавление τ-вершины* в $\eta\tau$-ребро, а также *объединение* и *пересечение* $\eta\tau$-графов.

---

[29] Определяющей для синтеза топологических структур на множестве-носителе.

За грань рассмотрения выведены операции *кольцевой суммы*, *стягивания*, *дополнения* и *отображения*. Редукция операций кольцевой суммы и дополнения на $\eta\tau$-графы относительно аксиоматики $[G]^{2-3}$ неоднозначна. Редукция операции стягивания ребер на $\eta\tau$-граф в системах $[G]^{2-3}$ и $[G]^{1}$, является частным случаем операции замыкания для двух $\eta\tau$-ребер ${}^{1}e_{\eta\tau}^{k_1}$ и ${}^{2}e_{\eta\tau}^{k_2}$ на соседних уровнях топологизации ($|k_1-k_2|=1$), одно из которых вложено в другое (${}^{1}e_{\eta\tau}^{k_1} \in {}^{2}e_{\eta\tau}^{k_2}$) как τ-вершина. Операция отображения для $\eta\tau$-графа сводится к задаче поиска структурного изоморфизма на $\eta\tau$-графе, что также выходит за рамки представленного материала. Операции объединения (пересечения) $\eta\tau$-графов определены теоретико-множественным образом через объединение (пересечение) множеств $\eta\tau$-ребер и τ-вершин их порождающих. Соответственно, обоснование их непротиворечивости в $[G]^{1}$ и $[G]^{2-3}$ сводится к доказательству существования алгебры $\mathrm{A}_{[GF(2)]^{|\mathrm{B}_k^V|}}:\ <[GF(2)]^{|\mathrm{B}_k^V|}, (\vee, \wedge)>$.

П. 2. <u>Определение 2.</u> *Удаление $\eta\tau$-ребра* есть преобразование вида $\psi(HTG_V^k, e_{\eta\tau}^k)$: $HTG_V^k \xrightarrow{\psi} \overline{HTG}_{\overline{V}}^k$, где $e_{\eta\tau}^k$ - некоторое $\eta\tau$-ребро HTG_V^k уровня топологизации k, $e_{\eta\tau}^k \in HTG_V^k \setminus V_\tau^k$, $\bar{V}_\tau^k \equiv V_\tau^k$, $\overline{E}_{\eta\tau}^k \equiv E_{\eta\tau}^k \setminus e_{\eta\tau}^k$ $\lhd$

Очевидно, что для системы $[G]^{1}$ результирующий $\eta\tau$-граф $\overline{HTG}_{\overline{V}}^k$ отвечает введенной аксиоматике. Действительно все $\eta\tau$-ребра, находящиеся выше уровня топологизации k, в которые было вложено $e_{\eta\tau}^k$ $(\forall \bar{e}_{\eta\tau}^{k'} : e_{\eta\tau}^k \in \bar{e}_{\eta\tau}^{k'}, k' > k)$ переходят в разряд гипотетически существующих. Тогда как для $[G]^{2-3}$ удаление $\eta\tau$-ребра (a_1, a_2) из $\eta\tau$-графа $HTG_V^k \equiv \{a_1, a_2, a_3,\ (a_1, a_2),\ (a_1, a_2, (a_1, a_2))\}$, где $a_1, a_2, a_3 \in V$, явным образом приводит к аксиоматическим противоречиям.

Пусть определены $\eta\tau$-ребра $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$ следующего вида: существует такая цепочка вложенности $\eta\tau$-ребер по уровням топологизации k, что $e_{\eta\tau}^k \in e_{\eta\tau}^{k_{i_1}} \in \ldots \in e_{\eta\tau}^{k_{i_N}} \in \dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, где $k < k_{i_1} < k_{i_2} \ldots < k_{i_N} < k'$ с глубиной вложенности N ($N \in \mathbb{N}_0$). Тогда, для устранения вышеупомянутых противоречий можно воспользоваться следующими методами:

1. Рекурсивное удаление. Удаление всех элементов вида $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$ для всех возможных N. Нужно отметить, что данное преобразование устранит аксиоматические противоречия для системы $[G]^{2-3}$, однако может привести к преобразованиям, противоречащим логике синтеза модели ОР.

2. Введение топоэлементов $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$ в множество-носитель. Все $\eta\tau$-ребра вида $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, которые в результирующем $\eta\tau$-графе $\overline{HTG}_{\overline{V}}^k$ приводят к аксиоматическим противоречиям в $[G]^{2-3}$, вводятся в качестве «новых» элементов в модифицированное множество-носитель $\overline{V}$.

3. Замыкание непосредственно вложенных $\eta\tau$-ребер. Все $\eta\tau$-ребра вида $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, в которые непосредственно вложено удаляемое ребро ($\forall \dot{e}_{\eta\tau}^{k'} : e_{\eta\tau}^k \in \dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, $N = 0$), замыкаются в новое $\eta\tau$-ребро $\bar{e}_{\eta\tau}^{k'}$. При этом, все $\eta\tau$-элементы входящие в $e_{\eta\tau}^k$ ($\forall v_\tau^k \in e_{\eta\tau}^k$), входят и в $\bar{e}_{\eta\tau}^{k'}$.

4. Замена удаленного элемента на новый элемент множества-носителя. Все вхождения $e_{\eta\tau}^k$ в $\eta\tau$-ребра вида $\dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, которым непосредственно инцидентно удаляемое ребро ($e_{\eta\tau}^k \in \dot{e}_{\eta\tau}^{k'}$, N

= 0), заменяются вхождением в них вершины v^* расширенного множества-носителя множества $\bar{V}_\tau^k : \{\bar{V} \cup v^*\}$.

П. 3. Определение 3. *Добавление ητ-ребра* есть преобразование вида $\psi(HTG_V^k, e_{\eta\tau}^k)$: $HTG_V^k \xrightarrow{\psi} \overline{HTG_V^k}$, где $e_{\eta\tau}^k$ ($e_{\eta\tau}^k \in \overline{HTG_V^k} \setminus \bar{V}_\tau^k$) - некоторое ητ-ребро $\overline{HTG_V^k}$ уровня топологизации k, а $\bar{V}_\tau^k \equiv V_\tau^k$, $\bar{E}_{\eta\tau}^k \equiv E_{\eta\tau}^k \cup e_{\eta\tau}^k$ ◁

Очевидно, что эта операция непротиворечива в $[G]^1$. Чтобы операция была непротиворечива в $[G]^{2-3}$, необходимо на $e_{\eta\tau}^k$ наложить ограничение: $e_{\eta\tau}^k \equiv \{v_\tau^k\} \subseteq V_\tau^k$.

П. 4. Определение 4. *Замыкание ητ-ребер* есть преобразование вида $\psi({}^1e_{\eta\tau}^{k_1}, {}^2e_{\eta\tau}^{k_2}, HTG_V^k)$: $HTG_V^k \xrightarrow{\psi} \overline{HTG_V^k}$ двух ητ-ребер ${}^1e_{\eta\tau}^{k_1} \in E_\tau^k$, ${}^2e_{\eta\tau}^{k_2} \in E_\tau^k$, $k_2 \geq k_1$ в ητ-ребро ${}^3e_{\eta\tau}^{k_2}$, где $\bar{E}_\tau^k \equiv {}^3e_{\eta\tau}^{k_2} \cup E_\tau^k \setminus ({}^1e_{\eta\tau}^{k_1} \cup {}^2e_{\eta\tau}^{k_2})$, и для $\forall\, {}^4v_{\eta\tau}^{k_4}$, ${}^5e_{\eta\tau}^{k_5}$, ${}^6e_{\eta\tau}^{k_6}$, таких, что ${}^4v_{\eta\tau}^{k_4} \in {}^1e_{\eta\tau}^{k_1} \cup {}^2e_{\eta\tau}^{k_2}$, ${}^1e_{\eta\tau}^{k_1} \in {}^5e_{\eta\tau}^{k_5}$, ${}^2e_{\eta\tau}^{k_2} \in {}^6e_{\eta\tau}^{k_6}$ выполняется: ${}^4v_{\eta\tau}^{k_4} \in {}^3e_{\eta\tau}^{k_2}$, ${}^3e_{\eta\tau}^{k_2} \in {}^5e_{\eta\tau}^{k_5}$, ${}^3e_{\eta\tau}^{k_2} \in {}^6e_{\eta\tau}^{k_6}$ ◁

Заслуживает отдельного рассмотрения случай $k_2 - 1 > k_1$. Обратим внимание, что уровень топологизации нового гипертопоребра ${}^3e_{\eta\tau}^{k_2}$ будет равен k_2. Последнее условие связано со следующим утверждением.

Утверждение 1. Любое ητ-ребро $e_{\eta\tau}^k$ уровня топологизации k в произвольном ητ-графе $HTG_V^k \in \Gamma s^m$ находится на минимально возможном уровне топологизации и существует такая цепочка вложенностей $v \in {}^1e_{\eta\tau}^1 \in {}^2e_{\eta\tau}^2 \in \ldots \in {}^{k-1}e_{\eta\tau}^{k-1} \in e_{\eta\tau}^k$, где $v \in V$ и $\forall l < k, e_{\eta\tau_l}^l \in E_\tau^l$ ◁

Не для всех ητ-графов и произвольных ητ-вершин допустима операция замыкания. В частности, замыкание ητ-ребер (a_1, a_2) и $(a_3, (a_1, (a_1, a_2)))$ на ητ-графе $HTG_V^k \equiv \{a_1, a_2, a_3, \underline{(a_1, a_2)}, \underline{(a_1, (a_1, a_2))}, \underline{(a_3, (a_1, (a_1, a_2)))}\}$, где $a_1, a_2, a_3 \subset V$, влечет очевидное аксиоматическое противоречие и приводит к следующему утверждению, выполнимому как в системе $[G]^{2-3}$, так и в системе $[G]^1$.

Утверждение 2. Необходимым условием возможности замыкания пары ητ-ребер ${}^1e_{\eta\tau}^{k_1}$ и ${}^2e_{\eta\tau}^{k_2}$ для случая $k_2 - 1 > k_1$ в ητ-графе HTG_V^k является отсутствие цепочки вложенностей вида ${}^1e_{\eta\tau}^{k_1} \in {}^{i_1}e_{\eta\tau}^{k_{i_1}} \in \ldots \in {}^{i_N}e_{\eta\tau}^{k_{i_N}} \in {}^2e_{\eta\tau}^{k_2}$, где $k_1 < k_{i_1} < k_{i_2} \ldots < k_2$ ◁

Возможно возникновение аксиоматических противоречий и в ητ-ребрах, находящихся выше k по уровню топологизации. Пусть ητ-элементы a_2 и (a_1, a_2) ητ-графа $HTG_V^k \equiv \{a_1, a_2, \underline{(a_1, a_2)}, \underline{(a_2, (a_1, a_2))}\}$ замыкаются в некоторый элемент a_3. Мы получаем аксиоматическое противоречие в обоих аксиоматиках $[G]^{2-3}$ и $[G]^1$, потому что замена вхождения a_2 и (a_1, a_2) в элементе $(a_2, (a_1, a_2))$, приводит к тому, что на уровне топологизации 2 у нас будет вырожденное ητ-ребро из одного элемента. Вследствие возникновения очевидного аксиоматического противоречия приходим к утверждению:

Утверждение 2′. Необходимым условием для замыкания двух ητ-ребер ${}^1e_{\eta\tau}^{k_1}$ и ${}^2e_{\eta\tau}^{k_2}$ в ητ-графе HTG_V^k является отсутствие в нем ητ-ребра вида $({}^1e_{\eta\tau}^{k_1}, {}^2e_{\eta\tau}^{k_2})$ ◁

В качестве одной из стратегий разрешения аксиоматических противоречий можно предложить *рекурсивное замыкание* ητ-ребер как расширение операции замыкания ητ-ребер. Метод её реализации заключается в том, чтобы пошагово замыкать в результирующее ητ-ребро непосредственно вложенные $\eta\tau$-ребра, ставшие противоречивыми.

Пусть существует некоторая цепочка вложенности $\eta\tau$-элементов по уровням топологизации длины N: ${}^{1}e^{k_1}_{\eta\tau} \in {}^{i_1}e^{k_{i_1}}_{\eta\tau} \in \ldots \in {}^{i_N}e^{k_{i_N}}_{\eta\tau} \in {}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau}$, где $k_1 < k_{i_1} < k_{i_2} \ldots < k_{i_N} < k_2$ $\forall l < k, e^{l}_{\eta\tau_l} \in E^{l}_{\tau}$.

1. Выбираем пару непосредственно вложенных $\eta\tau$-элементов ${}^{1}e^{k_1}_{\eta\tau}$ и ${}^{i_1}e^{k_{i_1}}_{\eta\tau}$ и проводим их замыкание. Получаем некоторое новое $\eta\tau$-ребро $\bar{e}^{\bar{k}}_{\eta\tau}$.

2. Проверяем на предмет аксиоматических противоречий. Если после преобразования существуют аксиоматически-противоречивые $\eta\tau$-ребра, то замыкаем их с $\bar{e}^{\bar{k}}_{\eta\tau}$.

3. Если остались еще не замкнутые $\eta\tau$-ребра, то выбираем следующее ребро $\eta\tau$-ребро из цепочки вложенности и замыкаем с $\bar{e}^{\bar{k}}_{\eta\tau}$. Возвращаемся к шагу 2.

П. 5. Определение 5. *Расщепление $\eta\tau$-ребра* $e^{k}_{\eta\tau}$ есть преобразование вида $\psi(HTG^{k}_{V}, e^{k}_{\eta\tau}, {}^{1}e^{k_1}_{\eta\tau}, {}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau})$: $HTG^{k}_{V} \xrightarrow{\psi} \overline{HTG}^{k}_{\bar{V}}$, где $\eta\tau$-ребро $e^{k}_{\eta\tau}$ заменяется вхождением в $\eta\tau$-граф $\overline{HTG}^{k}_{\bar{V}}$ $\eta\tau$-ребер ${}^{1}e^{k}_{\eta\tau}$ и ${}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau}$, для которых выполнено ${}^{1}e^{k}_{\eta\tau} \subseteq e^{k}_{\eta\tau}$, ${}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau} \subseteq e^{k}_{\eta\tau}$, ${}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau} \in {}^{1}e^{k}_{\eta\tau}$ $e^{k}_{\eta\tau} \notin \overline{HTG}^{k}_{\bar{V}} \setminus \bar{V}^{k}_{\tau}$ уровней топологизации k и k_2, $k_2 < k$. При этом для любой τ-вершины $v^{l}_{\eta\tau}$ входящей в $e^{k}_{\eta\tau}$ ($\forall v^{l}_{\eta\tau} : v^{l}_{\eta\tau} \in e^{k}_{\eta\tau}, v^{l}_{\eta\tau} \in V^{l}_{\tau} \in V^{k}_{\tau}$), выполнено $v^{l}_{\eta\tau} \in {}^{1}e^{k}_{\eta\tau} \cup {}^{2}e^{k_2}_{\eta\tau}$ $\lhd$

Очевидно, что операция является аксиоматической непротиворечивой в обоих аксиоматиках $[G]^{2-3}$ и $[G]^{1}$.

П. 6. Определение 6. *Удаление τ-вершины* $v^{k}_{\eta\tau}$ *из $\eta\tau$-ребра* $e^{k}_{\eta\tau}$ есть преобразование вида $\psi(HTG^{k}_{V}, v^{k}_{\eta\tau}, e^{k}_{\eta\tau})$: $HTG^{k}_{V} \xrightarrow{\psi} \overline{HTG}^{k}_{V}$, где $e^{k}_{\eta\tau}$ ($e^{k}_{\eta\tau} \in \overline{HTG}^{k}_{V} \setminus V^{k}_{\tau}, v^{k}_{\eta\tau} \in e^{k}_{\eta\tau}$) - некоторое $\eta\tau$-ребро $\overline{HTG}^{k}_{V}$, уровня топологизации k, а $\bar{E}^{k}_{\eta\tau} \equiv (E^{k}_{\eta\tau} \cup \bar{e}^{k}_{\eta\tau}) \setminus e^{k}_{\eta\tau}, \bar{e}^{k}_{\eta\tau} \equiv e^{k}_{\eta\tau} \setminus v^{k}_{\eta\tau}$ $\lhd$

Преобразование не приводит к противоречиям в системах $[G]^{2-3}$ и $[G]^{1}$, за исключением одного единственного случая, когда в первоначальном $\eta\tau$-графе HTG^{k}_{V}, не существовало бы $\eta\tau$-ребра вида $\bar{\bar{e}}^{k}_{\eta\tau} \equiv e^{k}_{\eta\tau} \setminus v^{k}_{\eta\tau}$, идентичного $\eta\tau$-ребру $\bar{e}^{k}_{\eta\tau}$, которым мы заменяем в $\eta\tau$-графе $\overline{HTG}^{k}_{V}$ $\eta\tau$-ребро $e^{k}_{\eta\tau}$ из HTG^{k}_{V}.

Утверждение 3. Удаление $\eta\tau$-вершины $v^{k}_{\eta\tau}$ из $\eta\tau$-ребра $e^{k}_{\eta\tau}$ для $\eta\tau$-графа HTG^{k}_{V} возможно тогда и только тогда, когда в $\eta\tau$-вершина $\bar{e}^{k}_{\eta\tau} \equiv e^{k}_{\eta\tau} \setminus v^{k}_{\eta\tau}$ не принадлежит HTG^{k}_{V}: $\bar{e}^{k}_{\eta\tau} \notin HTG^{k}_{V}$
$\lhd$

П. 7. Определение 7. *Добавление τ-вершины* $v^{k}_{\eta\tau}$ *в $\eta\tau$-ребро* $e^{k}_{\eta\tau}$ есть преобразование вида $\psi(HTG^{k}_{V}, v^{k}_{\eta\tau}, e^{k}_{\eta\tau})$: $HTG^{k}_{V} \xrightarrow{\psi} \overline{HTG}^{k}_{\bar{V}}$, где $e^{k}_{\eta\tau}$ ($e^{k}_{\eta\tau} \subset \overline{HTG}^{k}_{\bar{V}} \setminus \bar{V}^{k}_{\tau}, v^{k}_{\eta\tau} \subset e^{k}_{\eta\tau}$) - некоторое $\eta\tau$-ребро $\overline{HTG}^{k}_{\bar{V}}$, уровня топологизации k, а $\bar{V}^{k}_{\tau} \equiv V^{k}_{\tau}$, $\bar{E}^{k}_{\eta\tau} \equiv (E^{k}_{\eta\tau} \cup \bar{e}^{k}_{\eta\tau}) \setminus e^{k}_{\eta\tau}$, $\bar{e}^{k}_{\eta\tau} \equiv e^{k}_{\eta\tau} \cup v^{k}_{\eta\tau}$ $\lhd$

Для сохранения непротиворечивости преобразования базиса $[G]^{2-3}$ в базис $[G]^{1}$ в отношении операции добавления τ-вершины в $\eta\tau$-ребро необходимо выполнение следующих условий.

Утверждение 3′. Преобразование добавления $\eta\tau$-вершины $v_{\eta\tau}^{k}$ в $\eta\tau$-ребро $e_{\eta\tau}^{k}$ для $\eta\tau$-графа HTG_{V}^{k} возможно тогда и только тогда, когда в $\eta\tau$-ребро $\bar{e}_{\eta\tau}^{k} \equiv e_{\eta\tau}^{k} \cup v_{\eta\tau}^{k}$ не принадлежит HTG_{V}^{k} : $\bar{e}_{\eta\tau}^{k} \notin HTG_{V}^{k}$ $\triangleleft$

Заключение. Системы аксиом $[G]^{2-3}$ и $[G]^{1}$ весьма сходны относительно преобразований и разрешения возникающих аксиоматических противоречий. Для различных аксиоматических противоречий предложен и ряд различных стратегий их разрешения. Построение схемы кодирования на модели СХ-гипертопографа в системе $[G]^{2-3}$ возможно методом синтеза «снизу». Построение схемы кодирования методом синтеза «снизу» возможно и на основе более «обширной» системы $[G]^{1}$ с выделением потенциально-существующих объектов $\eta\tau$-графа каким-либо существенным характеристическим признаком. В частности, для идентификации указанных объектов можно использовать (по аналогии с $[G]^{1}$) и характеристический признак вхождения в $\eta\tau$-ребро актуальных или потенциальных $\eta\tau$-вершин.

Библиографический список

1. *Баранович, А.Е.* Семиотико-хроматические гипертопографы. Введение в аксиоматическую теорию [Текст] / А.Е. Баранович / : информационный аспект. – М.: МО РФ, 2003.
2. *Баранович, А.Е.* *K*-гиперпространство семиотико-хроматических гипертопографов как универсальная модель представления фактографических знаний [Текст] / А.Е. Баранович / Матер. IX междунар. конф. “Интеллект. сист. и компьют. науки” (23-27 октября 2006 г.). Т. 1. Ч. 1. – М., Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2006. С. 53-55.
3. *Баранович, А.Е.* О задаче отождествления / различения элементов декларативных знаний в модели *k*-гиперпространства СХ-гипертопографов [Текст] / А.Е. Баранович / Тр. II Междунар. конгресс по интеллект. системам и информ. технол. / X Междунар. научн.-техн. конф. “Интеллектуальные системы” (AIS'10). – М., Физматлит, 2010. Т. 2. С. 11-19.
4. *Баранович, А.Е.* Семиотико-хроматические гипертопосети: унифицированная модель представления знаний [Текст] / А.Е. Баранович / Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем = Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2011): мат. Междунар. научн.-техн. конф. – Минск: БГУИР, 2011. С. 71-86.
5. *Баранович, А.Е.* Многоосновные СХ-гипертопографы - однообъектная парадигма [Текст] / А.Е. Баранович / Тр. III Междунар. конгресса по интеллект. системам и информ. технол. / XI Междунар. научн.-техн. конф. “Интеллектуальные системы” (AIS'11). – М., Физматлит, 2011. Т. 1. С. 377-385.
6. *Баранович, А.Е.* Однообъектная парадигма в обобщениях графов [Текст] / А.Е. Баранович / Тр. XI Междунар. Колмогоровских чтений: сб. стат. – Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2013. С. 57-62.
7. *Баранович, А.Е.* Об алгебраизации модели *k*-гиперпространства СХ-гипертопографов: операции «трансформации – развития» [Текст] / А.Е. Баранович, Д.В. Боровиков, Е.Л. Лакуша / Интеллектуальные системы. Т. 17, вып. 1-4. – М., 2013. С. 21-25.
8. *Баранович, А.Е.* О некоторых аспектах аксиоматизации теории многоместных отношений [Текст] / А.Е. Баранович, Д.Б. Ханковский / Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. XVI Междунар. конф. – Самара: Самарский научн. центр РАН, 2014. С. 143-153.
9. Математическая энциклопедия [Текст] Гл. ред. И.М. Виноградов. В 5-ти томах. – М., Сов. энциклопедия, 1977-1985.
10. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании [Текст] / В.А. Евстигнеев, В.Н. Касьянов / Под ред. Л.С. Мельникова. – Новосибирск: Наука, 1999.

11. SAMT Center [Электрон. ресурс]. - Электрон. дан. - [М., 2014]. – Режим доступа свобод.: http://www.samtcenter.ru.

Критерии для оценки оптимального числа интервалов гистограммы

С.А. Бардасов

Гистограмма - самая старая и наиболее широко используемая непараметрическая оценка плотности вероятности. При ее построении необходимо определить число интервалов m, на которые будет разбита выборочная совокупность. Рассмотрим выборку объема n из одномерного распределения. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - выборочные данные, по которым оценивается истинная функция плотности вероятности $f(x)$. Оценка функции плотности гистограммой имеет вид:

$$\hat{f}(x) = \frac{n_i}{nh_i},\ t_{i-1} < x < t_i, \tag{1}$$

где h_i - ширина i-го интервала гистограммы, n_i - количество данных в i-ом столбике, t_{i-1}, t_i - границы i-го интервала.

Рассмотрим применение информационного критерия Акаике [1-3] для оценки оптимального числа интервалов гистограммы. Данный критерий был получен на основе расстояния Кульбака-Лейблера между истинной неизвестной функцией плотности вероятностей $f(x)$ и приближенной моделью $\hat{f}(x)$:

$$I(f, \hat{f}) = \int f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\hat{f}(x \mid \theta)}\right) dx, \tag{2}$$

где θ - вектор оцениваемых параметров.

В теории информации расстояние Кульбака-Лейблера есть мера того, насколько далеки друг от друга два вероятностных распределения. Оно измеряет информацию, потерянную, когда приближенная модель используется вместо действительной.

Критерий Акаике можно представить в виде:

$$AIC = \frac{-\ln\left(L\left(\hat{\theta} \mid x\right)\right)}{n} + \frac{K}{n}, \tag{3}$$

где $\hat{\theta}$ - оценка максимального правдоподобия вектора параметров θ, $\ln\left(L\left(\hat{\theta} \mid x\right)\right)$ - логарифмическая функция максимального правдоподобия модели, K - число оцениваемых параметров.

В случае гистограммы оцениваемым параметром и одновременно числом таких параметров является число интервалов гистограммы m. Таким образом, для гистограммы

$$AIC = \frac{-\ln(L(m))}{n} + \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Функция правдоподобия модели (гистограммы) имеет вид:

$$L(m) = \left(\frac{n_1}{nh_1}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{nh_2}\right)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n_m}{nh_m}\right)^{n_m}. \tag{5}$$

Рассмотрим случай интервалов, имеющих равную длину:

$$L(m) = \left(\frac{n_1}{nh}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{nh}\right)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n_m}{nh}\right)^{n_m} =$$

$$= \frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot n_m^{n_m}}{n^n h^n} = \frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot n_m^{n_m}}{n^n H^n} m^n \ ,$$

где H - размах вариации.

Полагая объем наблюдений n и размах вариации постоянными величинами, получим:

$$\ln\left(L(m)\right) = \sum_{i=1}^{n} n_i \ln(n_i) + n\ln(m) + const.$$

Отбрасывая величины не зависящие от числа интервалов, для оптимального числа интегралов гистограммы $\hat{m}$ имеем:

$$\hat{m} = \arg\max_m \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \ln(n_i) + n\ln(m) - m \right). \qquad (6)$$

Формула (6) может быть использована для оценки числа интервалов по выборочным данным.

Для получения аналитической оценки необходимо задать функцию плотности вероятностей, а число наблюдений в i-ой группе положить равным математическому ожиданию от n_i:

$$\hat{m} = \arg\max_m \left(\sum_{i=1}^{m} E(n_i)\ln(E(n_i)) + n\ln(m) - m \right). \qquad (7)$$

Рассмотрим, например, линейную функцию плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ 2x, & x \in (0,1); \\ 0, & x \in (1, \infty). \end{cases} \qquad (8)$$

В этом случае

$$E(n_i) = \frac{(2i-1)n}{m^2}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} E(n_i)\ln(E(n_i)) + n\ln(m) - m =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n(2i-1)}{m^2} \ln\left(\frac{n(2i-1)}{m^2} \right) + n\ln(m) - m.$$

Согласно формуле Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{i=1}^{m} g(i) \approx \int_1^m g(x)dx + \frac{g(m)+g(1)}{2} + \frac{1}{12}\left(g'(m) - g'(1)\right).$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{m} E(n_i)\ln(E(n_i)) = \int_1^m (2m-1)\ln(2m-1)dx +$$

$$+ \frac{(2m-1)\ln(2m-1) + 1\ln(1)}{2} + \frac{1}{12}(2\ln(2m-1)+2)\Big|_1^m$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{m} E(n_i)\ln(E(n_i)) + n\ln(m) - m \approx \frac{(2m-1)^2}{4}\ln(2m-1) -$$

$$-\frac{(2m-1)^2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{(2m-1)}{2}\ln(2m-1) + \frac{\ln(2m-1)}{6}.$$

Дифференцируя по числу интервалов m и приравнивая производную к нулю, для нахождения числа интервалов получим:

$$n\left(\frac{\ln(2m-1)}{6m^3} + \frac{1}{3m^2(2m-1)}\right) = 1.$$

Число групп для плотности (8) также было оценено численно по исходному критерию (7). Полученные результаты в диапазоне числа наблюдений n от 100 до 1000000 методом регрессионного анализа аппроксимируются зависмостью

$$m = 0{,}739\, n^{0{,}357}.$$

С целью получения общей формулы для зависимости числа интервалов m гистограммы от объема выборки проведем упрощение критерия (4). Полагая размах вариации постоянным, имеем:

$$\hat{m} = \arg\max_{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i}{n}\ln\left(\frac{n_i m}{n}\right)\right) - \frac{m}{n}\right). \quad (9)$$

Рассмотрим слагаемые:

$$\frac{n_i}{n}\ln\left(\frac{mn_i}{n}\right) = \ln\left(\frac{mn_i}{n}\right)^{\frac{n_i}{n}}.$$

При больших значениях объема выборки n и числа групп m отношение (n_i/n) мало отличается от нуля, а (mn_i/n) будет конечным числом. Тогда $\left(\frac{mn_i}{n}\right)^{\frac{n_i}{n}} \to 1$, когда объем выборки $n \to \infty$.

Проведем замену

$$\ln\left(\frac{mn_i}{n}\right)^{\frac{n_i}{n}} \approx \left(\frac{mn_i}{n}\right)^{\frac{n_i}{n}} - 1.$$

Известны следующие фундаментальные неравенства:

$$x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \ge 0,\ \alpha > 1, \alpha < 0;$$

$$x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \le 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

справедливые при $x > 0$. Равенства справедливы при $x = 1$.

В предельных случаях, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ при всех $x > 0$:

$$x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \equiv 0.$$

Тогда при большом объеме выборки:

$$\left(\frac{mn_i}{n}\right)^{\frac{n_i}{n}} - 1 \approx m\left(\frac{n_i}{n}\right)^2 - \frac{n_i}{n}.$$

Следовательно, критерий (7) преобразуется в следующий:

$$\hat{m} = \arg\max_{m}\left(m\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i}{n}\right)^2 - \frac{m}{n}\right). \quad (10)$$

При этом было учтено, что

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{n}=1$$

не зависит от числа интервалов гистограммы.

Для получения аналитической оценки заменим n_i на математическое ожидание $E(n_i)$, тогда критерий (10) примет вид:

$$\hat{m}=\arg\max_{m}\left(m\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{E(n_i)}{n}\right)^2-\frac{m}{n}\right). \tag{11}$$

Применим критерий (11) к функции плотности вероятностей (8).

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{E(n_i)}{n}\right)^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2i-1}{m^2}\right)^2=\frac{1}{m^4}\sum_{i=1}^{m}(2i-1)^2=\frac{1}{m}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3m^2}\right).$$

Тогда

$$m\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{E(n_i)}{n}\right)^2-\frac{m}{n}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3m^2}\right)-\frac{m}{n}.$$

Дифференцируя правую часть последнего равенства по числу интервалов m и приравнивая к нулю, получим:

$$m=\sqrt[3]{\frac{2n}{3}}.$$

Перейдем в критерии (11) от числа интервалов n к длине интервала h Отметим, что

$$E(n_i)=\int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+h}f(x)dx.$$

Затем для оптимальной длины интервала получим:

$$\hat{h}=\arg\max_{h}\left(h\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(x)dx/h\right)^2-\frac{1}{nh}\right). \tag{12}$$

Гистограмма представляет собой набор прямоугольников, поэтому оценим интеграл в (12) методом прямоугольников

$$\left(\frac{1}{h}\right)\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(x)dx=f\left(t_{i-1}+h/2\right)+\frac{h^2}{24}f''(\xi_i),\quad t_{i-1}\le\xi_i\le t_{i-1}+h$$

Тогда

$$h\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(x)dx/h\right)^2=hf^2\left(t_{i-1}+h/2\right)+h^3f\left(t_{i-1}+h/2\right)f''\left(\xi_i\right)/12 \tag{13}$$

Рассмотрим интеграл от квадрата функции плотности вероятностей

$$\int f^2(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(x)^2dx.$$

С целью достижения одинаковой точности применяя как и в предыдущем случае для оценки интеграла метод трапеций, получим:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(x)^2dx=hf^2(t_{i-1}+h/2)+h^3f'^2(\varsigma_i)/12+h^3f(\varsigma_i)f''(\varsigma_i)/12,\quad t_{i-1}\le\varsigma_i\le t_{i-1}+h \tag{14}$$

Сравним (13) и (14). Учтем, что

$$h^3 f\left(t_{i-1}+h/2\right)f''(\xi_i)/12 - h^3 f(\varsigma_i)\, f''(\varsigma_i)/12 = o\left(h^3\right),$$

$$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m} h^3 f'^2(\xi_i) \approx \frac{1}{12}h^2 \int f'^2(x)dx\,.$$

Тогда

$$h\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx/h\right)^2 - \frac{1}{nh} \approx \int f^2(x)dx - \frac{h^2}{12}\int f'^2(x)dx - \frac{1}{nh}\,. \qquad (15)$$

Учитывая, что $\int f^2(x)dx = const$, (12) и (15), получим следующий критерий для оценки длины интервала гистограммы при большом объеме выборки:

$$\hat{h} = \arg\max_h \left(-\frac{h^2}{12}\int f'^2(x)dx - \frac{1}{nh}\right). \qquad (16)$$

Дифференцируя (16) по h и приравнивая производную к нулю, получим:

$$h = \left(6/n\int f'^2(x)dx\right)^{1/3}. \qquad (17)$$

Формула (16) ранее была получена Скоттом, который минимизировал интегральную среднеквадратическую ошибку:

$$\int E\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx\,. \qquad (18)$$

В случае равнонаполненных интервалов информационный критерий Акаике приводит к выражению

$$\hat{m} = \arg\min_m \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln(h_i) + \ln(m) + \frac{m}{n}\right). \qquad (19)$$

Как показывают оценки в случае гистограмм с равными длинами интервалов информационный критерий дает зависимость числа групп от объема выборки, которая аппроксимируется степенной зависимостью с показателем степени близким к $\frac{1}{3}$. Однако для равнонаполненных интервалов показатель степени зависит от функции $f(x)$. Например, оценим число интервалов для плотности (8) согласно критерию (19). Выборочные значения h_i при этом заменяются на интервалы, рассчитанные через функцию обратную к функции распределения $F^{-1}(x)$

$$h_i = F^{-1}\left(\frac{i}{m}\right) - F^{-1}\left(\frac{i-1}{m}\right) = \sqrt{\frac{i}{m}} - \sqrt{\frac{i-1}{m}}\,, \quad i = 1,\ldots,m$$

Оценивая суму по формуле Эйлера-Маклорена, получим:

$$\hat{m} = 0{,}4514\,\sqrt{n}$$

Однако, для функции плотности вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1); \\ 1/x, & x \in [1, e]; \\ 0, & x \in (e, \infty); \end{cases} \qquad (20)$$

критерий (19) дает:

$$\hat{m} = \sqrt[3]{\frac{n}{12}} = 0{,}4368\,\sqrt[3]{n}$$

Упрощение критерия (19) для равнонаполненных интервалов приводит к формуле:

$$\hat{m} = \arg\min_m \left(\frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{h_i} \right) + \frac{m}{n} \right). \quad (21)$$

Для зависимости числа интервалов гистограммы m от объема выборки n критерий (21) также дает показатель степени, зависящий от вида функции плотности. Например, для плотности (20) по критерию (21) получим:

$$\hat{m} = 0{,}4723\sqrt[3]{n}.$$

Таким образом, в случае равнонаполненных интервалов получение формулы аналогичной (17) представляется представляется более сложным.

Библиографический список

1. *Akaike, H.* Information theory as an extension of the maximum likelihood principle [Текст] / H. Akaike / In B. N. Petrov and F. Csaki (Eds.). Second International Symposium on Information Theory. - Budapest : Akademiai Kiado, 1973. - pp. 267-281.
2. *Akaike, H.* A new look at the statistical model identification [Текст] / H. Akaike / IEEE Transactions on Automatic Control. - 1974. - Vol. 19. - pp. 716-723.
3. *Akaike, H.* Likelihood of a model and information criteria [Текст] / H. Akaike / Journal of Econometrics. - 1981. - Vol. 16. - pp. 3-14.
4. *Scott, D.W.* On optimal and data-based histograms [Текст] / D.W. Scott / Biometrika. - 1979. - Vol. 66. - pp. 605-610.

Частичная квазисвязность и Q-эргодическая теорема

А.В. Бородин

Работа знакомит со структурой частичной квазисвязности на произвольном множестве, впервые введённой в [1], подвергнутой исследованию в [2 – 5], вылившемуся в монографию [5]. Определяется частичная квазисвязность, для которой справедливы Q-аналоги уравнения Колмогорова–Чэпмена и эргодической теоремы (подобной эргодической теореме для марковских цепей [6]).

Приведём необходимый минимум определений и утверждений, касающийся отношения частичной квазисвязности (структуры частичной квазисвязности) на произвольном множестве X (подробнее, см. работу [5]).

Определение 1. *Квазиокрестностью* (*короче, Q-окрестностью*) *элемента* $x \in X$ *называется подмножество* $Q(x) \subseteq X$ *, отнесённое x по заданному правилу Q.*

При этом случай $Q(x) = \varnothing$ (пустого множества) не исключается. Сам элемент $x \in X$ может принадлежать, а может не принадлежать квазиокрестности $Q(x)$. Подмножество $\dot{Q}(x) = Q(x) \setminus \{x\}$ называется выколотой Q -окрестностью элемента $x \in X$. Если $A \subset X$, то множество $Q(A) = \bigcup_{a \in A} Q(a) \subseteq X$ называется квазиокрестностью (или Q-окрестностью) множества *A*.

Теперь введём на X *отношение квазисвязности* (*Q-связности*) следующим образом.

Определение 2. *Элемент* $x \in X$ *называется Q-связным с элементом* $a \in X$ *, а элемент a Q-связывающим элемент x, если существуют конечная последовательность элементов* (*Q-путь*)

$$\{x_k\}_{k=0}^{n} \subset X \quad (x_0 = x,\ x_n = a), \quad (1)$$

и соответствующая последовательность Q-окрестностей (*Q-цепь*)

$Q(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

(2)

такие, что

$x_{k-1} \in Q(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Обозначается этот факт так: $x \propto a$, или подробнее $(x \propto a, Q)$. Если же $x \in X$ не Q-связан с $a \in X$, то пишется $x \overline{\propto} a$. Квазипуть (1) обозначается через $L(x \propto a)$, его квазидлина n — через $d(L(x \propto a))$; квазицепь (2) — через $Q(x \propto a)$, её квазидлина n — через $d(Q(x \propto a))$. Тем самым $d(L(x \propto a)) = d(Q(x \propto a)) = n$.

Понятно, что введённое так отношение « $\propto$ » Q-связности всегда транзитивно, но, вообще говоря, не симметрично и не рефлексивно. Для выполнения последних двух свойств нужны дополнительные условия на правило Q. Поэтому, если $(a \propto b, Q)$ и $(b \propto a, Q)$, то элементы a *и* b называются Q-взаимосвязными, и это обозначается так $a \infty b$. При этом Q-цепь $Q(b \propto a)$ может не совпадать с Q-цепью $Q(a \propto b)$. Если $(a \propto a, Q)$, то элемент a называется Q-*рефлексивным*. В этом случае либо $a \in Q(a)$, либо $a \notin Q(a)$, но существует Q-цепь $Q(a \propto a)$. Во втором случае Q-цепь $Q(a \propto a)$ (соответственно Q-путь $L(a \propto a)$) называется замкнутой Q-цепью (замкнутым Q-путём, или Q-циклом длиной $n \geq 2$). Квазицикл $L(a \propto a) \subset X$ обозначается через $C(a)$ или $C(a; n)$ (если надо указать его квазидлину). Заметим, что и в случае $a \in Q(a)$, можно говорить о тривиальном квазицикле $C(a;1)$ длиной $n = 1$.

Определение 3. *Множество* X *с отношением* Q-*связности* « $\propto$ » *называется частично* Q-*связным и обозначается символом* $(X; Q)$ (*само отношение* « $\propto$ » *называется* — Q-*связностью на* X).

Если X — частично Q-связное множество, $a \in X$, $b \in X$ и $a \propto b$, то существует Q-цепь $Q(b \propto a)$ минимальной длины n_*. Такая Q-цепь называется минимальной (обозначается $Q_*(b \propto a)$), а число

$$d(a,b) = d_Q(a,b) := \begin{cases} 0, & \text{если } a = b \in Q(b), \\ n_*, & \text{если } a \neq b \text{ или } a = b \notin Q(b), \\ +\infty, & \text{если } a \overline{\propto} b, \end{cases} \tag{3}$$

— Q-*расстоянием* от элемента a до элемента b. Квазирасстояние (3) обладает следующими свойствами: $(\forall\, a, b, c \in X)$

1) $d(a,b) \geq 0$, причём $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \in Q(b)$ (*положительная определённо*сть),

2) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ (*неравенство треугольника*),

что роднит его со стандартным (классическим) определением расстояния. Однако свойство *симметричности* $d(a,b) = d(b,a)$ может не выполняться даже, если $a \infty b$. Кроме того, $d(a,a) \neq 0$, когда $a \notin Q(a)$. Это заметно отличает Q-расстояние (3) от его стандартного аналога. Отметим, что $d(a,a) \neq 0$, если либо $a \overline{\propto} a$, либо $a \in C(a; n_*)$, где $n_* \geq 2$.

Множество $Q(a; r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ называется квазишаром (Q-шаром) радиуса $r \in \mathrm{R}$ с центром в точке $a \in X$. Из (3) следует, что $Q(a; 0) = \varnothing$, если $a \notin Q(a)$; $Q(a; 0) = \{a\}$, если $a \in Q(a)$; $Q(a; 1) = \dot{Q}(a)$.

Пусть $a \in X$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$.

Определение 4. *Множество* $\{b \in B : b \propto a\}$

называется областью Q-влияния элемента a *на множество* B (*областью Q-зависимости* B *от* a), *и обозначается символом* $\{B \propto a\}$. *Соответственно множество*

$$\{B \propto A\} := \bigcup_{a \in A} \{B \propto a\}$$

называется областью Q-влияния множества A *на множество* B (*областью Q-зависимости* B *от* A).

Естественность этого определения вытекает из следующего простого, но очень важного, утверждения.

Теорема 1. *Если из того что элемент* $a \in X$ *обладает свойством* S *следует, что этим свойством обладают все элементы квазиокрестности* $Q(a)$, *то свойством* S *обладают все элементы множества* $\{X \propto a\}$.

Если $\{B \propto A\} = B$, то B Q-зависимо от (или Q-связно с) A, а A Q-влиятельно (или Q-связывает) B; обозначается $B \propto A$. Если же $\{B \propto A\} = \text{O}$, то множество B Q-независимо от (или Q-несвязно с) A, а A Q-невлиятельно на (Q-нейтрально к) B; обозначается $B \overline{\propto} A$. В случае $A = \{a\}$ вместо $B \propto \{a\}$ ($B \overline{\propto} \{a\}$) пишется $B \propto a$ ($B \overline{\propto} a$). Если $B \propto \{a\}$ для каждого $a \in A$, то множество B сильно Q-зависимо от (или сильно Q-связно с) A; обозначается $B \propto_s A$.

Множество $A \subseteq X$ (элемент $a \in X$, если $A = \{a\}$) называется: Q-нейтральным (или Q-невлиятельным), если $A^c \overline{\propto} A$, где $A^c = X \setminus A$; Q-замкнутым, если $A \overline{\propto} A^c$; Q-изолированным, если $A^c \overline{\propto} A$ и $A \overline{\propto} A^c$; Q-влиятельным, если $A^c \propto A$; Q-открытым, если $A \propto A^c$; Q-связным с собой, если $A \propto A$.

Относительно Q-нейтральных и Q-замкнутых множеств имеет место следующее утверждение [5].

Теорема 2. *Совокупность квазинейтральных в* $(X;Q)$ *множеств порождает на* X *топологию* τ, *в которой топологически открытыми множествами являются Q-нейтральные множества, а топологически замкнутыми множествами — их дополнения до* X, *т. е. квазизамкнутые множества*.

Полученное так топологическое пространство $(X;\tau)$ называется QT-пространством (квазитопологическим пространством); его τ-открытые (τ-замкнутые) множества — QT-открытыми (QT-замкнутыми) множествами.

Можно показать, что $A \subseteq X$ — QT-открытое (или Q-нейтральное) множество тогда и только тогда, когда

$$(\forall a \in A) \;\; Q(a;1) \subseteq A;$$

$A \subseteq X$ — QT-замкнутое (или Q-замкнутое) множество тогда и только тогда, когда

$$\partial A \subseteq A,$$

где

$$\partial A = \{x \in X : (Q(x) \cap A \neq \text{O}) \wedge (Q(x) \cap A^c \neq \text{O})\}$$

— *Q-граница* множества A (подробности в [5]).

Укажем две крайности: а) если X — сильно Q-связное множество, то Q-топология на X тривиальная; б) если все элементы в X Q-изолированные, то Q-топология на X дискретная. В остальных же случаях Q-топологии на X — «промежуточные», обладающие тем общим для всех свойством, что пересечение любого числа QT-открытых множеств — QT-открытое множество.

Введём теперь две необходимые для дальнейшего операции над квазисвязностями. Пусть $(X;Q_k)$ $(k = 1, 2)$ — две квазисвязности на одном и том же множестве X.

Определение 5. 1) *Объединением двух квазисвязностей* $(X;Q_1)$ *и* $(X;Q_2)$ *называ-ется квазисвязность* $(X;Q)$ *такая, что* $(\forall x \in X)$

$$Q(x) = (Q_1 \cup Q_2)(x) := Q_1(x) \cup Q_2(x) \tag{4}$$

(*обозначается* $Q = Q_1 \cup Q_2$).

2) *Композицией двух квазисвязностей* $(X;Q_1)$ *и* $(X;Q_2)$ *называется квазисвязность* $(X;Q)$ *такая, что* $(\forall x \in X)$

$$Q(x) = (Q_1 \circ Q_2)(x) := \bigcup_{y \in Q_1(x)} Q_2(y); \tag{5}$$

(*обозначается* $Q = Q_1 \circ Q_2$).

Определение других операций (как, впрочем, и других понятий, связанных с отношением частичной квазисвязности), см. работы [2-5].

Дальше рассмотрим частные, но важные для приложений, случаи частичной квазисвязности на множестве X.

Определение 6. *Отношение частичной Q-связности на X называется однозачным, если каждый элемент* $x \in X$ *содержится только в одной Q-окрестности, т. е.*

1) $(\forall x \in X)(\exists y \in X): x \in Q(y)$, 2) $(\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2)\, Q(x_1) \cap Q(x_2) = \text{O}$.

Свойство 1) означает, что все элементы в X — Q -открытые.

Опуская подробный анализ однозначной частичной квазисвязности на X (см. [5]), отметим

лишь её тесную связь с понятием отображения множества X в себя.

Теорема 3. *Для того чтобы отношение частичной Q-связности на X было однозначным, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение* $f : X \to X$ *такое, что*

$$Q(x) = f^{-1}(x) \quad (\forall x \in X). \tag{6}$$

Отображение $f : X \to X$, индуцированное однозначной частичной квазисвязностью $(X;Q)$, обозначается через f_Q. Соответственно отношение однозначной частичной Q-связности на X, индуцированное отображением $f : X \to X$ — через Q_f. Понятно, что

$(x \propto a, Q) \iff f_Q^n(x) = a$,

где $n = d(x,a)$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

Теперь введём квазисвязность $(X;Q)$, которая является объединением (в смысле (4)) конечного числа однозначных квазисвязностей $(X;Q_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, т. е.

$$Q = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j : Q(x) = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j(x) \quad (\forall x \in X) \tag{7}$$

Так как для любого элемента $x' \in X$ и любого $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ существует элемент $x \in X$ такой, что $x' \in Q_j(x)$, то ввиду (7) для любого элемента $x' \in X$ существует элемент $x \in X$ такой что $x' \in Q(x)$.

Пусть $x' \in Q(x)$. Из (7) следует, что среди квазиокрестностей $Q_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ существуют такие, которые содержат элемент x'. Число $k = k(x;x') \in \{1, 2, \ldots, m\}$ таких квазиокрестностей называется *Q-кратностью* элемента x' относительно элемента x. Для элементов $x' \notin Q(x)$ Q-кратность $k = k(x;x') := 0$. Можно показать, что число $m(x')$ *всех* квазиокрестностей, содержащих элемент $x' \in X$, определяется по формуле

$$m(x') = \sum_{x \in X} k(x;x') = m, \tag{8}$$

и называется *Q-значностью* (или *полной Q-кратностью*) элемента $x' \in X$. В рассматриваемом случае она одинакова для всех $x' \in X$ и равна m. В общем случае полная Q-кратность (8) зависит от элемента $x' \in X$ [5].

Числовые характеристики $k = k(x; x')$ и $m(x')$ позволяют определить *меру Q-связности* любого элемента $x' \in X$ с любым элементом $x \in X$.

Определение 7. *Если квазисвязность* $(X; Q)$ *является объединением* m *однозначных квазисвязностей* $(X; Q_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *то величина*

$$p(x'; x) := \frac{k(x; x')}{m(x')} = \frac{k(x; x')}{m} \quad (x, x' \in X)$$

называется степенью связности элемента $x' \in X$ *с элементом* $x \in X$.

Нетрудно видеть, что

$$0 \le p(x'; x) \le 1, \quad \sum_{x \in X} p(x'; x) = 1,$$

причём $p(x'; x) \ne 0 \iff d_Q(x', x) = 1$.

Распространим понятие степени связности элемента $x' \in X$ с элементом $x \in X$ на случай, когда $n = d_Q(x', x) > 1$, где $Q = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$.

Пусть *квазисвязность* $(X; Q)$ является объединением m однозначных квазисвязностей $(X; Q_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Обозначим через $X^{(n)}(x')$ множество элементов $x \in X$ таких, что $d_Q(x', x) = n$. Назовём его множеством Q-влияния на элемент $x' \in X$ n-го уровня, а сами элементы этого множества обозначим через $x^{(n)}(x')$ и назовём элементами Q-влияния на элемент $x' \in X$ n-го уровня. Поскольку квазисвязность Q является объединением ровно m однозначных квазисвязностей, то число Q-путей $L(x' \propto x)$, соединяющих элемент x' с элементами $x^{(n)}(x')$ множества $X^{(n)}(x')$, равно ровно m^n. Число же самих элементов множества $X^{(n)}(x')$ не превышает m^n. Таким образом,

$$X^{(n)}(x') = \left\{x_1^{(n)}(x'), x_2^{(n)}(x'), \ldots, x_{m(n)}^{(n)}(x')\right\},$$

где

$$m(n) = m^{(n)}(x') \le m^n$$

— число элементов n-го уровня, Q-влияющих на элемент $x' \in X$.

Определение 8. *Мощность множества Q-путей, связывающих элемент* $x' \in X$ *с элементом* $x \in X^{(n)}(x')$ *и имеющих длину* $n = d_Q(x', x)$, *называется кратностью уровня* n *элемента* x' *относительно элемента* x *и обозначается символом* $k^{(n)}(x; x')$. *Если же* $x \notin X^{(n)}(x')$, *то* $k^{(n)}(x; x') := 0$.

При $n = 1$ получается введённая ранее Q-кратность элемента x' (1-го уровня). Понятно, что

$$\sum_{x \in X} k^{(n)}(x, x') = \sum_{k=1}^{m(n)} k^{(n)}(x_k^{(n)}; x') = m^n.$$

и определение 7 обобщается следующим образом.

Определение 9. *Пусть квазисвязность* $(X; Q)$ *является объединением* m *однозначных квазисвязностей* $(X; Q_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. *Тогда величина*

$$p^{(n)}(x'; x) := \frac{k^{(n)}(x; x')}{m^n} \quad (x, x' \in X) \tag{9}$$

называется степенью связности уровня n *элемента* $x' \in X$ *с элементом* $x \in X$.

Из (9) следует, что

$$0 \le p^{(n)}(x'; x) \le 1, \quad \sum_{x \in X} p^{(n)}(x'; x) = 1,$$

а при $n = 1$ получается определение 7. Кроме того, справедливо следующее утверждение, связывающее кратности и степени связности разного уровня (см. [5]).

Лемма. *Если квазисвязность* $(X;Q)$ *является объединением* m *однозначных квази-связностей* $(X;Q_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ *и* $1\le\nu\le n-1$, *то*

$$k^{(n)}(x;x')=\sum\nolimits_{k=1}^{m(\nu)}k^{(n-\nu)}(x;x_k^{(\nu)})\,k^{(\nu)}(x_k^{(\nu)};x')=\sum_{\xi\in X}k^{(n-\nu)}(x;\xi)\,k^{(\nu)}(\xi;x'),$$

и соответственно

$$p^{(n)}(x';x)=\sum\nolimits_{k=1}^{m(\nu)}p^{(\nu)}(x';x_k^{(\nu)})\,p^{(n-\nu)}(x_k^{(\nu)};x)=\sum_{\xi\in X}p^{(\nu)}(x';\xi)\,p^{(n-\nu)}(\xi;x). \qquad (10)$$

Заметим, что формула (10) внешне схожа с уравнением Колмогорова–Чэпмена для переходных вероятностей однородной марковской цепи (см., например [6]). Подробный анализ этого сходства представлен в работе автора [5].

При $\nu=1$ формула (10) принимает частный вид

$$p^{(n)}(x';x)=\sum\nolimits_{k=1}^{m(1)}p^{(1)}(x';x_k^{(1)})\,p^{(n-1)}(x_k^{(1)};x)=\sum_{\xi\in X}p^{(1)}(x';\xi)\,p^{(n-1)}(\xi;x).$$

Из этой формулы следует, что для определения степени связности (9) любого уровня достаточно знать степень связности 1-го уровня. Кроме того, посредством (10) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4 (Q-**эргодическая**). *Если квазисвязность* Q *на множестве* X *является объединением* (7) m *однозначных квазисвязностей* Q_j $(j=1,2,\ldots,m)$ *и выполняется условие стационарности*

$$(\exists\,\hat n\in\mathrm{N})\,(\forall\,x'\in X):\; X^{(\hat n)}(x')=X^{(\hat n)}=\{x_1^{(\hat n)},x_2^{(\hat n)},\ldots,x_{\hat m}^{(\hat n)}\}$$

(*т. е. множество Q-влияния на элемент* $x'\in X$ $\hat n$*-го уровня не зависит от* $x'\in X$), *то для каждого* $x\in X$ *существуют стационарные степени связности*

$$p(x)=\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(x';x)$$

такие, что

1) $(\forall\,x\in X^{(\hat n)}):\; p(x)\ge 1/m^{\hat n}$, 2) $(\forall\,x\notin X^{(\hat n)}):\; p(x)=0$,

3) $\sum_{x\in X}p(x)=\sum\nolimits_{k=1}^{\hat m}p(x_k^{(\hat n)})=1$,

4) *сходимость* $p^{(n)}(x';x)$ *к* $p(x)$ *равномерная по* $x'\in X$ *и* $x\in X$,

5) *стационарные степенисвязности* $p(x_k^{(\hat n)})$ $(j=1,2,\ldots,m)$ *удовлетворяют системе уравнений*:

$$x_j^{(\hat n)}=\sum\nolimits_{k=1}^{\hat m}p(x_k^{(\hat n)})\,p(x_k^{(\hat n)};x_j^{(\hat n)})=1 \quad (j=1,2,\ldots,m).$$

Многочисленные следствия из этой теоремы представлены в [5]. Там же показана тесная связь понятия частичной квазисвязности с такими математическими объектами (понятиями), как: частичная упорядоченность, однозначные и многозначные отображения, марковские цепи, динамические системы, *барианализ* и *бариоперационное исчисление*, матричное исчисление, векторное и аффинное пространства, принцип максимума для функциональных и интегральных отношений и т. д.

Библиографический список

1. *Бородин А.В.* Оценка типа сжатия для нелинейных эволюционных уравнений и её приложение к динамическим системам / А.В. Бородин // Динамика систем. Межвуз. сб. научн. тр. под ред. Ю.И. Неймарка / Нижегор. гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород. – 1995, С. 86 -106.
2. *Бородин А.В.* Частично квазисвязные множества. / А.В. Бородин; ЯГТУ. – Ярославль. – 1994.- 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 03.10.95; №2673-В95.

3. *Бородин А.В*. Частично квазисвязные множества. и их приложения к бариуравнениям. I / А.В. Бородин // Математика и математические образование. Теория и практика: Межвуз. сб. научн. тр. – Вып. 4.- Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2004.- С 11-32.
4. *Бородин А.В*. Частично квазисвязные множества. и их приложения к бариуравнениям. II / А.В. Бородин // Математика и математические образование. Теория и практика: Межвуз. сб. научн. тр. – Вып. 5.- Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2006.- С 3-16.
5. *Бородин А.В*. Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2013. – 484 с.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность [Текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Наука. – 1989. – 640 с.

Алгебраические уравнения в унитарном пространстве и алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры

А.Г. Галканов

1. Гипервекторное произведение векторов и их свойства

Пусть $U^{m+1}-$унитарное пространство размерности $m+1,\ T=\{\tau_1,\ \tau_2,...,\ \tau_{m+1}\}-$ ортонормальный базис в U^{m+1}. И пусть в этом базисе даны векторы $Z_j=\left(z_j^1,\ z_j^2,...,\ z_j^{m+1}\right)$ с $m+1$ комплексными координатами $z_j^k,\ j\in J=\{1,...,\ m\},\ m\in\mathbb{N},\ (m\ge 2),\ \Theta-$нулевой вектор, $k\in K=\{1,\ 2,...,\ m,\ m+1\},$ Обозначив число, комплексно-сопряжённое к комплексному числу z_j^k, через $\bar{z}_j^k$, введём ещё один вектор $\bar{Z}_j=\left(\bar{z}_j^1,\ \bar{z}_j^2,...,\ \bar{z}_j^{m+1}\right)$ в том же базисе T.

Определение 1. *Определитель-вектор* $V=\left[Z_1,\ Z_2,...,\ Z_m\right]=\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_{m+1} \\ z_1^1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{m+1} \\ z_2^1 & z_2^2 & \cdots & z_2^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_m^1 & z_m^2 & \cdots & z_m^{m+1} \end{vmatrix},$

разлагаемый по элементам первой строки, называется векторным произведением m *векторов* $Z_1,\ Z_2,...,\ Z_m$ *или гипервекторным произведением в пространстве* U^{m+1}.

Некоторые свойства гипервекторного произведения.

1⁰. $V=A_{11}\tau_1+A_{12}\tau_2+...+A_{1m+1}\tau_{m+1},$ где $A_{11},\ A_{12},...,\ A_{1m+1}-$алгебраические дополнения базисных векторов $\tau_1,\ \tau_2,...,\ \tau_{m+1}$ соответственно.

2⁰. Антикоммутативность относительно перестановки любых двух сомножителей:
$\left[Z_1,...,Z_p,...,Z_q,...,Z_m\right]=-\left[Z_1,...,Z_q,...,Z_p,...,Z_m\right].$

3⁰. Ассоциативность относительно умножения вектора на число и дистрибутивность относительно сложения векторов: если $Z_j=\sum\limits_{p=1}^{m}\lambda_p T_p$, то

$$\left[Z_1,...,Z_{j-1},\ \left(\sum_{p=1}^{m}\lambda_p T_p\right),\ Z_{j+1},...,Z_m\right]=\sum_{p=1}^{m}\lambda_p\left[Z_1,...,Z_{j-1},\ T_p,\ Z_{j+1}...,Z_m\right].$$

4⁰. Если Z_p и Z_q линейно зависимы или хотя бы один из них нулевой, то $V=\Theta$.

5⁰. Вектор V ортогонален каждому из векторов $\bar{Z}_1,\ \bar{Z}_2,\ldots,\ \bar{Z}_m:\ \forall j\in J\left[\left(V,\ \bar{Z}_j\right)=0\right]$.

6⁰. Каждый из векторов $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_m$ ортогонален вектору $\bar{V}:\ \forall j\in J\left[\left(Z_j,\ \bar{V}\right)=0\right]$.

7⁰. Критерий линейной зависимости (независимости). Векторы $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_m\in U^{m+1}$ линейно зависимы (независимы) тогда и только тогда, когда $V=\Theta\ \left(V\neq\Theta\right)$.

2. Алгебраические уравнения в унитарном пространстве

Рассмотрим алгебраическое уравнение степени $n\ (n\geq 1)$

$$P_n(z,\ C)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n=0,\ c_n\neq 0 \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами от комплексного переменного z. С целью изучения уравнения (1) в $n+1-$мерном унитарном пространстве U^{n+1} возьмём ортонормальный базис $T=\left\{\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\ \tau_{n+1}\right\}$ и в этом базисе введём два вектора $C=(c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n)\in U^{n+1}$, $Z=(1,\ z,\ z^2,\ldots,\ z^n)\in U^{n+1}$ и полином $P_n(z,\ C)$ запишем через скалярное произведение $P_n(z,\ C)=\left(Z,\ \bar{C}\right)$, где $\bar{C}=(\bar{c}_0,\ \bar{c}_1,\ \bar{c}_2,\ldots,\ \bar{c}_n)$. Набору комплексных чисел $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$ сопоставим векторы $Z_k=(1,\ z_k,\ z_k^2,\ldots,\ z_k^n)\in U^{n+1}$, где $k\in N=\left\{1,\ 2,\ldots,\ n\right\}$.

Теорема 1. Векторы $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $z_i\neq z_j\ (i\neq j)$, где $i,j\in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_n$ линейно независимы, но среди чисел $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$ имеется пара совпадающих. Тогда $A_{11}=A_{12}=\ldots=A_{1n+1}=0,\ V=\Theta$ и по критерию 7^0 векторы $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_n$ линейно зависимы, что противоречит условию.

Достаточность. Рассмотрим

$$V=\left[Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_n\right]=\begin{vmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \tau_3\ \ldots\ \tau_n & \tau_{n+1}\\ 1 & z_1 & z_1^2\ \ldots\ z_1^{n-1} & z_1^n\\ 1 & z_2 & z_2^2\ \ldots\ z_2^{n-1} & z_2^n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & z_n & z_n^2\ \ldots\ z_n^{n-1} & z_n^n\end{vmatrix}.$$

Согласно свойству 1^0, $V=A_{11}\tau_1+A_{12}\tau_2+\ldots+A_{1n+1}\tau_{n+1}$, где

$$A_{1n+1}=\begin{vmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1}\\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1}\end{vmatrix}=W\left(z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n\right)$$

есть определитель Вандермонда $W\left(z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n\right)=\prod_{n\geq j>i\geq 1}\left(z_j-z_i\right)$, для которого справедливо утверждение (см., например, [1]):

$$A_{1n+1}=\begin{vmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1}\\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0\ \Leftrightarrow\ \forall i,j\in N(i\neq j)\left[z_i\neq z_j\right].$$

Тогда $V\neq\Theta$, и по критерию 7^0 векторы $Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_n$ линейно независимы.

В дальнейшем, не умоляя общности наших рассуждений, $P_n(z,\ C)$ будем считать приведённым полиномом $(c_n = 1)$. Тогда $C = (c_0,\ c_1,\ c_2, ...,\ 1) \in U^{n+1}$.

Теорема 2 *(обобщённая теорема Виета). Для того чтобы комплексные числа* $z_1,\ z_2, ...,\ z_n$ *были простыми корнями* $P_n(z,\ C)$ *необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$c_0 = \frac{A_{11}}{A_{1n+1}} \wedge c_1 = \frac{A_{12}}{A_{1n+1}} \wedge ... \wedge c_{n-1} = \frac{A_{1n}}{A_{1n+1}}, \tag{2}$$

где $\wedge -$ *знак конъюнкции.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $z_1,\ z_2, ...,\ z_n$ есть простые корни $P_n(z,\ C)$: $\forall i, j \in N (i \neq j) \left[z_i \neq z_j \right]$. Тогда, согласно свойству 6^0, $P_n(z,\ C)$: $\forall k \in N \left[\left(Z_j,\ \bar{C} \right) = 0 \right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0 + z_1 c_1 + z_1^2 c_2 + ... + z_1^{n-1} c_{n-1} = -z_1^n, \\ c_0 + z_2 c_1 + z_2^2 c_2 + ... + z_2^{n-1} c_{n-1} = -z_2^n, \\ \text{..} , \\ c_0 + z_n c_1 + z_n^2 c_2 + ... + z_n^{n-1} c_{n-1} = -z_n^n. \end{cases} \tag{3}$$

Определитель системы (3) есть определитель Вандермонда, который отличен от нуля. Поэтому её решение однозначно представимо в виде (2).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (2). Для всех $k \in N$ имеем

$$P_n(z_k,\ C) = c_0 + c_1 z_k + c_2 z_k^2 + ... + c_{n-1} z_k^{n-1} + z_k^n \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{A_{11}}{A_{1n+1}} + \frac{A_{12}}{A_{1n+1}} z_k + \frac{A_{13}}{A_{1n+1}} z_k^2 + ... + \frac{A_{1n}}{A_{1n+1}} z_k^{n-1} + z_k^n =$$

$$= \frac{1}{A_{1n+1}} \left(A_{11} + A_{12} z_k + A_{13} z_k^2 + ... + A_{1n} z_k^{n-1} + A_{1n+1} z_k^n \right) = \frac{1}{A_{1n+1}} \left(V,\ \bar{Z}_k \right) \overset{7^0}{=} 0,$$

что означает: $z_1,\ z_2, ...,\ z_n -$ простые корни полинома $P_n(z,\ C)$.

Примечание 1. Известная теорема Виета выражает необходимое условие того, чтобы числа $z_1,\ z_2, ...,\ z_n$ были корнями $P_n(z,\ C)$. В этом смысле теорема Виета является частным случаем теоремы 2 в случае простых корней. Формулы же (2) выражают связь между корнями и коэффициентами полинома $P_n(z,\ C)$ и лишь по форме отличаются от формул Виета (см. частные случаи 1 и 2).

Частный случай 1. Пусть $P_n(z,\ C) = P_2(z,\ C) = c_0 + c_1 z + z^2$.

$$V = \left[Z_1,\ Z_2 \right] = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1) \left[z_1 z_2 \tau_1 - (z_2 + z_1) \tau_2 + \tau_3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{11} = z_1 z_2 (z_2 - z_1),\ A_{12} = -(z_2 - z_1)(z_2 + z_1),\ A_{13} = z_2 - z_1.$$

Согласно (2), $c_0 = \dfrac{A_{11}}{A_{13}} = z_1 z_2$, $c_1 = \dfrac{A_{12}}{A_{13}} = -(z_1 + z_2)$.

Частный случай 2. $P_n(z,\ C) = P_3(z,\ C) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + z^3$. Вычислим $V = \left[Z_1,\ Z_2,\ Z_3 \right]$.

$$V = \left[Z_1,\ Z_2,\ Z_3 \right] = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \\ 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} = A_{11}\tau_1 + A_{12}\tau_2 + A_{13}\tau_3 + A_{14}\tau_4,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ z_3 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix},\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix},\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix},\ A_{14}=-\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Используя формулы (2) $c_0=\dfrac{A_{11}}{A_{14}},\ c_1=\dfrac{A_{12}}{A_{14}},\ c_2=\dfrac{A_{13}}{A_{14}},$ вычислим $c_0,\ c_1,\ c_2$:

$c_0=-z_1z_2z_3,\ c_1=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3,\ c_2=-(z_1+z_2+z_3).$

3. Алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры

3.1. Об основной теореме алгебры

Основная теорема алгебры, утверждающая о существовании хотя бы одного корня алгебраического полинома от комплексного переменного z с комплексными коэффициентами, является «*одним из крупных достижений всей математики и находит применения в самых различных областях науки*» [2]. Основная теорема исследовалась и доказывалась в трудах А. Жирара, Р. Декарта, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, П. Лапласа, Ж. Лагранжа, К. Гаусса и др. [3]. Однако во всех её доказательствах применяются методы классического анализа. Так, доказательство основной теоремы, построенное в [2], состоит из следующих этапов.

1) Полином $P_n(z,\ C)$ объявляется функцией комплексного переменного z.
2) Доказывается непрерывность $P_n(z,\ C)$ на всей комплексной плоскости.
3) Доказывается формула Тейлора, дающая разложение $P_n(z+h,\ C)$ по степеням h.
4) Доказывается лемма о модуле старшего члена.
5) Доказывается лемма о возрастании модуля многочлена.
6) Доказывается лемма Даламбера.
7) Применяется теорема Веерштрасса о существовании в замкнутом круге точки минимума для действительной функции комплексного переменного.

Поэтому основная теорема не является чисто алгебраической [2]. В конце данного параграфа будет изложено алгебраическое доказательство основной теоремы.

3.2. Связь между максимальным числом простых корней и размерностью унитарного пространства

Теорема 3. *Максимальное число простых корней каждого полинома $P_n(z,\ C)$ на единицу меньше размерности унитарного пространства U^{n+1}.*

Доказательство. Предположим, что существует $n+1$ простых корней $z_1,\ z_2,...,\ z_{n+1}$ полинома $P_n(z,\ C),$ каждому из которых сопоставим вектор $Z_h=\left(1,\ z_h,\ z_h^2,...,\ z_h^n\right),$ $h=\overline{1,\ n+1}.$ Векторы $Z_1,\ Z_2,...,\ Z_n,\ Z_{n+1}$ линейно независимы по теореме 1 и из того, что $P_n(z_h,\ C)\ =\left(Z_h,\ \bar{C}\right)=0,$ следует: в пространстве U^{n+1} существуют $n+2$ линейно независимых векторов $C,\ Z_1,\ Z_2,...,\ Z_{n+1},$ что противоречит размерности $U^{n+1}.$

3.3. Критерий существования корня полинома

Пусть $P_n(z,\ C)-$полином, некоторые коэффициенты которого, быть может, равны нулю. Поэтому $P_n(z,\ C)$ запишем в виде без нулевых слагаемых:

$$P_{m,\ q_m}(z,\ C) = c_0 + c_1 z^{q_1} + c_2 z^{q_2} + \ldots + c_m z^{q_m},\ c_0 \neq 0,\ z \in \mathbb{C}, \qquad (4)$$

где $m = 1,\ 2, \ldots,\ n -$ число отличных от нуля коэффициентов, $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m = 1,\ 2, \ldots,\ n -$ отличные от нуля степени полинома, где $(q_1 < q_2 < \ldots < q_m)$; $c_0,\ c_1, \ldots,\ c_m -$ отличные от нуля коэффициенты. Рассмотрим примеры.

1) Для линейного полинома $(1-i)+(2+3i)z$:

$m = 1,\ c_0 = 1 - i,\ c_1 = 2 + 3i,\ q_1 = 1,\ P_{1,\ 1}(z,\ C) = (1-i)+(2+3i)z.$

2) Для неполного квадратичного полинома $i + z^2$:

$m = 1,\ c_0 = i,\ c_1 = 1,\ q_1 = 2,\ P_{1,\ 2}(z,\ C) = i + z^2.$

3) Для полинома $4 + (5+3i)z^6 + (2-i)z^{18}$:

$m = 2,\ c_0 = 4,\ c_1 = 5 + 3i,\ c_2 = 2 - i,\ q_1 = 6,\ q_2 = 18,\ P_{2,\ 18}(z,\ C) = 4 + (5+3i)z^6 + (2-i)z^{18}.$

Если же все коэффициенты полинома $P_n(z,\ C)$ отличны от нуля, то в (4) $m = n,\ q_k = k,$ $k = 1,\ 2, \ldots,\ n,$ т.е. получим традиционную запись.

С целью изучения полинома (4) в $m+1-$мерном унитарном пространстве U^{m+1} в ортонормальном базисе $T = \{\tau_1,\ \tau_2, \ldots,\ \tau_{m+1}\}$ введём два вектора

$C = (c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_{m+1}) \in U^{m+1},\ Z = (1,\ z^{q_1},\ z^{q_2}, \ldots,\ z^{q_m}) \in U^{m+1},$

затем полином $P_{m,\ q_m}(z,\ C)$ запишем как скалярное произведение $P_{m,\ q_m}(z,\ C) = \left(Z,\ \bar{C}\right).$ В базисе T построим векторы

$$G_1 = \left(1,\ -c_0/c_1,\ 0, \ldots,\ 0\right),\ G_2 = \left(1,\ 0,\ -c_0/c_2, \ldots, 0\right), \ldots,\ G_m = \left(1,\ 0,\ 0, \ldots,\ -c_0/c_m\right). \qquad (5)$$

Так, если $m = 1,$ то (5) состоит из одного вектора $G_1 = \left(1,\ -c_0/c_1\right).$ Если $m = 2,$ то в (5) входят следующие векторы $G_1 = \left(1,\ -c_0/c_1,\ 0\right),\ G_2 = \left(1,\ 0,\ -c_0/c_2\right).$ Если $m = 3,$ то (5) состоит из следующих векторов

$G_1 = \left(1,\ -c_0/c_1,\ 0,\ 0\right),\ G_2 = \left(1,\ 0,\ -c_0/c_2,\ 0\right),\ G_3 = \left(1,\ 0,\ 0,\ -c_0/c_3\right).$

И т.д. Для удобства в дальнейшем введём предикат $L\colon\ U^{m+1} \to \{0,\ 1\}$:

$$L\left(F_1, \ldots,\ F_s\right) = \left[\begin{array}{l} 1,\ \textit{если}\ F_1, \ldots,\ F_s\ \textit{линейно зависимы}, \\ 0,\ \textit{если}\ F_1, \ldots,\ F_s\ \textit{линейно независимы}. \end{array}\right.$$

где $F_1, \ldots,\ F_s \in U^{m+1},\ s > 1.$ Пусть $M = \{1,\ 2, \ldots,\ m\}.$

Свойства векторов $G_1,\ G_2, \ldots,\ G_m,\ \bar{C},\ Z.$

Свойство 1^0. $G_1,\ G_2, \ldots,\ G_m,\ \bar{C},\ Z -$ ненулевые по определению.

Свойство 2^0. $L\left(G_1,\ G_2, \ldots,\ G_m\right) = 0.$ В самом деле, пусть

$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_m G_m = \Theta,\ \lambda_k \in \mathbb{C},\ k \in M.$

Равенство $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_m G_m = \Theta$ равносильно системе

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 0\ \wedge\ -\frac{a_0}{a_1}\lambda_1 = 0\ \wedge\ -\frac{a_0}{a_2}\lambda_2 = 0\ \wedge\ -\frac{a_0}{a_m}\lambda_m = 0\ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0,$$

что по определению означает линейную независимость векторов $G_1,\ G_2, \ldots,\ G_m.$

Свойство 3^0. Каждый вектор $G_k\ (k \in M)$ ортогонален вектору $\bar{C}$:

$\forall k \in M\ \forall C \in U^{m+1}\left[\left(G_k,\ \bar{C}\right) = 0\right].$

В самом деле,

$$\left(G_1,\ \bar{C}\right)=1\cdot a_0-\frac{a_0}{a_1}\cdot a_1=0,\ \left(G_2,\ \bar{C}\right)=1\cdot a_0-\frac{a_0}{a_2}\cdot a_2=0,...,\ \left(G_m,\ \bar{C}\right)=1\cdot a_0-\frac{a_0}{a_m}\cdot a_m=0.$$

Свойство 4$^{\mathbf{0}}$. $L\left(G_1,\ G_2,...,\ G_m,\ \bar{C}\right)=0.$ Согласно свойству 2^0, векторы $G_1,\ G_2,...,\ G_m$ линейно независимы, а по свойству 3^0 вектор $\bar{C}$ ортогонален каждому вектору $G_k,\ k\in M.$ Следовательно, векторы $G_1,\ G_2,...,\ G_m,\ \bar{C}$ линейно независимы.

Свойство 5$^{\mathbf{0}}$. $\forall C\in U^{m+1}\ \exists Z_*\in U^{m+1}\left[L\left(G_1,\ G_2,...,\ G_m,\ Z_*\right)=1\right].$ Допустим, что доказываемое утверждение ложно. Тогда его отрицание должно быть истинным:

$$\exists C^*\in U^{m+1}\ \forall Z\in U^{m+1}\left[L\left(G_1^*,\ G_2^*,...,\ G_m^*,\ Z\right)=0\right]. \tag{6}$$

Из бесчисленного множества векторов $Z,$ удовлетворяющих допущению (6), возьмём Z_1 и Z_2: $Z_1=\left(1,\ z_1^{q_1},...,\ z_1^{q_m}\right),\ Z_2=\left(1,\ z_2^{q_1},...,\ z_2^{q_m}\right),\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C},$ где $z_1\neq 0,\ z_2\neq 0,\ z_1\neq z_2.$ Согласно теореме 1, векторы Z_1 и Z_2 линейно независимы. Тогда, согласно допущению (6), $L\left(G_1^*,\ G_2^*,...,\ G_m^*,\ Z_1,\ Z_2\right)=0,$ что противоречит размерности пространства $U^{m+1}.$

Следствие из 5$^{\mathbf{0}}$. $\forall C\in U^{m+1}\ \exists Z_*\in U^{m+1}\left[Z_*=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m\right],\ \lambda_k\in\mathbb{C},\ k\in M.$

Свойство 6$^{\mathbf{0}}$. $\forall C\in U^{m+1}\ \exists Z_*\in U^{m+1}\left[Z_*=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m\ \Leftrightarrow\ \left(Z_*,\ \bar{C}\right)=0\right].$

Слева направо. Пусть $Z_*=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m.$ Имеем

$$\left(Z_*,\ \bar{C}\right)=\left(\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m,\ \bar{C}\right)=\lambda_1\left(G_1,\ \bar{C}\right)+\lambda_2\left(G_2,\ \bar{C}\right)+...+\lambda_m\left(G_m,\ \bar{C}\right)\overset{\text{св-во. }3^0}{=}0.$$

Справа налево. Пусть $\left(Z_*,\ \bar{C}\right)=0.$ По свойству 4^0 множество $m+1$ векторов $G_1,\ G_2,...,\ G_m,\ \bar{C}$ линейно независимо в $U^{m+1}.$ Так что имеет место разложение

$$Z_*=\lambda_0\bar{C}+\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m.\ \text{Поэтому}\ 0=\left(Z_*,\ \bar{C}\right)\overset{3^0}{=}\lambda_0\left(\bar{C},\ \bar{C}\right)\ \Rightarrow\ \lambda_0=0.$$

Теорема 5 $\left(\textit{критерий существования корня } P_{m,\ q_m}(z,\ C)\right).$ *Полином* $P_{m,\ q_m}(z,\ C)$ *имеет корень тогда и только тогда, когда существуют числа* $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_m,$ *такие, что*

$$Z=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть $0\neq z\in\mathbb{C}$ – корень полинома $P_{m,\ q_m}(z,\ C)$: $P_{m,\ q_m}(z_*,\ C)=0.$ Имеем

$$\left(Z_*,\ \bar{C}\right)=P_{m,\ q_m}(z_*,\ C)=c_0+c_1z_*^{q_1}+c_2z_*^{q_2}+...+c_mz_*^{q_m}=0.$$

Тогда, согласно следствию из свойства 5^0, существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_m,$ такие, что

$$Z=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m.$$

Достаточность. Пусть существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_m$: $Z=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m.$ Тогда

$$P_{m,\ q_m}(z,\ C)=\left(Z,\ \bar{C}\right)=\left(\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+...+\lambda_mG_m,\ \bar{C}\right)=$$

$$=\lambda_1\left(G_1,\ \bar{C}\right)+\lambda_2\left(G_2,\ \bar{C}\right)+...+\lambda_m\left(G_m,\ \bar{C}\right)\overset{\text{св-во }3^0}{=}0.$$

Следствие 5$_{\mathbf{1}}$. $P_{m,\ q_m}(z_*,\ C)=c_0+c_1z_*^{q_1}+c_2z_*^{q_2}+...+c_mz_*^{q_m}=0\ \Leftrightarrow$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1. \\ -\dfrac{c_0}{c_1}\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + \ldots + 0\cdot\lambda_m = z_*^{q_1}, \\ 0\cdot\lambda_1 - \dfrac{c_0}{c_2}\cdot\lambda_2 + \ldots + 0\cdot\lambda_m = z_*^{q_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + \ldots - \dfrac{c_0}{c_m}\cdot\lambda_m = z_*^{q_m}, \end{cases} \tag{8}
$$

Доказательство. Равенство $Z_* = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_m G_m$ переписать в координатах.

Следствие 5$_2$. *Каждое комплексное число является корнем некоторого полинома:*

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \ \exists c \in U^{m+1}\left[P_{m,\ q_m}(z,\ C) = 0\right].$$

Доказательство. Случай $z = 0$ очевиден: нуль есть корень любого полинома с коэффициентом $c_0 = 0$. Пусть $0 \neq z_* \in \mathbb{C}$. Из системы (8) выделим квадратную систему

$$
\begin{cases} -\dfrac{c_0}{c_1}\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + \ldots + 0\cdot\lambda_m = z_*^{q_1}, \\ 0\cdot\lambda_1 - \dfrac{c_0}{c_2}\cdot\lambda_2 + \ldots + 0\cdot\lambda_m = z_*^{q_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + \ldots - \dfrac{c_0}{c_m}\cdot\lambda_m = z_*^{q_m}. \end{cases} \tag{9}
$$

Каким бы ни было комплексное число z_*, система линейных алгебраических уравнений (9) имеет одно единственное решение

$$\lambda_1^* = -\frac{c_1}{c_0} z_*^{q_1},\ \lambda_2^* = -\frac{c_2}{c_0} z_*^{q_2}, \ldots,\ \lambda_m^* = -\frac{c_1}{c_0} z_*^{q_m}, \tag{10}$$

так как её определитель, составленный из коэффициентов при $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_m$, отличен от нуля: $\Delta = (-1)^m c_0^m / c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_m \neq 0$. Подставляя (10) в первое равенство системы (8), имеем

$$-\frac{c_1}{c_0} z_*^{q_1} - \frac{c_2}{c_0} z_*^{q_2} - \ldots - \frac{c_1}{c_0} z_*^{q_m} = 1 \ \Leftrightarrow\ c_0 + c_1 z_*^{q_1} + c_2 z_*^{q_2} + \ldots + c_m z_*^{q_m} = 0,$$

т.е. z_* есть корень некоторого полинома $P_{m,\ q_m}(z,\ C)$.

3.4. Доказательство основной теоремы алгебры

Основная теорема: $\forall C \in U^{m+1}\ \exists z \in \mathbb{C}\ \left[P_{m,\ q_m}(z,\ C) = 0\right]$. **Доказательство.** воспользуемся следующим фактом из математической логики:

$$\exists x \in X\ \forall y \in Y\left[F(x,\ y)\right] \Rightarrow \forall y \in Y\ \exists x \in X\left[F(x,\ y)\right], \tag{11}$$

(см., например, [4]), где $F(x,\ y)-$двуместный предикат, заданный в предметной области $X \times Y$. пусть утверждение основной теоремы ложно. тогда его отрицание истинно: $\exists C \in U^{m+1}\ \forall z \in \mathbb{C}\ \left[P_{m,\ q_m}(z,\ C) \neq 0\right]$. Имеем

$$\exists C \in U^{m+1}\ \forall z \in \mathbb{C}\ \left[P_{m,\ q_m}(z,\ C) \neq 0\right] \overset{(11)}{\Rightarrow} \forall z \in \mathbb{C}\ \ \exists C \in U^{m+1}\left[P_{m,\ q_m}(z,\ C) \neq 0\right],$$

что, однако, противоречит следствию 5$_2$.

Библиографический список

1. *Корн, К.* Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / К. Корн, Т. Корн / Перевод с англ. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
2. *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры [Текст] / А. Г. Курош / – М.: Наука, 1968. – 432 с.
3. *Ремесленников, В. Н.* Алгебры основная теорема [Текст] / В. Н. Ремесленников / Статья в математической энциклопедии, т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 стб.
4. *Шапорев, С. Д.* Математическая логика [Текст] / С. Д. Шапорев /– Спб.: БХВ – Петербург, 2005. – 416 с.
5. *Галканов, А. Г.* Числовые уравнения и тождества в понятиях, теоремах, методах, задачах и решениях [Текст] / А. Г. Галканов / – М.: Изд-во МГУЛ, 2013. – 317 с.

О неприводимых дивизорах на r-мерных скроллях

Н.П. Гушель

r-мерным скроллем X называется проективное расслоение π: X=P(E)$\to C$, где E – векторное расслоение ранга r над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Обозначим через M= $O_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению $\pi_* M \cong E$) и $L_P = \pi^* O_C(P)$, $P \in C$. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам. Условия существования неприводимого дивизора в линейной системе |D|=|aM+$\pi^* O_C$ (B)|, $B \in$ Pic$C$ при r=2 анализируются в [1] и [2].

В данной работе рассматриваются условия существования неприводимого дивизора в линейной системе |D|=|aM+$\pi^* O_C$ (B)|, $B \in$ Pic$C$ при r≥2.

§1. Основные понятия и определения.

(1.1) Расслоение E – называется *нормализованным,* если $h^0(E) \neq 0$ и для всякого обратимого пучка L над C , такого что deg L <0 имеет место

$$h^0(E \otimes L) = 0.$$

(1.2) Расслоение называется *точечно-нормализованное* (P-*нормализованным*), если $h^0(E) \neq 0$ и для всех точек P∈C имеем $h^0(E \otimes O_C(-P)) = 0$.

(1.3) Из (1.1) и (1.2) следует, что *нормализованное* расслоение E является P-*нормализованным.* В случае одномерных расслоений над C только расслоение O_C является P-нормализованным и нормализованным.

(1.4) Для расслоений большей размерности P-нормализованное расслоение E может не быть нормализованным. Например, расслоение E = $O_C \oplus O_C(y_1 + y_2 - y_3)$, где y_i – различные точки на негиперэллиптической кривой C рода g > 2, является P-нормализованным, но $h^0(E \otimes L) = 1$, если L = $O_C(-y_1 - y_2 + y_3)$.

(1.5) *Предложение.* Если E нормализовано и $E \cong \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$, $\sum_{i=1}^{k} rkE_i = r$, то

1) число ν нормализованных слагаемых 1≤ν≤ k,

2) если E_p – не нормализованное слагаемое, то $h^0(E_p) = 0$.

Доказательство. По условию $h^0(E) > 0$, следовательно,

$h^0(\bigoplus_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} h^0(E_i) > 0$ и поэтому $\exists b, 1 \le b \le k$ такое, что $h^0(E_b) > 0$. Расслоение E_b нормализовано, так как для всякого обратимого пучка L над C такого, что deg L < 0 имеет место

$$h^0(E\otimes L)=0 \Leftrightarrow h^0(\mathop{\oplus}_{i=1}^{k} E_i\otimes L)=\sum_{i=1}^{k} h^0\left(E_i\otimes L\right)=0.$$

Следовательно, $h^0(E_b\otimes L)=0$.

(1.6) *Следствие.* Если $rkE_i=1$, $d_i=\deg E_i$, $i=1,...,r-1$, то $E \cong O_C\oplus \mathop{\oplus}_{i=2}^{r} O_C\left(D_i\right)$, где $d_i=\deg D_i$, ≤ 0.

Доказательство. 1) Результат получается непосредственно из (1.5) и (1.3).

2) Приведем также независимое от (1.5) и (1.3) доказательство.

Если предположить, что $\exists k$, $\deg D_k>0$, то $\deg(-D_k)<0$ и $h^0(E\otimes O_C(D_k))=h^0(\mathop{\oplus}_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} O_C\left(D_i-D_k\right)\oplus O_C)>0$, что противоречит нормализованности E. Если предположить, что все дивизоры D_i степени *0* неэффективны, то получим, что и $h^0(E)=0$, что противоречит нормализованности E. Следовательно, найдется хотя бы одни дивизор $D_k\sim 0$.

(1.7) Если расслоение *E –нормализовано* (*или* P-*нормализовано*), *то*

$$0\le h^0(E)\le \mathrm{rk}(E)$$

и имеет место точная последовательность векторных расслоений

$$0\to O_C\to E\to E_1\to 0 \qquad (1.3.1)$$

(см. [4])

(1.8) *Лемма.* Имеют место следующие утверждения:

(i) $L^2_P=0$, $L_P\cdot M^{rkE-1}=1$, $M^{rkE}=\deg E$,

(ii) $\mathrm{Pic}\, P(E)\approx ZM\oplus\pi^*\,\mathrm{Pic}\, C$, $\mathrm{Num}\, P(E)\approx Z\oplus Z$,

$K_{\mathbf{P}(E)}\sim(-\,rkE)M+\pi^*(\det E+K_C)$

(см. [4])

(1.9) Векторное расслоение E над неособой кривой C называется стабильным (полустабильным), если для всякого его подрасслоения F имеем

$$\mu(F)<\mu(E) \qquad (\mu(F)\le\mu(E)),$$

где $\mu(E)=\deg E/\mathrm{rk}\, E$.

§2. Условия неприводимости дивизора $D\sim M+\pi^*O_C(B)$.

(2.1) *Лемма* (см. [1]) Пусть D_1 и D_2 – эффективные дивизоры на неособом проективном многообразии X, тогда

$$h^0(D_1)+h^0(D_2)\le h^0(D_1+D_2)+1 \qquad (2.1.1)$$

(2.2) *Следствие.* 1) Если D_0 – неподвижная компонента в линейной системе | D |, то $h^0(D_0)=1$.

2) Если в (2.1.1) имеет место равенство, то

$$h^0(D_1)=1 \text{ или } h^0(D_2)=1. \qquad (2.2.1)$$

Доказательство. 1) Из неподвижности D_0 следует

$$h^0(D) = h^0(D - D_0). \tag{2.2.2}$$

Применим к эффективным дивизорам D и D - D_0 неравенство (2.1.1):

$$h^0(D - D_0)+ h^0(D_0) \leq h^0(D) +1.$$

Учитывая (2.1.1), получим

$$h^0(D)+ h^0(D_0) \leq h^0(D) +1$$

или

$$h^0(D_0) \leq 1. \tag{2.2.3}$$

Так как D_0 эффективен, то $h^0(D_0)>0$. Следовательно, из (2.2.3) получим $h^0(D_0) = 1$.
2)Если в (2.1.1) равенство, то

$$\dim|D_1|+ \dim|D_2|= \dim|D_1 +D_2| \tag{2.2.4}$$

Предположим, что (2.2.1) не выполняется, т.е. $\dim|D_i|\geq 1$, I =1,2. Нелинейное семейство дивизоров:

$$S = \left\{ D_1^{\alpha} + D_2^{\beta} \mid D_i^{\alpha} \in | D_i |, i = 1,2 \right\} \subset | D_1 + D_2 |.$$

Поэтому,

$$\dim S = \dim|D_1|+ \dim|D_2|< \dim|D_1 +D_2|,$$

что противоречит (2.2.4).

(2.3) *Лемма* (см [4], с.120)В линейной системе $| M_0+\pi^*O_C(B)|$, где $B\in$ Pic C, существует неособый неприводимый дивизор Z (сечение) тогда и только тогда, когда существует точная последовательность векторных расслоений:

$$0\to O_C(-B) \to E \to E' \to 0, \tag{2.3.1}$$

где $P(E') \approx Z$.

(2.4) *Предложение.* Пусть E нормализовано. Если в линейной системе $| M_0+\pi^*O_C(B)|$ имеется сечение Z линейно не эквивалентное M_0, то $\deg B \geq 0$, $h^0(E)\leq h^0(E')$ и $\deg B \geq - \deg E$.

Доказательство. Из $h^0(M_0+\pi^*O_C(B))= h^0(E\otimes O_C(B)| >0$ и нормализованности E следует, что $\deg B \geq 0$.

Из того, что Z линейно не эквивалентное M_0 следует, что не выполняется $B \sim 0$. Поэтому $h^0(O_C(-B)| =0$ и из точной последовательности (2.3.1) получим $h^0(E)\leq h^0(E')$.
Далее из того, что Z линейно не эквивалентное M_0, получим $Z \cdot M_0^{r-1} \geq 0$. Следовательно,
$Z \cdot M_0^{r-1} = (M_0+\deg B\cdot L)\cdot M_0^{r-1} = M_0^{r}+\deg B\cdot M_0^{r-}1\cdot L = \deg E +\deg B \geq 0 \Leftrightarrow \deg B \geq - \deg E$.

(2.5) *Предложение.* Если $D\sim aM_0+\pi^*O_C(B)$, $h^0(E) \geq 2$ и линейная система |D| не имеет неподвижных компонент, то |D| содержит неприводимый дивизор в следующих случаях:

1) $\dim \varphi_{|D|}(X) \geq 2$,

2) a=1, $\dim \varphi_{|D|}(X) =1$.

Доказательство. Если $\dim \varphi_{|D|}(X) \geq 2$, то общий член системы |D| неприводим по теореме Бертини.

Если $\dim \varphi_{|D|}(X) =1$, то линейная система |D| составлена из неприводимого пучка, т.е. существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \overline{\varphi}(X) \arrow[d, "r"] \\ & \varphi(X) \end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

где $\dim\overline{\varphi}(X)=\dim\varphi(X)=1$, r – накрытие. Общий слой R = $\overline{\varphi}^{-1}(P)$, где $P\in\overline{\varphi}(X)$, отображения $\overline{\varphi}$ неприводимый дивизор. Пусть $D=\sum_{i=1}^{n}P_i$ - общее гиперплоское сечение при вложении $\varphi(X)\subset\left|P(H^0(D)^*)\right|$ и $r^*(P_i)=\sum_{j=1}^{\deg r}P_{ij}$, тогда в силу неприводимости общего слоя $\overline{\varphi}$ и коммутативности диаграммы (2.5.1) имеем $\overline{\varphi}^*\circ r^*(P_i)=\sum_{j=1}^{\deg r}\overline{\varphi}^*\left(P_{ij}\right)=\varphi^*\left(D\right)$.

Далее R ≡ $a'M_0+b'L_P$, где $a'\geq 1$ и $\varphi^*(D)\equiv k\cdot d\cdot R$. Следовательно, $k\cdot d\cdot a'=a$ и $k\cdot d\cdot b'=b$. Если a =1, то k = d = 1.

(2.6) *Предложение.* Если $E\cong\bigoplus_{i=1}^{r}O_C$, то линейная система $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ содержит сечение Z тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:

а) линейная система $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ не имеет базисных точек и неподвижных компонент (свободна);

б) пучок $O_C(B)$ порождается глобальными сечениями (п.г.с.).

Доказательство. Условия а) и б) эквивалентны, так как линейная система $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ свободна ⇔ $E\otimes O_C(B)$ п.г.с. ⇔ $O_C(B)$ п.г.с.

Если $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ содержит сечение, то $\pi^{-1}(P)$ не является неподвижной компонентой $\forall P\in C$, т.е.

$h^0(M_0+\pi^*O_C(B-P))< h^0(M_0+\pi^*O_C(B))\Leftrightarrow h^0(O_C(B-P))< h^0(O_C(B))$.

Отсюда получаем, $O_C(B)$ п.г.с.

Обратно, если $O_C(B)$ п.г.с., то $E\otimes O_C(B)$ п.г.с. и, следовательно, согласно (2.5) в $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ есть сечение.

(2.7) *Предложение.* Пусть E нормализовано и $E\cong\bigoplus_{i=1}^{r}O_C\left(D_i\right)$, $d_i=\deg D_i$, $d_i\geq d_{i+1}$, i=1,...,r-1. Если $h^0(M_0+\pi^*O_C(B))=1$, то в линейной системе $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ есть сечение Z ⇔ $\exists k$, $1\leq k\leq r$, такое, что $B\sim -D_k$.

Доказательство. Достаточность условий получим, если в качестве сечений возьмем $P\left(\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r}O_C\left(D_i\right)\right), k=1,\ldots,r$, которые существуют в силу разложимости E и (2.3).

Обратно, пусть в л.с. $|M_0+\pi^*O_C(B)|$ есть сечение. Из

$$h^0(M_0+\pi^*O_C(B))= h^0(\sum_{i=1}^{r}h^0\left(D_i+B\right)=1$$

следует, что $\exists k$ такое, что $h^0\left(D_k+B\right)=1$ и $h^0\left(D_i+B\right)=0$ для $i\neq k$. Если предположить, что D_k+B не ~0, то из $\deg(D_k+B)\geq 0$ получим, что $-D_k-B$ неэффективен.

Библиографический список

1. *Хартсхорн, Р.* Алгебраическая геометрия [Текст] / Р. Хартсхорн / М.- 1981.
2. *Гушель, Н.П.* О дивизорах на алгебраических линейчатых поверхностях [Текст] /Н.П. Гушель / Вопросы теории групп и гомологи ческой алгебры Сб.науч.тр.ЯрГУ .-1989. - С.108-119.
3. *Гушель, Н.П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над эллиптической кривой [Текст] / Н.П. Гушель / Мат. заметки. - т.47. - вып.6. - 1990. - С.15-22.

4. *Гушель, Н.П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над кривыми [Текст] / Н.П. Гушель / Алгебра и анализ.- 4.- вып. 2.-1992. - С.116-128.

Условия неинтегрируемости многомерных систем: подход, основанный на квазислучайных движениях

С.А. Довбыш

Одной из классических и наиболее важных проблем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений являются вопросы интегрируемости. Однако само понятие интегрируемости допускает разные определения и подходы, причём с течением времени менялась наиболее общепринятая концепция. Если в XIX веке вплоть до работ А. Пуанкаре под интегрируемостью понималась возможность написания явных формул для общего решения, то начиная с его работ под интегрируемостью стали понимать скорее наличие достаточного количества независимых *первых интегралов* (т.е. функций на фазовом пространстве системы, постоянных вдоль её фазовых траекторий), в духе условия знаменитой теоремы Лиувилля. Соответственно, неинтегрируемость означает несуществование достаточного количества независимых первых интегралов, принадлежащих определённому классу функций. Особый интерес представляет получение условий неинтегрируемости (не вполне оправданно называемых также *критериями неинтегрируемости*) — конструктивно проверяемых достаточных условий, гарантирующих неинтегрируемость. В качестве класса функций, которому должны принадлежать интегралы, обычно рассматривается множество аналитических или мероморфных функций или некоторые более узкие классы (например, полиномы по импульсам), но ещё классиками рассматривались и вопросы о несуществовании алгебраических интегралов. В настоящее время разработано множество подходов к проблеме неинтегрируемости в том или ином классе функций и не представляется возможным дать хотя бы весьма краткий их обзор. Помимо первых интегралов в некоторых работах стали рассматриваться и другие инвариантные для системы родственные объекты, такие как инвариантные векторные поля (или, что равносильно, однопараметрические группы симметрий) или, более общо, тензорные инварианты.

Вместо системы дифференциальных уравнений можно рассматривать её отображение последования (отображение Пуанкаре), порождаемое на некоторой гиперплощадке, трансверсальной фазовому потоку. Понятно, что проблемы несуществования непостоянных первых интегралов для отображения Пуанкаре и для исходной системы дифференциальных уравнений в соответствующей области фазового пространства будут равносильны (при ясных предположениях о гладкости этих интегралов и самой системы). Под *динамической системой* (сокращённо: системой) в этой статье, как обычно, понимается либо обыкновенное дифференциальное уравнение (фазовый поток), либо диффеоморфизм, для которых проблемы неинтегрируемости весьма близки.

В ряде физических и математических работ явление неинтегрируемости увязывается со сложной динамикой системы не в вещественной, а комплексной области, вследствие явления ветвления решений, что закономерно ведёт к рассмотрению комплексно-мероморфных первых интегралов. Кстати, результаты, относящиеся к несуществованию непостоянных аналитических первых интегралов в вещественной области обычно легко переносятся и на вещественно-мероморфные первые интегралы, что, впрочем, по-видимому, ранее не отмечалось.

Таким образом, имеющиеся общие строгие результаты о неинтегрируемости обычно относятся к несуществованию инвариантных объектов, которые являются аналитическими или мероморфными либо даже принадлежат некоторому более узкому классу функций. Неинтегрируемость в классе аналитических или, более общо, мероморфных объектов мы обозначим термином *аналитическая неинтегрируемость* и в дальнейшем будем интересоваться именно ею.

В проблеме аналитической неинтегрируемости следует различать случаи маломерных и многомерных динамических систем, относя к маломерным системам двумерные диффеоморфизмы и трёхмерные потоки (случаи систем меньших размерностей тривиальны). Строгие результаты о неинтегрируемости маломерных систем получили, в частности, А. Пуанкаре, В.М. Алексеев, R. Cushman, С.Л. Зиглин, В.В. Козлов, а о неинтегрируемости многомерных систем — С.Л. Зиглин, H. Yoshida, В.В. Козлов. Классические результаты об аналитической неинтегрируемости относятся именно к маломерному случаю и на многомерный непосредственно не переносятся, количество же результатов для последнего случая сравнительно невелико. К тому же, в многомерном случае обычно доказывается неинтегрируемость по Лиувиллю, т.е. отсутствие полного набора независимых первых интегралов в инволюции. Насколько известно автору, все полученные условия неинтегрируемости многомерных систем относятся исключительно к гамильтоновым (и, возможно, родственным им) системам и в большинстве случаев являются неустойчивыми, т.е. разрушаются сколь угодно малыми возмущениями системы, а устойчивые условия всегда имели дело с неинтегрируемостью по Лиувиллю. Заведомо неустойчивы условия, получаемые для многомерных систем в рамках весьма популярного подхода, основанного на теории Зиглина и её обобщении с использованием дифференциальной теории Галуа. К тому же, проверка последних условий часто наталкивается на сложные теоретико-числовые проблемы. Однако, с точки зрения приложений было бы предпочтительнее иметь условия неинтегрируемости, устойчивые относительно малых возмущений, поскольку такие условия допускают верификацию посредством приближённых (например, численных) расчётов. В настоящей работе автор опишет предложенный им подход к неинтегрируемости многомерных систем, свободный от этих недостатков, и полученные в его рамках результаты. Таким образом, найденные условия неинтегрируемости, носящие в значительной мере геометрический характер, обладают следующими достоинствами:

• являются достаточно простыми для проверки, применимыми к широким классам систем и устойчивыми относительно малых возмущений,

• гарантируют неинтегрируемость в наиболее сильном аналитическом смысле, т.е. несуществование ни одного непостоянного мероморфного первого интеграла (на уровне априорных первых интегралов),

• не используют предположения о гамильтоновом (или родственном) характере динамической системы, который оказывается несущественным в рамках развиваемого подхода (хотя гамильтонов характер системы может быть использован для формулирования подходящего варианта условий неинтегрируемости).

Кроме того, найденные условия гарантируют также отсутствие нетривиальных симметрий системы, достаточно близких к тождественному отображению (см. ниже).

1. Трансверсальное пересечение сепаратрис и квазислучайные движения.

Хорошо известно благодаря работам Г. Биркгофа, С. Смейла, Л.П. Шильникова, В.М. Алексеева и Ю.И. Неймарка, что наличие трансверсально пересекающихся сепаратрис (входящего и выходящего инвариантных многообразий) гиперболических периодических решений ведёт в типичной ситуации к сложной и нерегулярной динамике. Поэтому, в случае маломерных систем будет отсутствовать непостоянный аналитический первый интеграл. Этот результат был первоначально установлен посредством методов символической динамики для случая, когда имеется замкнутый гомоклинический контур, образованный трансверсальными двоякоасимптотическими траекториями (трансверсальными пересечениями сепаратрис, отличными от рассматриваемых гиперболических периодических решений). Доказательство В.М. Алексеева (1968) следует такой схеме (для случая двумерного диффеоморфизма $S : M \to M$):

1) вблизи гомоклинического контура имеется инвариантное множество $A \subset M$, описываемое методами символической динамики (топологически эквивалентное некоторой топологической марковской цепи),

2) любой первый интеграл (т.е. функция F на M такая, что $F \circ S = F$), непрерывный на A, постоянен на A, поскольку в A имеется всюду плотная траектория (топологическая транзитивность),

3) если F — функция на фазовом пространстве M системы, $F \mid A \equiv const$ и F дифференцируема в точке $x \in A$, то её дифференциал $dF = 0$ в x, поскольку точка $x \in A$ имеет одномерные входящее и выходящее инвариантные многообразия, пересекающиеся трансверсально в x, причём на этих многообразиях лежат последовательности точек, принадлежащих A и сходящихся к x. Значит, если F — аналитическая функция и $F \mid A \equiv const$, то частные производные любого порядка функции F обращаются в нуль на A, т.е. $F \equiv const$.

Следовательно, любой аналитический первый интеграл будет постоянен.

В многомерном случае п.п. 1), 2) доказательства остаются в силе, а п. 3) уже не проходит (хотя упомянутые там последовательности точек на инвариантных многообразиях по-прежнему существуют, но они могут подходить к точке x, касаясь некоторых подпространств меньших размерностей). Однако, доказательство сразу переносится на многомерный случай, если для некоторого натурального N имеет место более слабая импликация

$$F \in C^N(M), F \mid A \equiv 0 \Rightarrow dF \mid A \equiv 0, (1)$$

которую удаётся доказать при определённых дополнительных предположениях. Более того, импликация (1) влечет несуществование нетривиальных мероморфного первого интеграла и аналитической однопараметрической группы симметрий (или, более общо, мероморфного векторного поля, порождающего локальный фазовый поток, коммутирующий с отображением S), а также дискретность аналитического централизатора отображения S (множества всех аналитических диффеоморфизмов, коммутирующих с S) в компактно-открытой (слабой C^0-) топологии. Условие (1) означает, что множество A является "достаточно шероховатым" и не лежит ни на каком регулярном C^N-подмногообразии положительной коразмерности и даже на объединении счетного набора таких подмногообразий (последнее доказывается применением диагонального процесса).

Если диффеоморфизм S — отображение последования потока v, то поток v также не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла. Аналоги других свойств диффеоморфизма S для потока v выглядят так: аналитическая однопараметрическая группа симметрий потока v (или, более общо, мероморфное векторное поле, порождающее локальный фазовый поток, коммутирующий с потоком v) совпадает (с точностью до линейной замены параметра) с самим потоком, а аналитический централизатор потока (множество всех аналитических диффеоморфизмов, коммутирующих с потоком) в окрестности каждой своей точки f в компактно-открытой топологии будет подмножеством множества $\{f \circ v^t = v^t \circ f\}$, где $\{v^t\}$ обозначает как раз однопараметрическую группу диффеоморфизмов, являющуюся потоком v. Однако, для справедливости этих свойств потока v приходится требовать (по крайней мере, в рамках нашего доказательства) аналитичности самого потока, в отличие от диффеоморфизма S, который должен быть только гладким.

В.М. Алексеев назвал движения на множестве A *квазислучайными*, поскольку топологическая энтропия соответствующей топологической марковской цепи является положительной.

Сформулируем условия, гарантирующие выполнение свойства (1), ограничившись простейшим случаем [2], который имеет дело с одним гиперболическим периодическим решением и его гомоклиническими траекториями. Перенесение на случай многих гиперболических периодических решений можно найти в [1, 3].

Определение 1. *Будем говорить, что невырожденный линейный оператор* $T:\mathrm{X}^n \to \mathrm{X}^n$ *и множество* $\Re \subset \mathrm{X}^n$ *находятся в общем положении, если для любого собственного числа* λ *оператора* T *линейная оболочка над* X *объединения множества и образа оператора* $T-\lambda\cdot id$ *совпадает со всем объемлющим пространством* X^n.

Равносильная форма определения 1:

Определение 1'. *Невырожденный линейный оператор* $T:\mathrm{X}^n \to \mathrm{X}^n$ *и множество* $\Re \subset \mathrm{X}^n$ *находятся в общем положении, если* X*-линейная оболочка множества* $\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(\Re)$ *совпадает со всем объемлющим пространством* X^n.

Следствие. Условие, что отображение T и множество $\Re$ находятся в общем положении, сохраняется при малых возмущениях $\Re$ и T.

Это определение может быть описано в явной координатной форме в терминах координат точек множества $\Re$ в жордановом базисе оператора T (см. [1, 3]).

Переходим к формулировке теоремы о неинтегрируемости для многомерного диффеоморфизма с гомоклиническими траекториями.

Пусть q – гиперболическая неподвижная точка C^N-диффеоморфизма S n-мерного многообразия M на себя; W^- и W^+ – ее выходящее и входящее инвариантные многообразия (сепаратрисы), которые, как известно, также являются многообразиями класса C^N (и аналитические, если S аналитическое). Пусть размерности $W^\pm$ равны, соответственно, $n^\pm$ (тогда $n^+ + n^- = n$).

Сформулируем вначале следующую вспомогательную геометрическую лемму, которая послужит для пояснения одного из условий теоремы (и которую, при желании, можно опустить). Обозначив через $G_s(r)$ грассманово многообразие s-мерных линейных касательных подпространств в точке $r \in M$, введём множество s-мерных линейных касательных подпространств во всех точках M, т.е. $\mathrm{M}_s = \bigcup_{r\in M} G_S(r)$, имеющее естественную структуру многообразия, гладкость которого на единицу меньше гладкости M, и являющееся тотальным пространством локально-тривиального расслоения с базой M и слоем G_s — грассмановым многообразием s-мерных линейных подпространств в P^n. Точки M_s будем обозначать через $z=(r,\sigma_r)$, где $\sigma_r \in G_s(r)$. Обозначим через ς отображение, действующее на расслоении M_m и индуцируемое отображением S базы. Тогда $\varsigma \in C^{N-1}$, если $S \in C^N$.

Лемма. Пусть $\gamma_j (1 \le j \le n)$ — все собственные числа отображения S в точке q, расположенные в порядке невозрастания модулей. Далее, пусть m — число такое, что $1 \le m < n$ и $|\gamma_j|>$ при $j \le m$, $|\gamma_j|<$ при $j > m$ (в частности, можно положить $m = n^-$, $=1$, если оба числа $n^\pm > 0$); $\mathrm{M}^\pm_s = \bigcup_{r\in W^\pm} G_S(r) \subset \mathrm{M}_s$ есть C^{N-1}-многообразие, определенное, соответственно, при выполнении условия $n^\pm > 0$ и получаемое из M_s сужением базы расслоения. Собственным числам $\gamma_j (j \le m)$ соответствует линейное m-мерное подпространство в $T_O M$, т.е. элемент $\alpha_m^+ \in G_m(O)$. Аналогично, собственным числам $\gamma_j (j > m)$ сопоставляется элемент $\alpha_m^- \in G_{n-m}(O)$. Пусть $x^\pm = (O, \alpha_m^\pm)$. Тогда

1) для почти всех $z^+ = (r, \sigma_r) \in^+_m$, $z^- = (r, \sigma_r) \in^-_{n-m}$, образующих открытые всюду плотные множества

$$\lim_{p \to \pm\infty} \varsigma^p(z^\pm) = (O, \alpha^\pm_m) = x^\pm. \qquad (2)$$

В частности, точка $x^\pm$ асимптотически устойчива относительно сужения отображения ς на M^+_m или ς^{-1} на M^+_{n-m}.

2) существуют сечения расслоений M^+_{n-m} и M^-_m, т.е. отображения $g^+_m = (, f^+_m)W^+ \to \mathrm{M}^+_{n-m}$, где $f^+_m(r) \in G_{n-m}(r)$, и $g^-_m = (, f^-_m)W^- \to \mathrm{M}^-_m$, где $f^-_m(r) \in G_m(r)$, обладающие следующими свойствами:

а) $\lim_{p \to \pm\infty} \varsigma^p(z^\pm) = x^\mp$ для $z^+ \in^+_{n-m}$ или $z^- \in^-_m$ тогда и только тогда, когда $z^\pm \in g^\pm_m(W^\pm)$;

б) $g^\pm_m \in C^{N-1}$, причем выполнено следующее условие: задающее $g^\pm_m(W^\pm)$ локальное функциональное отображение из пространства гиперболических C^N-диффеоморфизмов S в пространство регулярных C^{N-1}-подмногообразий в M_{n-m} или M_m, является непрерывным;

в) $f^\pm_{n^-}(r) = T_r W^\pm$ для $r \in W^\pm$; если $m_1 > m_2$, то $f^+_{m_1}(r) \subset f^+_{m_2}(r)$ для $r \in W^+$ и $f^-_{m_1}(r) \supset f^-_{m_2}(r)$ для $r \in W^-$;

г) $f^\pm_m(O) = \alpha^\mp_m$;

д) для $z^+ = (r, \sigma_r) \in \mathrm{M}^+_m$ или $z^- = (r, \sigma_r) \in \mathrm{M}^-_{n-m}$ условие (2) не выполнено тогда и только тогда, когда линейные m - и $(n-m)$-мерные подпространства σ_r и $f^\pm_m(r)$ в $T_r M$ имеют нетривиальное пересечение;

е) если существуют линеаризующие координаты $y^+ \in \mathrm{P}^{n^+}$ класса C^1 на W^+ (т.е. такие, в которых отображение $S \,|\, W^+$ принимает линейный вид) и $m \ge n^-$ (либо, соответственно, существуют аналогичные линеаризующие координаты $y^- \in \mathrm{P}^{n^-}$ класса C^1 на W^- и $m \le n^-$), то $f^+_m(r) = \Lambda^+_m(r)$ (соответственно, $f^-_m(r) = \Lambda^-_m(r)$), где $(n-m)$-мерное подпространство $\Lambda^+_m(r)$ в касательном пространстве $T_r W^+$ (соответственно, m-мерное подпространство $\Lambda^-_m(r)$ в касательном пространстве $T_r W^-$) получается параллельным переносом из α^-_m (соответственно, α^+_m) в линеаризующей системе координат на W^+ (соответственно, W^-).

Эта лемма и ее доказательство имеют прозрачный геометрический смысл. Действительно, эта лемма обобщает теорему Адамара–Перрона о существовании сепаратрис гиперболической неподвижной точки.

Определение 2. *Будем говорить, что элемент $\sigma_r \in G_m(r)$, где $r \in W^+$ (соответственно, элемент $\sigma_r \in G_{n-m}(r)$, где $r \in W^-$), находится в общем положении относительно $W^+(W^-)$, если выполнено (2).*

Возвращаемся к формулированию условий теоремы. Пусть r_j – некоторые трансверсальные гомоклинические точки, так что W^- и W^+ пересекаются трансверсально в каждой точке r_j. Говорят, что орбиты точек r_j и неподвижная точка q образуют *гомоклиническую структуру*. Для любого открытого множества U, содержащего гомоклиническую структуру, существует открытое множество $V \subset U$ такое, что ограничение $S \mid A$ на максимальное S-инвариантное множество A, содержащиеся в V, допускает описание методами символической динамики (упомянутое выше множество квазислучайных движений). Пусть, далее, $\lambda_i (1 \le i \le n^+)$, $\mu_i (1 \le i \le n^-)$ — все собственные числа отображения S в точке q, причем $0 <| \lambda_i |< 1 <| \mu_i |$. Предположим, что числа λ_i удовлетворяют мультипликативным условиям нерезонансности

$$| \lambda_s | \ne \prod_i | \lambda_i^{m_i} | (3)$$

для всех индексов s и целых $m_i \ge 0$ таких, что $\sum_i m_i \ge 2$. Введем отношение эквивалентности: $\lambda_{i'} : \lambda_{i''}$, если и только если во всех неравенствах (3) знаки сохраняются при одновременной замене в левой и правой частях всех сомножителей $\lambda_{i'}$ на $\lambda_{i''}$ или всех сомножителей $\lambda_{i''}$ на $\lambda_{i'}$. Пусть $\{\Lambda_1^+, \ldots, \Lambda_{p^+}^+\}$ — соответствующее разбиение $\{\lambda_i\}$ на классы эквивалентности, расположенные в порядке неубывания модулей. Аналогично, пусть $\{\mu_i\}$ также удовлетворяют мультипликативным условиям нерезонансности и $\{\Lambda_1^-, \ldots, \Lambda_{p^-}^-\}$ — соответствующее разбиение $\{\mu_i\}$ на классы эквивалентности, расположенные в порядке невозрастания модулей. Целое число

$$N > \max\{\ln \min_i | \lambda_i | / \ln \max_i | \lambda_i |, \ln \max_i | \mu_i | / \ln \min_i | \mu_i |\}$$

будет ограничивать снизу гладкость диффеоморфизма S (то есть N — столь велико, что $(\max_i | \lambda_i |)^N < \min_i | \lambda_i |$, $(\min_i | \mu_i |)^N > \max_i | \mu_i |$). Рассмотрим подпространства $L_1^\pm \subset \cdots \subset L_{p^\pm}^\pm = T_q W^\pm$ такие, что L_i^+ (соответственно, L_i^-) отвечает жордановым клеткам для собственных чисел $\lambda_s \in \Lambda_j^+$ (соответственно, $\mu_s \in \Lambda_j^-$), где $j \square i$.

По теореме С. Стернберга существуют линеаризующие координаты $y^\pm \in \mathrm{P}^{n^\pm}$ класса C^N на $W^\pm$ (и они аналитические, если S аналитическое), в которых сжимающее или растягивающее отображение $S \mid W^\pm$ принимает линейный вид $y^\pm \mapsto J^\pm y^\pm$. Для каждого из двух индексов $\pm$ обозначим через $\Re^\pm \subset \mathrm{P}^{n^\pm}$ множество $y^\pm$-координат точек $r_j \in W^\pm$ и предположим, что линейное отображение $J^\pm$ и множество $\Re^\pm$ находятся в общем положении. Также обозначим через $\tilde{L}_{i,j}^\pm \subset T_{r_j} W^\pm$ пространства, получающиеся параллельными переносами из $L_i^\pm$ в линеаризующей системе координат и предположим, что при положительных итерациях касательного отображения $TS^{\mp 1} : TM \to TM$ каждое подпространство $\tilde{L}_{i,j}^\pm$ стремится к $L_i^\pm$, т.е. подпространство $\tilde{L}_{i,j}^\pm$ находится в общем положении относительно $W^\mp$.

Теорема. При выполнении сформулированных выше условий справедлива импликация (1).

Эта теорема и сформулированная выше вспомогательная лемма остаются справедливы и для комплексных аналитических диффеоморфизмов.

2. Ветвление решений в комплексной области с точки зрения символической динамики.

Ветвление решений аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x,t) \quad (4)$$

в комплексной области изменения независимой переменной t и фазовых переменных x исследовалось в ряде работ и оказалось тесно связанным с явлением неинтегрируемости, т.е. отсутствием аналитических или мероморфных первых интегралов. Строгие результаты в этом направлении получили, в частности, В.В. Козлов, С.Л. Зиглин и H. Yoshida.

Автор предложил рассматривать ветвление решений с точки зрения методов символической динамики, что представляет и самостоятельный интерес, поскольку позволяет построить *бесконечно-листные* решения. Идея заключается в следующем. Пусть имеется конечное множество замкнутых контуров $\Gamma_i [0,1] \to \mathrm{X}\{t\}$ на комплексной плоскости переменной t с началами $\Gamma_i(0)$ и концами $\Gamma_i(1)$ в одной и той же точке t_0. При некоторых условиях каждой бесконечной в обе стороны последовательности контуров $\omega = [\cdots, \Gamma_{i_{-1}}, \Gamma_{i_0}, \Gamma_{i_1}, \cdots]$ соответствует локально единственное решение x_ω, продолжающееся вдоль ω в обоих направлениях. Каждому замкнутому контуру Γ_i сопоставляется отображение последования S_i обхода вокруг этого контура (в случае автономных систем рассматривается небольшое возмущение контуров Γ_i так, чтобы значения решения для переменной t в начале и в конце каждого контура принадлежали некоторой фиксированной гиперплощадке в фазовом пространстве, трансверсальной к фазовому потоку; тогда отображения последования S_i определены на этой гиперплощадке), а нахождение решений x_ω сводится к исследованию траекторий соответствующего каскада $[S_{i_n} : -\infty < n < +\infty]$ отображений обхода. Определенные свойства *гиперболичности* этих отображений гарантируют существование локально единственной траектории этого каскада отображений, которая даёт искомое решение x_ω, причём построенные решения x_ω аналогичны квазислучайным движениям вблизи неподвижной гиперболической точки и её трансверсальных гомоклинических траекторий, описанным в п. 1.

Это позволило применить идеи п. 1 для нахождения условий, гарантирующих наиболее сильную аналитическую неинтегрируемость (со всеми дополнениями, описанными в п. 1) вблизи некоторого букета замкнутых контуров в расширенном фазовом пространстве $\{x,t\}$. Впрочем, даже в маломерном случае получаются условия неинтегрируемости, которые проще и удобнее известных ранее, поскольку формулируются в терминах возмущения на невозмущённом периодическом решении и не требуют знания формул для асимптотических решений. Найденные условия неинтегрируемости сохраняются при малых возмущениях и легко применимы к широкому классу систем, возникающих в механике и физике, в том числе таких систем, где другие методы доказательства неинтегрируемости неприменимы или их применение связано со значительными аналитическими сложностями.

Для удобства применения метода и ввиду практической пользы предполагается, что система аналитически зависит от малого параметра , причём невозмущенная система не обязана предполагаться интегрируемой и при $\varepsilon = 0$ имеется решение $x = z_0(t)$ с начальными данными $x = O, t = t_0$ аналитически продолжающееся и однозначное вдоль всех контуров Γ_i. Устанавливаются результаты о неинтегрируемости вблизи невозмущённого решения при фиксированных малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Воспроизведённые ниже теоремы были сформулированы в [4, 5]. Их доказательства достаточно просто основаны на идеях п. 1 и были опущены в [4, 5], но некоторые пояснения приведены в [6]. Существенно, что аналог геометрического условия теоремы п. 1 об общности положения подпространств $\square L^{\pm}_{i,j}$

относительно сепаратрис $W^{\mp}$ будет автоматически выполнен и потому не присутствует в формулировках этих теорем.

Рассматриваются три типа многомерных систем, с точки зрения их характера:

1) Системы с гиперболическими невозмущёнными периодическими решениями, для которых получены условия неинтегрируемости вблизи этих решений (случай **A**).

2) Системы, близкие к вполне интегрируемым гамильтоновым, для которых полученные условия неинтегрируемости не связаны с наличием гиперболических периодических решений невозмущенной системы. Здесь рассматриваются два случая:

• все решения невозмущенной системы являются периодическими, но при возмущении рождается невырожденное периодическое решение,

• невозмущенная система является невырожденной (в неавтономном случае) или изоэнергетически невырожденной (в автономном гамильтоновом случае) около некоторого резонансного инвариантного тора и при возмущении на этом торе рождается невырожденное периодическое решение (теорема Пуанкаре или ее негамильтоновый аналог).

Также системы разбиваются на два типа с точки зрения их зависимости от времени:

I) система τ -периодическая по t, фазовые переменные $(x,t)\in D$, где D — область в $\mathrm{X}^n\times(\mathrm{X}/\tau\mathrm{Z})$; $z_0(t)\equiv O\in\mathrm{X}^n$ при $=0$; $\Gamma=\Gamma_0:[0,1]\to\mathrm{X}\{t\}$ — некоторый контур такой, что $\Gamma(1)-\Gamma(0)=\tau$ и $\{O\}\times\Gamma\subset D$; область $V=\{t:(O,t)\in D\}\supset\Gamma\equiv\Gamma_0$.

II) система автономна, фазовые переменные $x=(y,\phi)\in D$, где D — область в $\mathrm{X}^n\times(\mathrm{X}/2\pi\mathrm{Z})$; $z_0(t)=(O,\omega t)$ при $=0$; $\Gamma=\Gamma_0:[0,1]\to\mathrm{X}\{\phi\}$ — некоторый контур такой, что $\Gamma(1)-\Gamma(0)=2\pi$ и $\{O\}\times\Gamma\subset D$; область $V=\{t:(O,\omega t)\in D\}\supset\omega^{-1}\Gamma\equiv\Gamma_0$.

Определение 3. *Будем говорить, что невырожденный линейный оператор* $T:\mathrm{X}^n\to\mathrm{X}^n$ *и* X^n*-значная функция* f*, голоморфная всюду в* V*, кроме конечного числа особенностей, находятся в общем положении, если* T *и* $\subset\mathrm{X}^n$ *находятся в общем положении в смысле определения 1, где обозначает множество, образованное вычетами* f *в* V.

Замкнутые контуры $\Gamma_i\subset V$ $(i\neq0)$ выбираются так, что 1) каждый из них стягиваем в области V и обходит ровно одну особенность $t_i\in V$ функции f, 2) оператор T и подмножество $(\{\Gamma_i\})=\{Res_{t_i} f\}\subseteq$ $(i\neq0)$ удовлетворяет условию определения 1.

Под неинтегрируемостью будет пониматься неинтегрируемость в смысле п. 1 в фиксированной окрестности букета контуров I) $\{O\}\times\cup_i\Gamma_i\subset D$ или II) $\{O\}\times\omega\cdot\cup_i\Gamma_i\subset D$, в зависимости от типа системы.

Теорема I.A. Пусть правая часть τ -периодичной по t системы (4) имеет вид

$$X(x,t)=X_0(x)+X_1(x,t)+\cdots,$$

причем $X_0(O)=0$ для некоторой точки $O\in\mathrm{X}^n$ и матрица $\Lambda=(\partial X_0/\partial x)|_{x=O}$. Далее, пусть среди собственных чисел ν_j матрицы $\exp(\tau\Lambda)$ нет лежащих на единичной окружности, причем каждое из множеств чисел ν_j, лежащих с одной стороны от единичной окружности, удовлетворяет мультипликативным условиям нерезонансности типа Пуанкаре

$$|\nu_s|\neq|\nu^m|,\quad \text{где}\quad \nu^m=\prod_j\nu_j^{m_j},\ m=\{m_j\}$$

для всех s и неотрицательных целых m_j таких, что $|m|=\sum_j m_j\geq2$. Тогда, если матрица $\exp(\tau\Lambda)$ и функция $f(t)=\exp(-\Lambda t)\cdot X_1(O,t)$ находятся в общем положении, то система неинтегрируема при каждом достаточно малом $\neq0$.

Теорема II.А. Пусть автономная система имеет вид

$$\dot{y} = Y(y,\phi) = Y_0(y) + Y_1(y,\phi) + \cdots, \quad \dot{\phi} = \Theta(y,\phi) = \Theta_0(y) + \cdots,$$

причем $Y_0(O) = 0$ для некоторой точки $O \in \mathrm{X}^n$ и $\omega = \Theta_0(O) \neq 0$. Тогда утверждение теоремы I.А останется в силе, если положить $\tau = 2\pi/\omega$, $\Lambda = (\partial Y_0/\partial y)|_{y=O}$ и $f(t) = \exp(-\Lambda t) \cdot Y_1(O,\omega t)$.

Теорема I.Б. Пусть правая часть τ -периодичной по t системы (4) имеет вид

$$X(x,t) = X_1(x,t) + \cdots,$$

причем $G(O) = 0$ для некоторой точки $O \in \mathrm{X}^n$, где $G(x) = \int_\Gamma X_1(x,t)dt$, матрица $\Lambda = (\partial G/\partial x)|_{x=O}$ имеет спектр $\{\theta_j : 1 \le j \le n\}$. Определим множество $\mathrm{K} = \cup_j \{ir\theta_j^{-1} : r \in \mathrm{P}\}$ и обозначим через Φ_0 некоторую связную компоненту множества $\mathrm{X} \setminus \mathrm{K}$. Тогда сектор Φ_0 с вершиной в нуле определяет разбиение $\{\theta_j\}$ на два подмножества, соответствующие разным знакам $\Re(\theta_j)$, где произвольное $\varepsilon \in \Phi_0$. Для каждого из этих подмножеств будем предполагать выполненными аддитивные условия нерезонансности Пуанкаре

$$\theta_s \neq (m,\theta), \quad \text{где} \quad (m,\theta) = \sum_j m_j\theta_j,\ m = \{m_j\}$$

для всех s и неотрицательных целых m_j таких, что $|m| = \sum_j m_j \ge 2$. Тогда, если матрица Λ и функция $f(t) = X_1(O,t)$ находятся в общем положении, то система неинтегрируема для большинства достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \in \Phi_0$. Строго говоря, имеется замкнутое множество $\mathrm{K}_1 \subset \Phi_0$, состоящее из не более чем счетного набора лучей на комплексной плоскости, выходящих из нуля, и накапливающихся к сторонам Φ_0, такое, что имеет место следующее свойство. Система неинтегрируема при каждом достаточно малом $\varepsilon \in \Phi'$, $\varepsilon \neq 0$, где $\Phi' \subset \mathrm{X}$ — любой фиксированный сектор с вершиной в нуле, лежащий вместе со своими сторонами строго внутри некоторого сектора, являющегося компонентой связности $\Phi_0 \setminus \mathrm{K}_1$. Здесь $\in \Phi_0 \setminus \mathrm{K}_1$, если и только если аддитивные условия нерезонансности типа Пуанкаре

$$\Re(\theta_s) \neq \Re((m,\theta)), \quad \text{где} \quad (m,\theta) = \sum_j m_j\theta_j,\ m = \{m_j\},$$

выполнены для каждого из описанных выше подмножеств $\{\theta_j\}$.

Теорема II.Б. Пусть автономная система имеет вид

$$\dot{y} = Y(y,\phi) = Y_1(y,\phi) + \cdots, \quad \dot{\phi} = \Theta(y,\phi) = \Theta_0(y) + \cdots,$$

причем $G(O) = 0$ для некоторой точки $O \in \mathrm{X}^n$ и $\omega = \Theta_0(O) \neq 0$, где $G(y) = \int_\Gamma Y_1(y,\phi)d\phi$. Тогда утверждение теоремы I.Б останется в силе, если положить $\Lambda = \omega^{-1}(\partial G/\partial y)|_{y=O}$ и $f(t) = Y_1(O,\omega t)$.

Теоремы I.В и II.В будут сформулированы для простейшего случая гамильтоновой системы с полутора или двумя степенями свободы. Теорема I.В останется в силе, если рассматривается рождение периодических решений при неконсервативном возмущении гамильтоновой системы с полутора степенями свободы.

Теоремы I.В и II.В. *Пусть в гамильтоновой системе с полутора или двумя степенями свободы, близкой к вполне интегрируемой, при малых значениях параметра возмущения $\varepsilon > 0$ на резонансном торе рождается гиперболическое периодическое решение Пуанкаре. Если для этого решения выполнено условие Козлова (в первом порядке теории возмущений переменные действия испытывают скачок при обходе некоторого замкнутого контура), то система неинтегрируема при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Библиографический список

1. *Dovbysh, S.A.* Transversal intersection of separatrices and non-existence of an analytical integral in multi-dimensional systems [Текст] / S.A. Dovbysh / Variational and Local Methods in the Study of Hamiltonian Systems (Proc. of the Workshop, Trieste, 24–28 October, 1994), Eds. A. Ambrosetti, G.F. Dell'Antonio, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1995, pp. 156–165.
2. *Довбыш, С.А.* Трансверсальное пересечение сепаратрис, структура множества квазислучайных движений и несуществование аналитического интеграла в многомерных системах [Текст] / С.А. Довбыш / Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, Вып. 4. С. 153–154.
3. *Dovbysh, S.A.* Transversal intersection of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems. I. Basic result: Separatrices of hyperbolic periodic points [Текст] / S.A. Dovbysh / Collectanea Mathematicae, **50** (1999), no. 2, pp. 119–197.
4. *Довбыш, С.А.* Ветвление решений в комплексной области с точки зрения символической динамики и неинтегрируемость многомерных систем [Текст] / С.А. Довбыш / Докл. РАН. 1998. Т. 361, Вып. 3. С. 303–306.
5. *Dovbysh, S.A.* Branching of solutions as obstructions to the existence of a meromorphic integral in many-dimensional systems [Текст] / S.A. Dovbysh / Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. NATO ASI Series. Series C: Math. and Phys. Sci., V. 533. Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 1999, pp. 324–329.
6. *Довбыш, С.А.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и неинтегрируемость многомерных систем. Приложения к задаче о движении сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса [Текст] / С.А. Довбыш / Фундам. и прикл. математика (в печати)

Формулы суммирования для преобразований Фурье-Хаара и Фурье-Радемахера интегрируемых функций

С.В. Зотиков

§ 1. Определение систем типа Хаара и типа Радемахера

Пусть $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ - произвольная последовательность натуральных чисел, где все $p_n \geq 2$. Наряду с ней рассмотрим последовательность $(m_n)_{n=0}^{\infty}$, определенную следующим образом: $m_0 = 1$: $m_{n+1} = m_n p_n$, $n=0,1,2,\ldots$ Тогда для любого натурального числа $k \geq 1$ существует $n \in \mathbb{N}$ - такое, что $m_n \leq k \leq m_{n+1} - 1$, и число k единственным образом представимо в виде $k = m_n + r(p_n - 1) + s - 1$, где $r = 0, 1, \ldots, m_n - 1$; $s = 1, 2, \ldots, p_n - 1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Для заданной последовательности $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ система функций типа Хаара $X(p_n) \equiv (X_k)_{k=0}^{\infty}$ определяется на $[0,1]$ следующим образом: $X_0(t) \equiv 1$ на $[0,1]$. При $k \geq 1$, с учетом указанного выше представление числа k, функция $\mathrm{X}_k(t)$ определяется соотношением

$$X_k(t) \equiv X_{nr}^{(s)}(t) = \left[\begin{array}{l} \sqrt{m_n}\exp\{2\pi is\dfrac{q}{p_n}\}, t\in(\dfrac{r}{m_n}+\dfrac{q}{m_{n+1}};\dfrac{r}{m_n}+\dfrac{q+1}{m_{n+1}}), q=0,1,\dots,p_n-1, \\ 0, t\in(0;1)\setminus[\dfrac{r}{m_n};\dfrac{r+1}{m_n}], r=0,1,2,\dots,m_n-1; n=0,1,2,\dots \end{array} \right.$$

Далее во внутренних точках разрыва $X_{nr}^{(s)}(t)$ полагается равной полусумме её односторонних пределов, а на концах отрезка $[0,1]$ - её предельным значениям изнутри отрезка. Таким образом, система $X(p_n)$ полностью определена. Классическая система Хаара (χ_k) представляет систему $X(p_n)$, где все $p_n = 2, n \geq 0$. Класс всех систем типа Хаара обозначается через X. Впервые системы $X(p_n)$, где (p_n) - последовательность простых натуральных чисел, были введены Н. Я. Виленкиным в 1958 году. Ряды по системам $X(p_n)$, определяемым ограниченными последовательностями простых натуральных чисел, рассматривались в работах Н.Я.Виленкина, А.И.Рубинштейна и Б.И.Голубова. В статье [1] изучаются свойства систем $X(p_n)$, определяемых произвольными последовательностями (p_n) натуральных чисел. В указанных выше работах установлено, что всякая система класса $\boldsymbol{X}$ ортонормированна в пространстве $L^2(0;1)$, полна в $L\ (0;1)$ и замкнута в $C\ (0;1)$. Изучению свойств систем класса $\boldsymbol{X}$ посвящён ряд статей автора, см., например, [2].

Для заданной последовательности $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ система функций типа Радемахера $\boldsymbol{R(p_n)=(R_n(t))_{n=0}^{\infty}}$ определяется на отрезке $[0,1]$ следующим соотношением ($n = 0,1,2,\dots$)

$$\boldsymbol{R_n}(t) = \left[\begin{array}{l} (p_n-1)^{0,5}, t\in\bigcup\limits_{r=0}^{m_n-1}\left(\dfrac{r}{m_n};\dfrac{r}{m_n}+\dfrac{1}{m_{n+1}}\right); \\ -(p_n-1)^{-0,5}, t\in\bigcup\limits_{r=0}^{m_n-1}\left(\dfrac{r}{m_n}+\dfrac{1}{m_{n+1}};\dfrac{r+1}{m_n}\right). \end{array} \right.$$

Во внутренних точках разрыва функция $\boldsymbol{R_n(t)}$ полагается равной полусумме её односторонних пределов, а на концах отрезка [0;1] – её предельным значениям изнутри отрезка. Класс всех систем $\boldsymbol{R(p_n)}$ обозначается через $\boldsymbol{R}$. Это множество содержит в себе классическую систему Радемахера $\boldsymbol{(r_n(t))}$, которая представляет систему $\boldsymbol{R(2)}$. Системы типа Радемахера были определены автором и изучались в статье [3]. Оказалось, что каждая система класса $\boldsymbol{R}$ является системой независимых функций, ортонормированной и неполной системой. Всякая система типа Радемахера является системой сходимости.

§ 2. Континуальные аналоги систем типа Хаара и типа Радемахера

Континуальные аналоги систем типа Хаара и типа Радемахера строятся на основе конструкции скрещенного произведения двух ортонормированных систем функций, введённой в работе [4].

Пусть $\Phi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\Psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$ - две произвольные ортонормированные на [0;1[системы (о.н.с.), все функции которых с периодом 1 продолжены на правую числовую полуось $\boldsymbol{R}_0$. Скрещенным произведением о.н.с. Φ на о.н.с. Ψ называется функция $\boldsymbol{K}_{\Phi\Psi}$, определяемая на $\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{R}_0$ равенством $K_{\Phi\Psi}(x, y) = \varphi_{[y]}(x) \cdot \psi_{[x]}(y)$, где [$x$]- целая часть числа $x \in \boldsymbol{R}_0$. Эта функция является континуальным аналогом и о.н.с. Φ и о.н.с. Ψ. Взяв в качестве одной из компонент $\boldsymbol{K}_{\Phi\Psi}$ о.н.с. типа Хаара $\boldsymbol{X(p_n) = (X_n(t))_{n=0}^{\infty}}$ или о.н.с. типа Радемахера $\boldsymbol{R(p_n) = (R_n(t))_{n=0}^{\infty}}$, получим континуальные аналоги этих о.н.с. вида $\boldsymbol{K}_{X\Psi}$, $\boldsymbol{K}_{\Psi X}$, $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$ и $\boldsymbol{K}_{\Phi R}$, где в качестве Φ и Ψ могут выступать любые о.н.с.. Далее будут рассматриваться лишь функции $\boldsymbol{K}_{X\Psi}\boldsymbol{(x,y) = X_{[y]}(x)}\psi_{[x]}\boldsymbol{(y)}$ и $\boldsymbol{K}_{R\Psi}\boldsymbol{(x,y) = R_{[y]}(x)}\psi_{[x]}\boldsymbol{(y)}$, $\boldsymbol{x, y \in R_0}$, где $\boldsymbol{x}$ - переменная, $\boldsymbol{y}$ - параметр.

§ 3. Определения и условия существования преобразований Фурье-Хаара и Фурье-Радемахера интегрируемых функций

Пусть скрещенное произведение $K_{X\Psi}$ образовано произвольной системой типа Хаара $\boldsymbol{X = X(p_n)}$ и произвольной, ограниченной в совокупности о.н.с. Ψ. Покажем, что для любой функции $\boldsymbol{f \in L(0;\infty)}$ интеграл $\int_0^{\infty} f(x)\overline{K_{X\Psi}(x,y)}dx$ абсолютно сходится на $\boldsymbol{R}_0$. Действительно, для произвольного $\boldsymbol{y \in R}_0$ существует натуральное число n – такое, что $m_n \le [y] < m_{n+1}$. Тогда имеем, используя определения $K_{X\Psi}$ и системы $X(p_n)$

$$\int_0^{\infty}\left| f(x)\overline{K_{X\Psi}(x,y)}\right| dx = \int_0^{\infty} |f(x)| \left|\overline{X_{[y]}(x)}\right| \left|\overline{\psi_{[x]}(y)}\right| dx \le C_{\Psi}\int_0^{\infty} |f(x)| \sqrt{m_n}\, dx$$

$\le C_{\Psi}\sqrt{y}\, \| f \|_{L(0,\infty)} < +\infty$, так как по условию $C_{\Psi} = \sup\limits_{m,t}\left|\psi_m(t)\right| < +\infty$. Ввиду произвольности выбора $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{R}_0$ получаем, что рассматриваемый интеграл сходится абсолютно всюду на $\boldsymbol{R}_0$. Таким образом, справедливо

<u>Утверждение 1.</u> *Скрещенное произведение* $\boldsymbol{K}_{X\Psi}$ *, образованное произвольной системой типа Хаара* $\boldsymbol{X = X(p_n)}$ *и произвольной ограниченной о.н.с.* Ψ*, для всякой функции* $\boldsymbol{f \in L(0;\infty)}$ *порождает её интегральное преобразование*

$$\hat{f}_{X\Psi}\boldsymbol{(y)} = \int_0^{\infty} f(x)\overline{K_{X\Psi}(x,y)}dx, \ \boldsymbol{y \in R}_0.$$

Указанное преобразование является аналогом классического преобразования Фурье, и мы называем его преобразованием Фурье функции $\boldsymbol{f}$ по отношению к скрещенному произведению $K_{X\Psi}$, или преобразованием Фурье – Хаара функции f в пространстве $L(0;\infty)$.

Утверждение 2. *Для любой интегрируемой функции* f *– такой, что при* $x\to+\infty$ $|f(x)|\downarrow$, *или такой, что* $\sqrt{x}\,f(x)\in L(0;\infty)$, *всюду на* R_0 *определено её преобразование Фурье по отношению к скрещенному произведению произвольной системы типа Хаара на себя.*

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет первому из указанных выше условий, $X=X(p_n)$ – произвольная система типа Хаара, а K_{XX} - скрещенное произведение системы типа Хаара на себя. Тогда при $y\ge 1$ имеем

$$\int_0^\infty\left|f(x)\overline{K_{XX}(x,y)}\right|dx=\int_0^\infty|f(x)|\left|X_{[y]}(x)\right|\left|X_{[x]}(y)\right|dx=\int_{[0;1[}|f(x)|\left|X_{[y]}(x)\right|dx+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}\left|X_k(y)\right|\int_{[k;k+1[}|f(x)|\left|X_{[y]}(x)\right|dx\ \le\ \sqrt{y}\int_{[0;1[}|f|\ +\ \sqrt{y}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}\left|X_k(y)\right|\frac{C}{k}\ \le$$

$$\le\ \sqrt{y}\int_{[0;1[}|f|\ +\ \sqrt{y}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{m_n}\,\frac{C}{m_n}\ =\ C_1\sqrt{y}\,,$$

где C и C_1 - абсолютные константы, зависящие лишь от функции f. Аналогично показывается сходимость рассматриваемого интеграла при $y\in[0;1[$.

Итак, для функции f, удовлетворяющей первому условию Утверждения 2, всюду на R_0 определено её преобразование Фурье-Хаара $\hat{f}_{XX}\{y\}=\int_0^\infty f(x)\overline{K_{XX}(x,y)}dx$.

Подобными рассуждениями доказывается существование преобразования Фурье-Хаара функции, удовлетворяющей второму условию Утверждения 2.

Следствие. *Для любой функции* f *из пространства* $LV(0;\infty)$ *существует её преобразование Фурье по отношению к скрещенному произведению произвольной системы типа Хаара на себя*

Пусть теперь скрещенное произведение $K_{R\Psi}$, образовано произвольной системой типа Радемахера $R=R(p_n)$ и произвольной, ограниченной в совокупности о.н.с. Ψ. Покажем, что для любой функции $f\in L(0;\infty)$ интеграл $\int_0^\infty f(x)\overline{K_{R\Psi}(x,y)}dx$ абсолютно сходится на R_0. Действительно, для произвольного $y\in R_0$ получаем в силу определений $K_{R\Psi}$ и системы $R(p_n)$:

$$\int_0^\infty\left|f(x)\overline{K_{R\Psi}(x,y)}\right|dx=\int_0^\infty|f(x)|\left|R_{[y]}(x)\right|\left|\psi_{[x]}(y)\right|dx\le C_\Psi\sqrt{p_{[y]}-1}\int_0^\infty|f(x)|dx=C_\Psi\sqrt{p_{[y]}-1}\,\|f\|<$$

$+\infty$, так как по условию $C_\Psi=\sup\limits_{m,t}\left|\psi_m(t)\right|<+\infty$. Итак, справедливо

Утверждение 3. *Скрещенное произведение* $K_{R\Psi}$, *образованное произвольной системой типа Радемахера* $R=R(p_n)$ *и произвольной ограниченной о.н.с.* Ψ, *для всякой функции*

$f \in$ ***L(0;*** ∞***)*** *порождает её интегральное преобразование* $\hat{f}_{R\Psi}$ ***(y)***$= \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{R\Psi}(x,y)}dx$ ***, y***$\in$ $\boldsymbol{R}_0$.

Это преобразование также является аналогом классического преобразования Фурье, и мы называем его преобразованием Фурье функции $\boldsymbol{f}$ по отношению к скрещенному произведению $\boldsymbol{K}_{R\Psi}$, или преобразованием Фурье – Радемахера функции $\boldsymbol{f}$ в пространстве ***L(0;*** ∞***)***. Аналогично доказывается

<u>Утверждение 4.</u> *Если неограниченная последовательность* $(p_n)_{n=0}^\infty$ *, определяющая систему типа Радемахера* ***R*** *=* ***R(p*** $_n$***)*** *и функция* $\boldsymbol{f}\in$***L(0;*** ∞***)-*** *таковы, что сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^\infty \sqrt{p_n - 1} \int\limits_{[n;n+1[} |\, f\,|$*, то для функции* f *всюду на* $\boldsymbol{R}_0$ *определено её преобразование Фурье по отношению к скрещенному произведению* $\boldsymbol{K}_{RR}$ *системы типа Радемахера на себя.*

§ 4. Формулы суммирования для преобразований Фурье-Хаара и Фурье-Радемахера

<u>Теорема 1.</u> *Пусть* ***X(p*** $_n$***)*** *– произвольная система типа Хаара, а функция* $\boldsymbol{f}\in$***L(0;*** ∞***)*** *и ограниченная о.н.с.* $\Psi = (\psi_m)_{m=0}^\infty$ *- таковы, что ряд Фурье по системе* ***X(p*** $_n$***)*** *функции G:* $G(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty \overline{\psi_k(0)} f(x+k)$, $x\in[0;1[$, *в точке x=0 сходится к G(0). Тогда для преобразования Фурье-Хаара функции* $\boldsymbol{f}$ *имеет место формула*

$$\hat{f}_{X\Psi}(0) + \sum_{n=0}^\infty \sqrt{m_n} \sum_{s=1}^{p_n - 1} \hat{f}_{X\Psi}(m_n + s - 1) = \sum_{k=0}^\infty \overline{\psi_k(0)} f(k)$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего, покажем, что ряд, определяющий функцию G, сходится абсолютно почти всюду на [0;1[. Действительно, в силу Утверждения 1 для функции $\boldsymbol{f}$, удовлетворяющей условию теоремы, её преобразование Фурье-Хаара $\hat{f}_{X\Psi}$ ***(y)***$= \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{X\Psi}(x,y)}dx$ определено для любого $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}_0$. Это значит, что абсолютно сходится рассматриваемый интеграл, в частности, при $y = 0$. Тогда $+\infty > \int\limits_0^\infty |f(x)|\left|\overline{K_{X\Psi}(x,0)}\right|dx =$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int\limits_{[k;k+1[} |f(x)|\left|\overline{X_0(x)}\right|\left|\overline{\psi_{[x]}(0)}\right|dx = \sum_{k=0}^\infty \left|\overline{\psi_k(0)}\right| \int\limits_{[0;1[} |f(x+k)|dx = \int\limits_{[0;1[} \sum_{k=0}^\infty \left|\overline{\psi_k(0)}\right| |f(x+k)|dx.$$

Из этого соотношения и вытекает абсолютная сходимость ряда, определяющего функцию G, и включение $G \in$ ***L(0;1).*** Пусть теперь m – произвольное натуральное число. Используя определение $\boldsymbol{K}_{X\Psi}$, применяя свойство σ - аддитивности интеграла Лебега и критерий мажорируемой сходимости для почленного интегрирования рядов, получаем $\hat{f}_{X\Psi}(m) = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{X_m(x)}\overline{\psi_{[x]}(m)}dx = \sum\limits_{k=0}^\infty \overline{\psi_k(0)} \int\limits_{[k;k+1[} f(x)\overline{X_m(x)}dx = \sum\limits_{k=0}^\infty \overline{\psi_k(0)} \int\limits_{[0;1[} f(x+k)\overline{X_m(x)}dx =$

$= \int\limits_{[0;1[} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{\psi_k(0)} f(x+k) \overline{X_m(x)} dx = \hat{G}(m)$, где $\hat{G}(m)$ - m-ый коэффициент Фурье по системе X = $=X$ (p_n) функции G: $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{\psi_k(0)} f(x+k)$, $x \in [0;1[$. В силу условия доказываемой теоремы

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{G}(m) X_m(0) = G(0), \text{ или } \hat{f}(0) X_0(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(m) X_m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\psi_k(0)} f(k).$$

Из определения системы типа Хаара следует, что значения функций $X_m(0)$. *$m = 0,1,2,\ldots$,* отличны от нуля лишь для индексов вида *$m = 0$* и *$m = m_n + s - 1$, $s = 1,2,\ldots,p_n - 1$, $n = 0,1,2,\ldots$,* причём, $X_0(0) = 1$, $X_{m_n+s-1}(0) = \sqrt{m_n}$. Подставляя эти значения $X_m(0)$ в полученное выше равенство, завершаем доказательство.

Рассуждая, как и при доказательстве Теоремы 1, убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. *Пусть **$X(p_n)$** – произвольная система типа Хаара, а функция **f**- такова, что **$|f(x)| \downarrow$** при $x \to +\infty$, или такова, что $\sqrt{x}$ **$f(x)$** $\in$ **$L(0;\infty)$**, и ряд Фурье по системе **$X(p_n)$** функции D: $D(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} X_k(0) f(x+k)$, $x \in [0;1[$, в точке $x=0$ сходится к $D(0)$. Тогда для преобразования Фурье-Хаара функции **f** имеет место формула*

$$\hat{f}_{XX}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{m_n} \sum_{s=1}^{p_n-1} \hat{f}_{XX}(m_n + s - 1) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{m_n} \sum_{s=1}^{p_n-1} f(m_n + s - 1)$$

Замечание. Если система типа Хаара ***$X(p_n)$*** определяется ограниченной последовательностью ***(p_n)***, а функция ***f*** - такова, что **$|f(x)| \downarrow$** при $x \to +\infty$ или такова, что $\sqrt{x}$ ***$f(x)$*** $\in$ ***$L(0;\infty)$***, то для её преобразования $\hat{f}_{XX}$ справедлива формула Теоремы 2. В частности, в случае системы Хаара ***$X = X(2)$*** для преобразований Фурье-Хаара указанных выше функций получаем формулу

$$\hat{f}_{XX}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n}\, \hat{f}_{XX}(2^n) = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2^k}\, f(2^k)$$

Теорема 3. *Пусть **$R(p_n)$** – произвольная система типа Радемахера, а функция **$f \in L(0;\infty)$** и ограниченная о.н.с. $\Psi = (\psi_m)_{m=0}^{\infty}$ - таковы, что ряд Фурье по системе **$R(p_n)$** функции G: $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{\psi_k(0)} f(x+k)$, $x \in [0;1[$, в точке $x=0$ сходится к $G(0)$. Тогда для преобразования Фурье-Радемахера функции **f** справедливо соотношение*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{p_n - 1}\, \hat{f}_{R\Psi}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\psi_k(0)} f(k).$$

Доказательство этой Теоремы аналогично доказательству Теоремы 1 с учётом того, что *$R_n(0) = \sqrt{p_n - 1}$, $n = 0,1,2,\ldots$.* Аналогично доказывается

Теорема 4. *Если система типа Радемахера* $\boldsymbol{R(p_n)}$ *и функция* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L(0;\infty)}$*-таковы, что сходится ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{p_n-1}\int_{[n;n+1[}|f|$*, а ряд Фурье по* ***системе R= R(p***$_n$***)*** *функции* ***F:*** $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{p_k-1}f(x+k)$, $x\in[0;1[$, *сходится в точке x = 0 к F(0), то для преобразования Фурье-Радемахера функции* ***f*** *справедлива формула*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{p_n-1}\ \hat{f}_{RR}(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{p_k-1}\,f(k).$$

Заметим, что в случае системы Радемахера ***R = R(2)*** для преобразования Фурье-Радемахера функции, удовлетворяющей условиям Теоремы 4, получаем формулу $\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}_{RR}(n)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)$. Именно такой вид имеет формула суммирования Пуассона для классического преобразования Фурье, см. [5], с. 54.

Библиографический список

1. *Голубов, Б.И.* Об одном классе полных ортогональных систем [Текст] / Б.И.Голубов / – Сиб. матем. журн.- т.1Х, № 2.- 1968. - С. 297-314.
2. *Зотиков, С.В.* О сходимости почти всюду рядов Фурье по системам типа Хаара [Текст] / С.В. Зотиков / - Сиб. матем. Журнал.- т.14.- № 4,.-1973.- С. 760-765.
3. *Зотиков, С.В.* О классе систем типа Радемахера [Текст] / С.В. Зотиков / - Известия ВУЗов . – Математика. – № 7. -1976. - С. 30- 43.
4. *Виленкин, Н.Я.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций [Текст] / Н.Я. Виленкин, С.В. Зотиков / - Матем. Заметки. - т.13.- № 3.- 1973- С. 469-480.
5. *Бохнер, С.* Лекции об интегралах Фурье [Текст] / С. Бохнер / М.- Физматгиз.- 1962 г.,- 360 с.

Вычислительный эксперимент при изучении поведения жидкости в условиях невесомости.

А.В. Корольков

На борту космического аппарата (КА), совершающего орбитальный полет вокруг Земли, нет полной невесомости. Существует большое количество возмущающих факторов, которые вызывают так называемые остаточные ускорения. Суммарный вектор остаточных ускорений определяет гравитационное состояние на борту орбитального КА, которое можно охарактеризовать как состояние, близкое к невесомости [1].

В отличие от земных условий состояние, близкое к невесомости, переменно во времени. Переменным является как величина суммарного вектора остаточных ускорений, так и его направление и эти параметры зависят от режима функционирования КА. Режим функционирования определяется программой полета и зависит от работы бортовых систем и деятельности экипажа. На основе анализа многочисленных результатов измерений остаточных ускорений на борту КА, результатов расчетов и теоретических исследований удалось для различных режимов функционирования КА количественно описать законы изменения суммарного вектора остаточных ускорений во времени. В ряде случаев можно считать, что изменение во времени суммарного вектора остаточных ускорений сводится к вращению в некоторой плоскости постоянного по модулю вектора с постоянной угловой скоростью.

Количественные характеристики состояния, близкого к невесомости, – уровень остаточных ускорений (g) и период изменения направления вектора остаточных ускорений (T_g) – необходимо учитывать при реализации различных технологических процессов. От величины g зависит интенсивность гравитационной конвекции и время ее «разгона» T_f [2]. Соотношение времен T_g и T_f определяет режим развития конвекции. Если $T_g >> T_f$, гравитационная конвекция развивается как в постоянном поле вектора ускорения. Если $T_g << T_f$, то конвективное течение подавляется, а теплообмен осуществляется практически за счет теплопроводности. Если же эти два характерных времени одного порядка, то возможно значительное увеличение интенсивности конвективного течения. Режимы развития гравитационной конвекции в условиях, близких к невесомости, изучались в вычислительном эксперименте, основанном на численном решении системы уравнений Навье-Стокса [3]. На рис. 2. показаны распределения температуры жидкости в емкости в один и тот же момент времени при тепловой гравитационной конвекции в постоянном и переменном поле вектора ускорения.

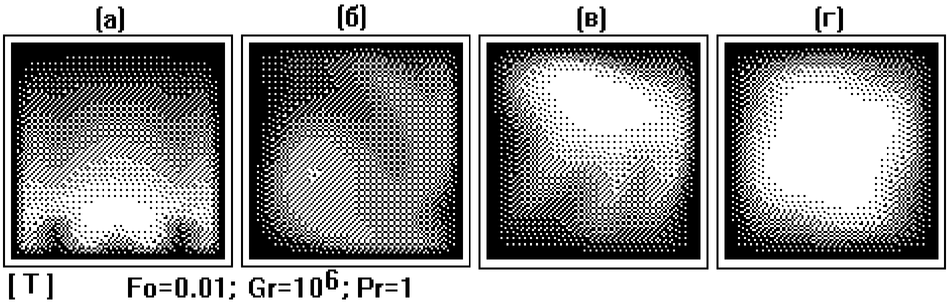


Рис. 2. Распределения температуры жидкости в емкости в один и тот же момент времени при тепловой гравитационной конвекции в постоянном (а) и переменном поле вектора ускорения (б) T_g/T_f=0.6, (в) T_g/T_f=1.25, (г) T_g/T_f=2.5

Именно эффектом увеличения интенсивности конвекции за счет изменения во времени направления вектора остаточных ускорений были объяснены причины серии неудач при проведении технологических экспериментов по выращиванию кристаллов на борту ОНС «Салют», когда были получены образцы кристаллов на борту КА с большей неоднородностью, чем в земных условиях [3].

В постоянном поле вектора ускорения **g** интенсивность конвективного течения определяется параметрами Gr и Pr ($Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot R^3}{\upsilon^2}, Pr = \frac{\upsilon}{a}$ в традиционных обозначениях). В условиях орбитального полета существенную роль играет закон изменения суммарного вектора остаточных ускорений (его величины и направления). Число Gr определяется по некоторой характерной амплитуде g_0. На рис.2 показаны интенсивности развития конвективного движения жидкости при одних и тех же числах Gr и Pr, но различных законах изменения амплитуды вектора ускорения во времени.

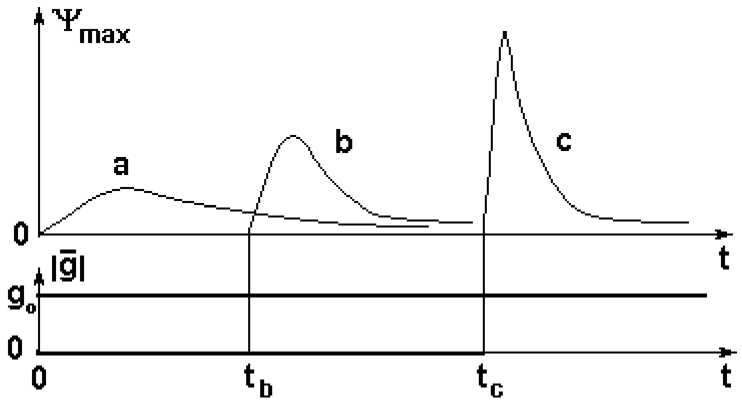


Рис. 2. Интенсивность конвективного движения жидкости во времени при различных законах изменения величины постоянного по направлению вектора ускорений. Нагрев жидкости осуществляется с момента t=0 в условиях полной невесомости, в момент а) t=0, b) $t=t_b$, c) $t=t_c$, соответственно, возникает постоянное ускорение g_0 ($Gr=10^6$, $Pr=1$)

Для определения режима развития конвективного движения жидкости в гидродинамической системе не достаточно ограничиваться лишь знанием частотно-амплитудных характеристик остаточных ускорений. Необходимо исследовать эволюцию вектора в целом. Поля на рис. 3 получены при одних и тех же амплитудах и частотах изменения проекций вектора ускорения по осям координат, но при различных фазовых сдвигах.

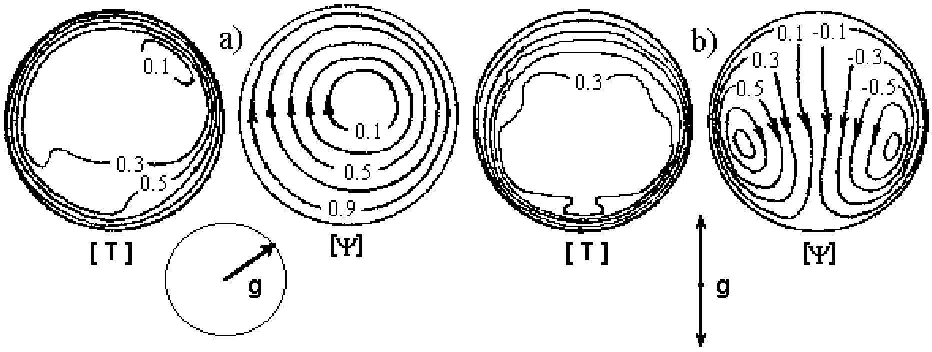


Рис. 3. Поля функций тока и температур в один и тот же момент времени при гравитационной конвекции в цилиндрическом сосуде, полученные при одних и тех же амплитудах и частотах изменения проекций вектора ускорения по осям координат, но при различных фазовых сдвигах

Каждая гидродинамическая система чувствительна к определенному частотно-амплитудному диапазону [4]. Суммарный вектор остаточных ускорений на борту КА складывается из множества отдельных возмущений от различных источников. Сложное нерегулярное изменение суммарного вектора остаточных ускорений иногда удается представить в виде суммы нескольких регулярных возмущений различной частоты и амплитуды. В этом случае можно моделировать конвективное движение жидкости, учитывая воздействие на систему лишь составляющие вектора ускорений, у которых характеристики T_g и T_f одного порядка. На рис. 4. представлены поля температур в различные моменты времени при различных законах изменения суммарного вектора ускорений. Суммарный вектор ускорений в строке а) состоит из двух компонент: **g=g1+g2**, где g1=g2, а $T_{g1}=10\ T_{g2}$ и $T_{g1}=T_f$. В строке b) **g=g1**, в строке с) **g=g2**, в строке d) **g**=0. Вклад высокочастотной составляющей **g2** практически незаметен на фоне активного конвективного течения, вызванного составляющей **g1** (сравните строки а) и b) рис. 4.). Непосредственно компонента **g2** заметно интенсифицирует теплообмен по сравнению с теплопроводностью (сравните строки с) и d) рис. 4.).

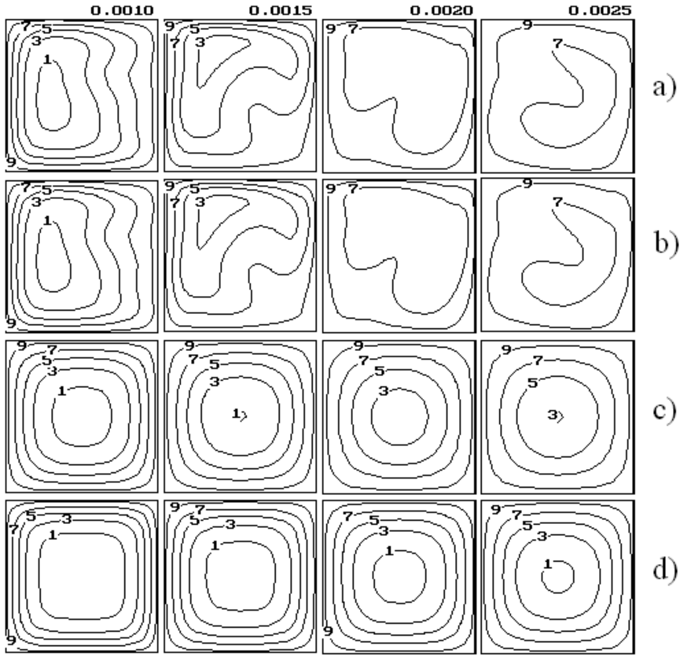


Рис. 4. Поля температур в различные моменты времени при различных законах изменения суммарного вектора ускорений; a) **g**=**g1**+**g2**, b) **g**=**g1**, c) **g**=**g2**, d) **g**=0.Расчеты проводились при Gr=10^6; Pr=2.93

На поведение системы жидкость-газ в условиях, близких к невесомости, может существенно повлиять также внешнее воздействие (например, тепловое или акустическое). В условиях, близких к невесомости, в системе жидкость-газ фазы могут быть отделены друг от друга непрерывной односвязной поверхностью, газовые пузыри могут находиться внутри жидкости, или, наоборот, отдельные объемы (капли) жидкости могут быть взвешены в газе. В любом случае, при рассмотрении поведения такой системы, может быть применена механическая аналогия. Несжимаемая жидкость представляет собой тяжелую инерционную среду, а сжимаемый газ – легкую, но упругую среду. Можно исследовать как собственные, так и вынужденные колебания такой маятниковой системы и определять условия возникновения резонанса.

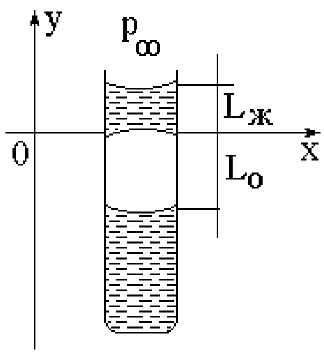


Рис. 5. Газовый пузырь в пробирке и перемычка представляют собой систему «пружина-груз»

Рассмотрим простой пример. Пробирка заполнена жидкостью (рис. 5.), в жидкости имеется газовый пузырь. Будем считать, что трение между жидкостью и стенками пробирки отсутствует, а пузырь достаточно большой, такой, что разбивает жидкость на два отдельных объема. Зависимость температуры газа от избыточного давления P в пузыре при адиабатическом сжатии описывается формулой

$$\frac{T}{T_\infty} = \left(1 + \frac{P}{P_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

где k – показатель адиабаты. При малых значениях избыточных давлений по отношению к давлению окружающей среды можно считать температуру постоянной. Пренебрегая массой газа, можно записать уравнение движения слоя жидкости (перемычки), находящегося между пузырем и окружающей средой, под воздействием внешней силы давления $P_e(t)$ следующим образом:

$$\ddot{y} + a \cdot y = g(t),$$

где $g(t) = -\frac{P_e}{\rho \cdot L}$, ρ - плотность жидкости, $L = L_ж \cdot L_0$, $a = \frac{P_\infty}{\rho \cdot L}$. Если на покоящуюся в начальный момент систему воздействовать периодической силой $g(t) = g_0 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{a})$, то слой жидкости будет испытывать колебания с возрастающей амплитудой

$$y(t) = \frac{g_0 \cdot t}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot t).$$

Резонансная частота

$$\omega = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho \cdot L}}.$$

Резонансные частоты приводят к разрушению перемычек между газовыми объемами. Такие эффекты наблюдались в жидкостях на борту КА, когда пузыри газа в объеме жидкости неожиданно коагулировали между собой или «выстреливали» на свободную поверхность [4]. По данным на рис. 6., где представлены резонансные частоты при атмосферном давлении для пузырей различного размера (L_0) в воде при различных относительных размерах перемычек ($\frac{L_ж}{L_0}$), резонансными могут быть частоты акустических возмущений на борту КА, связанных с работой бортовых систем и деятельностью экипажа, или же остаточные ускорения.

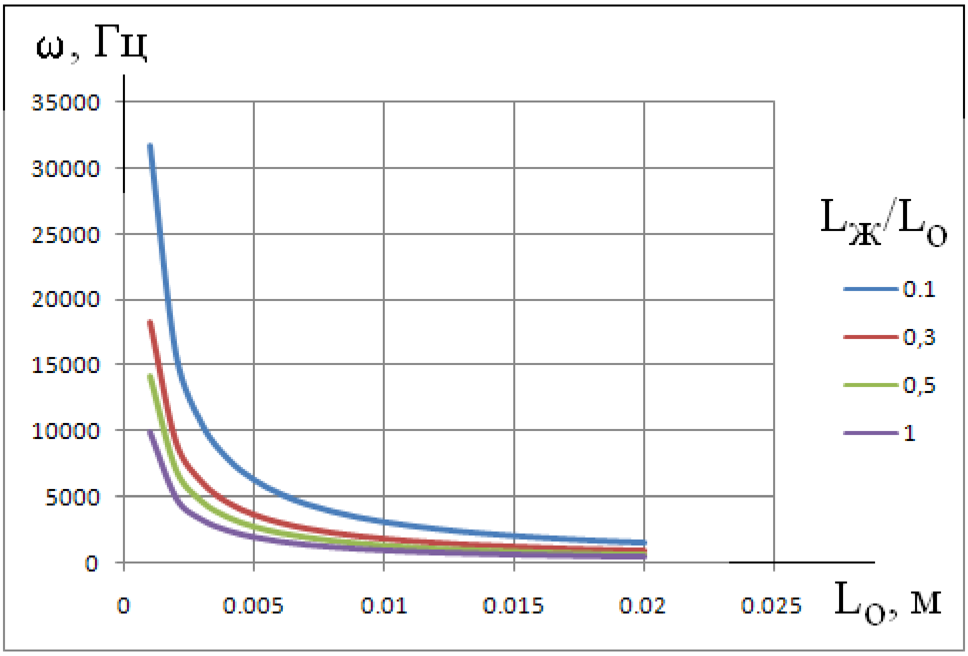


Рис. 6. Резонансные частоты при атмосферном давлении для пузырей различного размера (L_0) в воде при различных относительных размерах перемычек ($\frac{L_ж}{L_0}$)

Важной проблемой гидродинамики невесомости является исследование процесса кипения в условиях орбитального космического полета. В частности, интерес представляет процесс нагрева жидкости, поскольку теплообмен происходит без определяющего участия гравитационной конвекции.

Хорошо известно, что интенсивный нагрев жидкости сопровождается характерным шумом. Источником этого шума считают «схлопывание» мелких пузырей пара на поверхности нагревателя, попадающих при своем росте в объем недогретой жидкости [5]. Тон шума зависит от величины пузырей, поэтому, по мере прогрева жидкости и увеличения размеров пузырей, тон шума понижается.

Проведем простой опыт с обычным электрическим чайником. Заполним его водой наполовину и начнем нагрев. Через некоторое время возникает характерный шум. Дополним чайник холодной водой. Через некоторое время шум возобновится, но тон его станет значительно ниже. Это обстоятельство противоречит положению о зависимости тона шума от размеров пузырей, поскольку, долив холодной воды в чайник, мы перевели гидродинамическую систему на более раннюю стадию нагрева (по температуре воды), на которой рождаются более мелкие пузыри (тон шума должен был повыситься!).

По-видимому шум при нагреве жидкости имеет другую природу.

Рассмотрим процесс нагрева слоя жидкости в условиях полной невесомости. Будем считать, что жидкость является упругой средой, то есть плотность жидкости зависит не только от температуры, но и от давления. Количественной характеристикой упругости жидкости может служить величина

$$k = \frac{\partial P}{\partial \rho} = a^2, \qquad (1)$$

где a – скорость звука в жидкости. Одномерное движение столба жидкости высоты L, нагреваемого с основания заданным тепловым потоком q, может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x} = \chi \cdot \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \rho = \rho_0 \cdot (1 - \beta \cdot (T - T_0)) + \dfrac{1}{k} \cdot P \end{cases} \qquad (2)$$

В начальный момент $T = T_0, u = 0, \rho = \rho_0$. (3)

На поверхности нагревателя (x=0) $u = 0, \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \lambda \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x} = -q$, (4)

на свободной поверхности (x=L) $P = 0, \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$. (5)

Система (2)-(5) решалась численно методом конечных разностей. Решение системы представлено на рис. 7. для воды с начальной температурой 20°C, плотность теплового потока $q=10^4$ Вт/м^2, глубина заполнения (высота столба) L=0.05 м. Расчеты проведены на различных конечно-разностных сетках.

Чередования волны сжатия с волной разрежения вызваны оттеснением столба жидкости при температурном расширении жидкости около нагревателя и сбросом давления на свободной поверхности. Из расчетов следует, что амплитуда пульсаций давления пропорциональна высоте заполнения емкости и интенсивности нагрева (плотности теплового потока), частота пульсаций давления обратно пропорциональна высоте заполнения емкости.

Частота и уровень сигнала звуковых волн на рис. 7. укладывается в диапазон, воспринимаемый человеческим ухом. Таким образом, оттеснение объема жидкости (за счет теплового расширения, или за счет роста пузырей пара на поверхности нагревателя) от поверхности нагревателя при ее нагреве является причиной возникновения шума при интенсивном нагреве жидкости.

Приведенная одномерная модель лишь иллюстрирует механизм возникновения пульсаций давления. В реальном случае процесс не является одномерным, и представляется существенно более сложным. В силу несогласованности пульсаций в различных точках поверхности нагревателя может происходить взаимодействие возмущений и изменение параметров пульсаций, по этой же причине могут рождаться локальные циркуляционные течения.

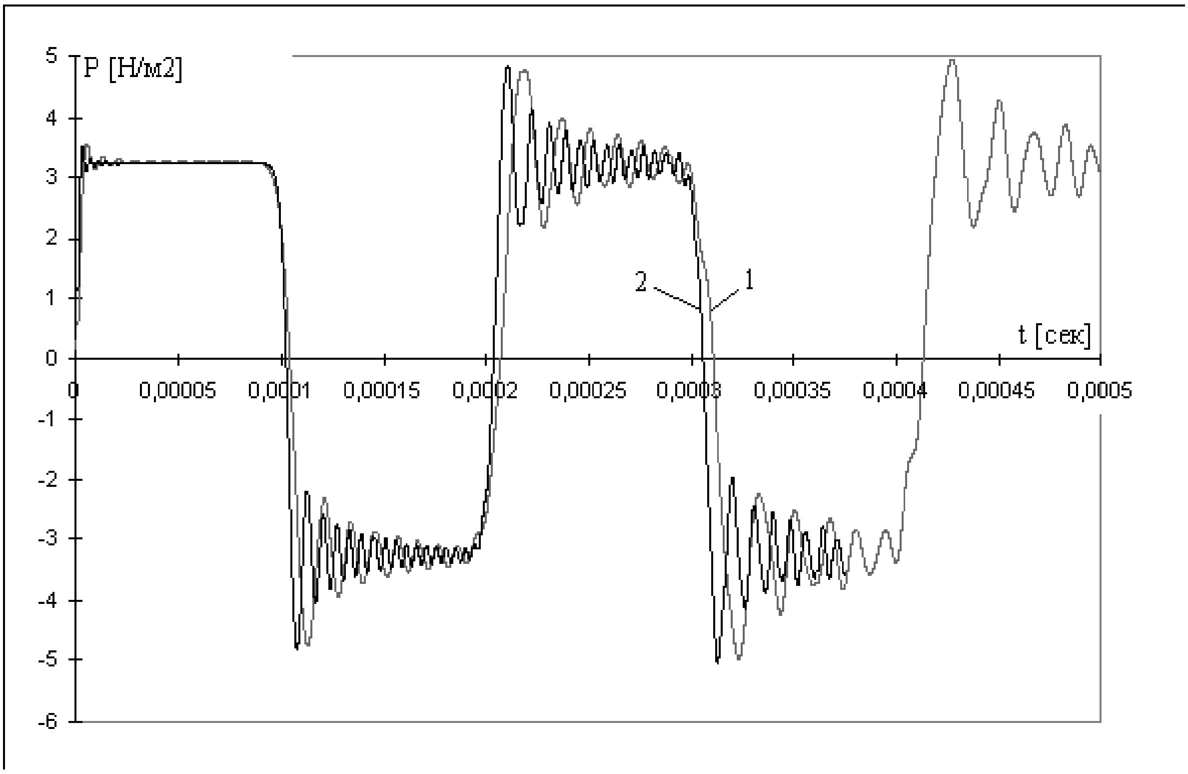


Рис. 7. Результат расчета пульсаций избыточного давления у поверхности нагревателя.

Библиографический список

1. *Ветошкин, А.М.* Анализ малых ускорений на борту орбитальных научных станций с точки зрения воздействия на гидродинамические системы [Текст] / А.М. Ветошкин, В.Ф. Домашев, А.В. Корольков, С.Б. Рябуха, В.В. Савичев / Космические исследования. Т.36. - N 2. – 1998. - С. 221-224.
2. *Джалурия, Й.* Естественная конвекция. Тепло- и массообмен [Текст] / Й. Джалурия / Пер. с англ. Москва, «Мир», 1983.
3. *Авдуевский, В.С.* Исследование тепловой гравитационной конвекции в переменном поле вектора малых ускорений [Текст] / В.С. Авдуевский, А.В. Корольков, В.С. Купцова, В.В. Савичев / ПМТФ. – № 1.- 1987. - С. 54-59.
4. Технологические эксперименты в невесомости [Текст] . – : УНЦ АН СССР. - 1983.
5. *Несис, Е.И.* Кипение жидкостей [Текст] / Е.И. Несис / . – М.: «Наука». - 1973. – 280 с.

К вопросу об экономических циклах и математическом моделировании динамики рыночных цен

А.Н. Куликов

Введение. Наиболее известной математической моделью, которая описывает динамику цен в чисто рыночной экономике традиционно считают модель "спрос-предложение" (см. с. 30-32 из [1], главу 8 из [2]), которая была составлена на базе теории Самуэльсона, Вальраса, Маршалла. В достаточно общем виде она представлена дифференциальным уравнением

$$\frac{dp}{dt} = D(p) - S(p), \tag{0.1}$$

где $p = p(t)$ – цена на некоторый товар, $D(p)$ – функция спроса на этот товар, а $S(p)$ – функция предложения. Обычно экономические соображения приводят к следующим предположениям относительно свойств функции $D(p), S(p)$.

1) Они обе определены при $p \in (0;\infty)(p \in R_+)$.

2) $D(p), S(p) \in C_\infty(R_+)$, т.е. принадлежат пространству бесконечно дифференцируемых функций.

3) $\lim_{p\to 0} S(p) = 0$, а $\lim_{p\to 0} D(p) = K$ или ∞. Здесь K - достаточно большая положительная постоянная. Наконец, при всех $p \in R_+$ $D'(p) < 0, S'(p) > 0$.

Следовательно, уравнение $F(p) = D(p) - S(p) = 0$ имеет единственный корень $p = p_* \in R_+$. В свою очередь, последнее замечание приводит к выводу, что дифференциальное уравнение (0.1) имеет единственное состояние равновесия $p(t) = p_*$. При этом $F'(p)|_{p=p_*} < 0$ и, следовательно, это состояние равновесия асимптотически устойчиво. Более того, все решения, для которых $p(0) = p_0 \in R_+$ с течением приближаются к нему, т.е. данное состояние равновесия для решений дифференциального уравнения является единственным глобальным аттрактором. В частности, уравнение (0.1) не может иметь периодических решений, которые должны описывать экономические циклы. С точки зрения экономической теории и практики наличие колебания цен характерно для чисто рыночной экономики. Последнее неоднократно отмечалось в работах экономистов различных школ. Достаточно вспомнить К. Маркса. Подробное обсуждение вопроса о наличии циклов можно найти в [1,2,3].

Все это означает лишь одно - дифференциальное уравнение неадекватно отражает динамику процесса изменения цены. В связи с этим были предложены гораздо более сложные макроэкономические модели, в которых уже могли появляться циклы. Понятно, что они содержали уже не одно дифференциальное уравнение, а систему таких уравнений (см., например, гл. 5 из [1]).

Ниже предлагается модификация модели "спрос - предложение" иного сорта. Вместо уравнения (0.1) рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом.

$$\dot{p}(t) = D(p(t)) - S(p(t-h)), h > 0, \tag{0.2}$$

т.е. функция предложения товара зависит не от $p(t)$ - цены в данный момент, а от цены в некоторый предыдущий момент. Запаздывание h зависит от длины производственного цикла. Достаточно убедительной является точка зрения о том, что принимая решение об увеличении предложения, товаропроизводитель ориентируется на некую предшествующую цену, что связано с невозможностью "мгновенно" увеличить производство данного товара [2,3]. Например, производство зерна фактически предусматривает задержку производства на $h = 1$ году.

Уравнение (0.2) имеет положительное состояние равновесия $p = p_*$. Положим

$$p(t) = p_* + x(t), p(t-1) = p_* + y(t), \tag{0.3}$$

где $y(t) = x(t-1)$. Считаем, что запаздывание $h = 1$. Последнего можно добиться нормировкой времени $t \to ht$. После замен (0.3) дифференциальное уравнение можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = -ax - by + a_2x^2 - b_2y^2 - a_3x^3 - b_3y^3 + G(x, y), \tag{0.4}$$

где

$$a = -D'(p_*), b = S'(p_*), a_2 = \frac{1}{2}D''(p_*),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}S''(p_*), a_3 = -\frac{1}{6}D'''(p_*), b_3 = \frac{1}{6}S'''(p_*).$$

Наконец, гладкая функция $G(x,y)$ имеет в нуле по совокупности переменных порядок малости выше третьего.

Будем считать, что коэффициенты главной части уравнения (0.4) положительны. Так, например, $a,b>0$ в силу предположения 3). Дополнительно будем считать, что положительны коэффициенты a_2,a_3,b_2,b_3.Последнее предположение необязательно, но часто реализуется при детализации функций $D(p),P(p)$. Так, например, принято выбирать в качестве $D(p),P(p)$ следующие функции

$$D(p)=\frac{1}{\alpha_1+\beta_1 p},S(p)=\alpha_2+p^k,\alpha_1>0,\beta_1>0,\alpha_2>0,k\geq 1.$$

Следует признать, что выбор $D(p),P(p)$ носит в настоящее время эмпирический характер [1,2].

1. Об устойчивости состояния равновесия.

Дифференциальное уравнение (0.4) имеет нулевое состояние равновесия. Для исследования его устойчивости рассмотрим линеаризованный вариант данного уравнения

$$\dot{x}=-ax-by,y=x(t-1), \tag{1.1}$$

где, как и ранее, точкой обозначена производная по t.

Исследование устойчивости, как хорошо известно, может быть сведено рассмотрению характеристического уравнения

$$\lambda=-a-b\exp(-\lambda), \tag{1.2}$$

которое получают стандартным путем после подстановки в уравнение (1.1) $x(t)=\exp(\lambda t)$.

Из результатов изложенных в монографии [4] вытекает, что нулевое решение дифференциального уравнения (1.1) асимптотические устойчиво если $Re\lambda_j$ < 0, где λ_j - один из корней характеристического уравнения (1.2) $j=1,2,3...$ Отметим также, что при достаточно малых b это условие выполнено $(b\in[0,a))$.

При $b>a>0$ может реализоваться следующий критический случай в задаче об устойчивости: $\lambda_{1,2}=\pm i\sigma$, а остальные λ_j таковы, что $Re\lambda_j<0, j=3,4,5...$ При этом корни $\lambda_{1,2}$ - простые.

Лемма 1. *Пусть* σ *- корень уравнения* $a=-\sigma\sigma,\sigma\in(\pi/2,\pi),b=b_*=\sigma/\sin\sigma$. *Тогда реализуется указанный практический случай.*

При $b=b_*+\varepsilon,\varepsilon>0$ нулевое решение теряет устойчивость. Далее будем считать, что $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0<<1$. Тогда справедливо утверждение.

Лемма 2. *При указанном выборе* $b=b_*+\varepsilon,\varepsilon>0$ *характеристическое уравнение имеет простые корни*

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon)=\pm i\sigma+\varepsilon(\gamma_1+i\gamma_2)+o(\varepsilon),$$

где $\gamma_1=(b_*-\cos\sigma)/\delta,\gamma_2=(\sin\sigma)/\delta,\delta=1+b_*^2+2a$. При этом γ_1 > 0, а для остальных корней характеристичного уравнения выполнено равенство $Re\lambda_j(\varepsilon)\leq-\gamma_0<0, j=3,4,5...$

2. Периодические решения нелинейного уравнения.

В этом разделе рассотрим уравнение (0.4) при b = $b_*+\alpha\varepsilon,\alpha=\pm1$, то есть анализу подлежит уравнение

$$\dot{x}=-ax-(b_*+\alpha\varepsilon)y+a_2x-b_2y-a_3x+b_3y. \tag{2.1}$$

Для уравнения (2.1) реализуются все условия для уравнений с последействием [4,5] применимости теоремы Андронова - Хопфа. В частности, можно утверждать, что дифференциальное уравнение (2.1) имеет притягиващее локально инвариатное многообразие $M_2(\varepsilon)$, где $\dim M_2(\varepsilon)=2$ [7]. На этом многообразии динамика решений восстанавливаться после анализа вспомогательного дифференциального уравнения в C.

$$z'=[(\gamma_1+i\gamma_2)\alpha+(l_1+il_2)\,|\,z\,|^2]z+o(\varepsilon), \qquad (2.2)$$

где $z=z(s), s=\varepsilon t$ - "медленное" время, $l_1,l_2\in R$ и носят название ляпуновских величин. Уравнение (2.2) принято называть нормальной формой (нормальная форма Паункаре - Дюлака). При этом, если $l_1\neq 0$, то определяющим уравнением будет укороченный вариант нормальной формы:

$$z'=[(\gamma_1+i\gamma_2)\alpha+(l_1+il_2)\,|\,z\,|^2]z. \qquad (2.3)$$

В уравнениях (2.2) и (2.3) штрихом обозначена производная по s.

Коэффициенты уравнения могут быть найдены на базе применения модифицированного алгоритма (адаптированного к данному классу уравнений) Крылова - Боголюбова.

Будем искать решения дифференциального уравнения (2.1), принадлежащее $M_2(\varepsilon)$ в виде:

$$x(t,\delta,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}x_1(t,s)+\varepsilon x_2(t,s)+\varepsilon^{3/2}x_3(t,x)+o(\varepsilon^{3/2}),$$

(2.4)

где $x_1(t,s)=z(s)\exp(i\sigma t)+\bar{z}(s)\exp(-i\sigma t), x_2(t,s), x_3(t,s)-$ достаточно гладкие функции переменных t и s, по переменной t имеют период $2\pi/\sigma,$ а $z(s)$ - решения дифференциального уравнения (2.2). Равенство (2.4) задает уравнение интегрального многообразия, формирующего при малых ε многообразие $M_2(\varepsilon)$. Отметим, так же, что $\frac{d}{dt}x_j=\dot{x}_j+\varepsilon x_j'$, где чертой обозначена частная производная по s, а точкой частная производная по t. Наконец,

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} x_j(t,s)\exp(\pm i\sigma t)dt=0, y_j(t,s)=x_j(t-1,s-\varepsilon),$$

$$u_j(t,\delta)=x_j(t-1,s), y_j(t,s-\varepsilon)=u_j(t,s)-\varepsilon(\frac{\partial y_j}{\partial s}|_{\varepsilon=0})+o(\varepsilon), j=1,2,3.$$

Подстановка суммы (2.4) в дифференциальное уравнение (2.1) с последующим выделением слагаемых при $\varepsilon,\varepsilon^{3/2}$ приводит к двум неоднородным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом:

$$\dot{x}_2+ax_2+b_*u_2=\varphi_2=a_2x_1^2-b_2u_1^2, \qquad (2.5)$$

$$\dot{x}_3+ax_3+b_*u_3=\varphi_3=2a_2x_1x_2-2b_2u_1u_2-a_3x_1^3-b_3u_1^3-x_1'+(y_j'\,|_{\varepsilon=0}). \qquad (2.6)$$

Замечание. *Напомним, что уравнение*

$$\dot{v}+av+b_*v=f(t),$$

где $f(t)$ - периодическая функция с периодом $2\pi/\sigma$, имеет периодическое решение с тем же периодом, если справедливы равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} f(t)\exp(\pm i\sigma t)dt=0.$$

При этом равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} v(t)\exp(\pm i\sigma t)dt=0$$

выделяет одно такое решение.

Применим утверждение о разрешимости неоднородных дифференциальных уравнений к уравнениям (2.5) (2.6), при анализе которых считаем s параметром. В результате чего можно отметить следующее:

1. Уравнение (2.5) разрешимо в классе периодических функций с периодом $2\pi/\sigma$. При этом соответствующее решение имеют вид

$$x_2(t,s)=\eta z^2\exp(2i\sigma t)+\xi z\bar{z}+\overline{\eta z^2}\exp(-2i\sigma),$$

где

$$\eta=\frac{a_2-b_2exp(-2i\sigma)}{a+2i\sigma+b\exp(-2i\sigma)},\xi=\frac{2(a_2-b_2)}{a+b}.$$

2. Из условия разрешимости неоднородного дифференциального уравнения (2.6) получаем равенство, которое после элементарных преобразований приводит к дифференциальному уравнению (2.2) - нормальной форме и ее укороченному варианту (2.3).

3. Анализ нормальной формы.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.3) имеет периодические решения вида

$$z(s)=\beta\exp(i\omega s), \tag{3.1}$$

где амплитуда β к частоту ω находим из системы уравнений

$$\begin{aligned}\alpha\gamma_1+l_1\beta^2&=0,\\ \alpha\gamma_2+l_2\beta^2&=\omega.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Очевидно,что из первого из уравнений (3.2) находим

$$\beta=\sqrt{-\frac{\alpha\gamma_1}{l_1}},$$

которое существует, если $-\alpha/l_1>0$, так как в нашем случае $\gamma_1>0$ (см. предыдущий раздел работы). Второе равенство дает возможность найти $\omega=\alpha\gamma_2-l_2\alpha\gamma_1/l_1$.

Лемма 3. *Пусть* $l_1<0$, *тогда периодическое решение* P_1 *существует при* $\alpha=1$. *Это решение устойчиво по Ляпунову.*

Лемма 4. *Пусть* $l_1>0$, *тогда периодическое решение* P_2 *существует при* $\alpha=-1$ *и в этом случае оно неустойчиво.*

Анализ устойчивости производится стандартным образом. Положим

$$z(s)=w(s)\exp(i\sigma s).$$

Тогда для $w(s)$ получаем уравнение

$$\dot{w}=[\alpha(\gamma_1+i\gamma_2)-i\sigma]w+(l_1+il_2)w|w|^2,$$

которое имеет семейство состояний равновесия $w=\beta\exp(i\varphi),\varphi\in R.$ Анализ устойчивости таких состояний проводится стандартно с помощью линеаризации и одной из версий теоремы об устойчивости по первому приближению, которая является следствием широко известной теоремы Андронова - Витта.

Отметим также, что в дипломной работе И.Головко, выполненной под руководством автора, были найдены варианты правой части уравнения (2.1), когда $l_1<0$, т.е нормальная форма имеет устойчивые периодические решения. Например, это будет так, если

$$a=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},b_*=2a,a_2=b_2=1,a_3=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi},b_3=0.$$

Теорема. *Существует такое* $\varepsilon_0>0$, *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *периодическому решению* $P_1(P_2)$ *соответствует периодическое решение дифференциального уравнения (2.1) с* *наследованием свойств устойчивости. Для таких решений справедливо асимптотическое представление*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\beta(\exp(i\sigma t) + \exp(-i\sigma t)) + o(\varepsilon^{1/2}).$$

4. Заключение.

В случае, когда периодическое решение $x_*(t,\varepsilon)$ устойчиво, оно описывает экономический цикл. Наличие циклов характерно для экономики в условиях чисто рыночных отношений без регулирующей роли государства. Еще раз подчеркнем о наличии циклов у уравнения с последействием (1.2). В одном из своих выступлений известный американский экономист лауреат Нобелевской премии В.Леонтьев заметил, что причиной экономических циклов (спадов, ускорений, кризисов "перепроизводства") является запаздывание предложения товара по отношению к его спросу. В работе предложено заменить уравнение (0.1), которое широко используется в качестве математической модели на соответствующее уравнение с запаздыванием (0.2). Это позволяет не далеко отходя от классической модели "спрос-предложение" объяснить причину цикличности с достаточной математической строгостью и подтвердить гипотезу В. Леонтьева.

Библиографический список

1. *Занг, В.Б.* Синергетическая экономика [Текст] / В.Б. Занг // М.:Мир, 1999. – 335 с.
2. *Лебедев, В.В.* Математическое моделирование нестационарных экономических процессов [Текст] / В.В.Лебедев, К.В. Лебедев // М.: ООО "еТест", 2011. – 259 с.
3. *Агапова, Т.А.* Макроэкономика [Текст] / Т.А. Агапова,С.Ф. Серегина // М.: "Дело и сервис", 2004. – 448 с.
4. *Хейл, Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Хейл // М.:Мир, 1984. – 491 с.
5. *Колесов, Ю.С.* Гармонические автоколебания дифференциальных уравнений n - ого порядка с последействием [Текст] / Ю.С. Колесов // Вестник Ярославского ун-та. – 1974. – В.7. – С. 3-88.
6. *Куликов, А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве [Текст] / А.Н. Куликов // Исследование по устойчивости и теории колебаний. Изд-во ЯрГУ. – С. 114–129.

Лемма о медиане и средние величины

В.Н. Осташков, М.А. Осинцева

Лемма — это скромная теорема-предок красивых теорем-потомков.

Рассмотрим теорему, которую называют *леммой о медиане*.

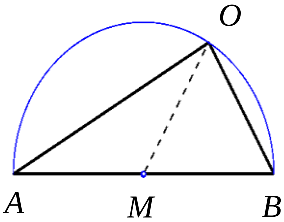


Рис. 1.1

1. Л е м м а (*о медиане*). Если медиана *OM* треугольника Δ = *OAB* равна половине стороны *AB*, то угол *AOB* — прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Согласно условию леммы, *MA* = *MB* = *MO*. Тогда угол *AOB* (рис.1.1) является вписанным в окружность, для которой отрезок *AB* — диаметр. Следовательно, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$. Лемма доказана.

Доказательство 2. Пусть $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$ (рис. 1.2). Из равенств $MA = MB = MO$ следует, что треугольники AMO и BMO — равнобедренные. А так как в равнобедренном треугольнике углы при основании между собой равны, то $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$. Поскольку сумма углов треугольника Δ равна $2(\alpha + \beta) = \pi$, то $\angle AOB = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Лемма доказана.

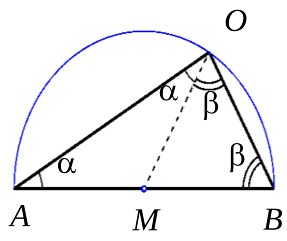


Рис. 1.2

Доказательство 3. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат прямая OA имеет уравнение $y = ax$, прямая OB — уравнение $y = bx$, прямая AB — уравнение $x = 1$, прямая OM — уравнение $y = kx$, (рис. 1.3). Тогда точка A имеет координаты $(1, a)$, точка B — координаты $(1, b)$, точка M — координаты $(1, k)$,

$$k = \frac{a+b}{2}, \qquad (1.1)$$

а из равенства $MA^2 = MO^2$ следует:

$$1 + k^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \Leftrightarrow ab = -1.$$

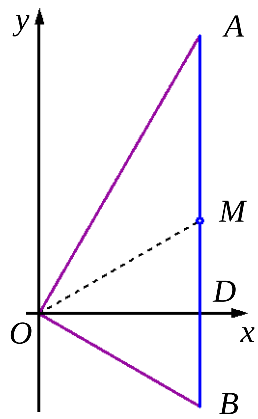


Рис. 1.3

Из отрицательности произведения ab следует, что точки A, B лежат по разные стороны от оси абсцисс.

Пусть D — точка пересечения прямой AB с осью Ox. Тогда $AD = a$, $BD = b$, $OD = 1$.

Отсюда и из равенства $ab = -1$ следует:

$$AD \cdot BD = OD^2 \Leftrightarrow AD : OD = OD : BD, \qquad (1.2)$$

т.е. прямоугольные треугольники OAD и BOD подобны. Следовательно, угол AOB — прямой. Лемма доказана.

2. Обсуждение. Как правило, теоремы, которые можно доказать многими способами, просты по формулировке и богаты по содержанию. Например, знаменитая теорема Пифагора доказана, согласно книге рекордов Гиннеса, 367 способами. Три доказательства нашей леммы вселяют оптимизм, что в ее недрах таится немало интересных идей.

Одну из идей подсказывают равенства (1.1), (1.2): с леммой о медианах тесно связаны среднее арифметическое и среднее геометрическое двух величин. Но кроме них, как известно, есть среднее квадратичное

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2.1)$$

(теорема Пифагора) и среднее гармоническое

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad (2.2)$$

(средняя скорость h автомобиля, который «туда» ехал со скоростью a, а «обратно» — со скоростью b).

И наша цель — подметить в лемме о медиане средние величины и в свете этого выявить оригинальные

- интерпретации
- обобщения
- приложения.

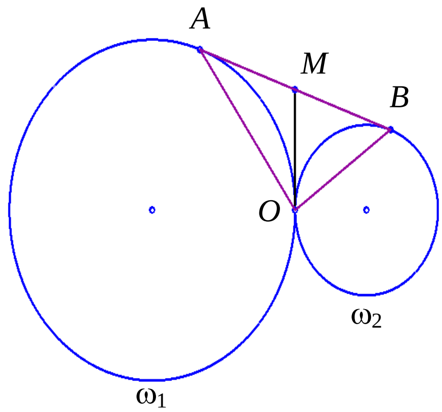


Рис. 3

Начнем с задачи, в которой лемма о медиане предстает в чистом виде.

3. З а д а ч а. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке O внешним образом (рис. 3), AB — их общая касательная. Найти угол AOB.

Р е ш е н и е. Пусть общая касательная к ω_1, ω_2 в точке O пересекает прямую AB в точке M. Тогда, очевидно, $MO = MA = MB$ и, согласно лемме о медиане, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$. Задача решена.

4. О б с у ж д е н и е. Если R_1, R_2 — радиусы окружностей ω_1, ω_2, то, как легко убедиться,

$$OM = \sqrt{R_1 R_2} \tag{4.1}$$

— среднее геометрическое радиусов R_1, R_2, т.е. лучи, выходящие из точки M в направлении центров окружностей ω_1, ω_2, составляют прямой угол.

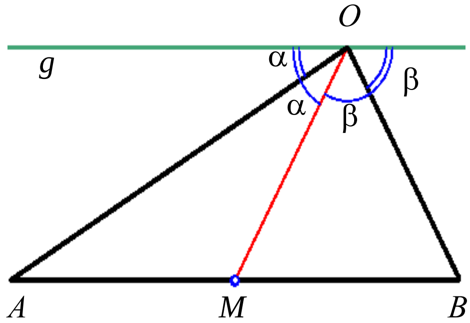


Рис. 5

5. П о в о р о т в п о и с к е з а к о н о м е р н о с т е й. Вернемся к доказательству 2 леммы 1 и попытаемся, выявив закономерности в геометрии углов при вершине O (рис. 5), обобщить лемму о медиане. Для этого

1) проведем через O прямую g параллельно гипотенузе AB;

2) положим $n = 2$ и обозначим прямые OA и OB через t_1, t_2 соответственно;

3) заметим, что прямые t_1, t_2 делят плоскость на 4 угла, равных $\psi = \frac{\pi}{n}$.

Рассматривая всевозможные повороты R^{α}, R^{β}, R^{γ}, … вокруг точки O на углы α, β, γ, … , отображающие прямую g на всевозможные прямые, содержащие O, подмечаем, что

$$R^{\alpha}(g) = t_1 \text{ и } R^{\beta}(g) = t_2 \Rightarrow R^{n\alpha}(g) = R^{n\beta}(g) = OM .$$

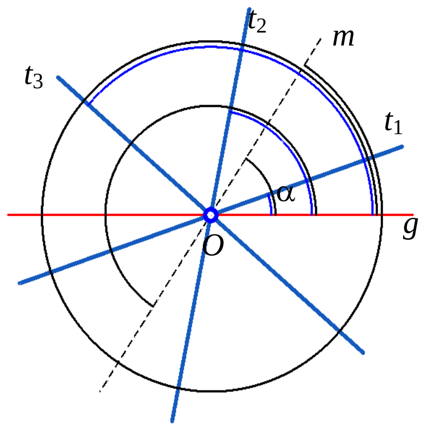


Рис. 6

6. О б о б щ е н и е н а с л у ч а й $n = 3$. Пусть $\mathbf{P}^1$ — множество всех прямых, проходящих через точку O (рис. 6); $Z_3 = \{t_1, t_2, t_3\} \subset \mathbf{P}^1$ — множество прямых, делящих плоскость на 6 равных углов $\psi = \frac{\pi}{3}$; α — угол между прямой $g \in \mathbf{P}^1$ и прямой t_1. Тогда для любого целого числа $k \in \mathbf{Z}$

$$R^{\alpha}(g) = t_1 \Rightarrow R^{k\psi+\alpha}(g) \in Z_3;$$

в частности, $R^{\psi+\alpha}(g) = t_2$, $R^{2\psi+\alpha}(g) = t_3$.

Если при $n = 2$ повороты были на удвоенные углы (см. п. 5), то теперь, когда $n = 3$, выполним повороты на утроенные углы. Тогда для любого целого числа $k \in \mathbf{Z}$

$$R^{3\alpha}(g) = m \Rightarrow R^{3(\psi+\alpha)}(g) = R^{3(2\psi+\alpha)}(g) = R^{3(k\psi+\alpha)}(g) = m.$$

Наша аналогия сработала, так как для $\forall n \in \{2;\ 3\}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$

$$R^{n\alpha}(g) = m \Rightarrow R^{n(k\psi+\alpha)}(g) = R^{n(k\frac{\pi}{n}+\alpha)}(g) = R^{k\pi+n\alpha}(g) = R^{n\alpha}(g) = m .$$

7. Т е о р е м а. Пусть $Z_n = \{t_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{P}^1$ — множество прямых, проходящих через точку O и делящих плоскость на $2n$ равных углов величиной $\psi = \frac{\pi}{n}$; α — угол между прямой $g \in \mathbf{P}^1$ и прямой t_1. Тогда для $\forall\, n, k \in \mathbf{Z}$

$$R^{n(k\psi+\alpha)}(g) = R^{n\alpha}(g).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из того, что

$$n(k\psi+\alpha) = n(k\tfrac{\pi}{n}+\alpha) = k\pi + \alpha n,$$

$$R^{k\pi+n\alpha}(g) = R^{n\alpha}(g).$$

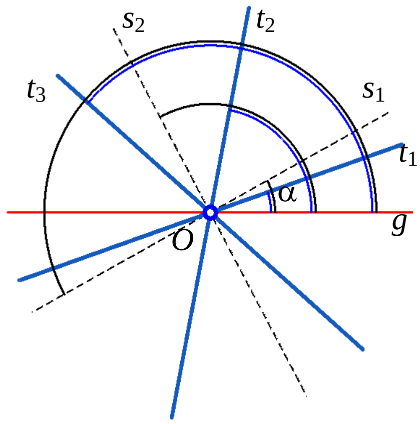


Рис. 8

8. П о я в л е н и е   п р я м о г о   у г л а. Пусть $Z_3 = \{t_i\}_{i=1}^{3} \subset \mathbf{P}^1$ — множество из трех прямых, проходящих через точку O и делящих плоскость на 6 равных углов величиной $\psi = \frac{\pi}{3}$ (рис. 8); α — угол между прямой $g \in \mathbf{P}^1$ и какой-нибудь прямой $t \in Z_3$. Запишем $n = \frac{3}{2}$ вместо $n = 3$. Тогда

$$R^{n\alpha}(g) = s_1 \Rightarrow s_1 \perp s_2 = R^{n(\psi+\alpha)}(g) = R^{\frac{\pi}{2}+n\alpha}(g).$$

9. Ц е н т р о и д. Во-первых, согласно условию леммы о медиане, основание M медианы OM — середина гипотенузы AB. Во-вторых, равенство (1.1) говорит о том, что угловой коэффициент k медианы OM (рис. 1.3) является средним арифметическим угловых коэффициентов a, b катетов OA, OB. В-третьих, середина отрезка является центроидом его концов.

Известно, что центроидом системы $S = \{A_i\}_{i=1}^{N}$ точек $A_1, \ldots, A_N$ является точка $G = \frac{1}{N}(A_1 + \ldots + A_N)$. Так, например, центроидом треугольника является точка пересечения медиан; а центр центроидом правильного многоугольника — его центр. С механической точки зрения, центроид системы материальных точек является центром инерции (центром масс, центром тяжести) этой системы; если центр инерции служит единственной точкой опоры механической системы, то она находится в состоянии безразличного равновесия (в отличие от состояния устойчивого и неустойчивого равновесия).

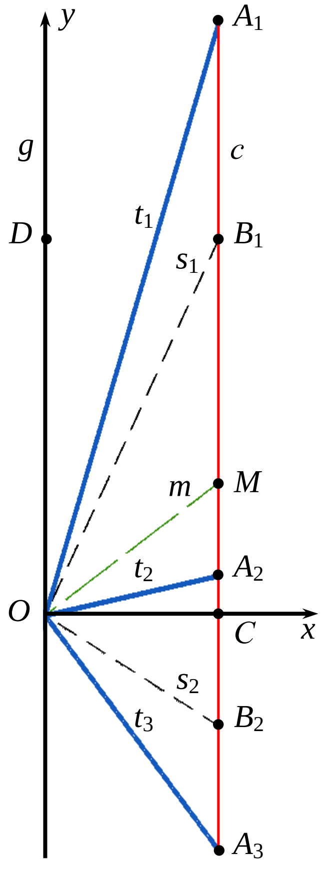


Рис. 10

Замечаем, что единственная прямая на рис. 5, которая не проходит через точку O, это прямая AB, параллельная прямой g. Мы поступим аналогично, исходя из рис. 6, рис. 8, проведя прямую c параллельно прямой g.

10. З в е з д ы. Будем называть *n-звездой* множество $Z_n = \{t_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{P}^1$ прямых $t_1, \ldots, t_n$, проходящих через точку O и делящих плоскость на $2n$ равных углов.

Пусть $Z_3 = \{t_1, t_2, t_3\} \subset \mathbf{P}^1$ — 3-звезда, $g \in \mathbf{P}^1$, $\angle DOA_1 = \alpha$ (рис. 10). Тогда $\angle DOA_2 = \alpha + \frac{1}{3}\pi$, $\angle DOA_3 = \alpha + \frac{2}{3}\pi$, $\angle DOB_1 = \frac{3}{2}\alpha$, $\angle DOB_2 = \frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\angle DOM = 3\alpha$.

11. Т е о р е м а. Пусть Z_3 — 3-звезда с центром O, лучи t_1, t_2, t_3 которой имеют уравнения $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, и пусть

$$\sigma_1 = k_1 + k_2 + k_3, \qquad \sigma_2 = k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2, \qquad \sigma_3 = k_1k_2k_3$$

— симметрические функции угловых коэффициентов k_1, k_2, k_3. Тогда последние удовлетворяют двум соотношениям: $\sigma_1 = -3\sigma_3$, $\sigma_2 = -3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Из того, что лучи звезды Z_3 составляют друг с другом углы $\frac{\pi}{3}$, и из того, что $k_1 = k = \operatorname{tg}\alpha$, следует

$$k_2 = \operatorname{tg}(\alpha+\tfrac{\pi}{3}) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}},$$

$$k_3 = \operatorname{tg}(\alpha-\tfrac{\pi}{3}) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\sigma_1 = k + \frac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}} + \frac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}} = \frac{3k(3-k^2)}{1-3k^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}}\cdot\frac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}} + k\left(\frac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}} + \frac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}}\right) = -3,$$

$$\sigma_3 = k\,\frac{k+\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}}\cdot\frac{k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}} = \frac{k(k^2-3)}{1-3k^2} = \frac{-\sigma_1}{3}.$$

Теорема доказана.

12. Т е о р е м а. Пусть прямая c параллельна прямой g (рис. 10) и пересекает лучи t_1, t_2, t_3 звезды Z_3 в точках A_1, A_2, A_3, лучи s_1, s_2 звезды Z_2 — в точках B_1, B_2, прямую m — в точке M. Тогда

(а) M — центроид точек A_1, A_2, A_3

(б) M — центроид точек B_1, B_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Пусть прямая c задана уравнением $x = 1$ и пересекает ось абсцисс в точке C, и пусть прямые t_1, t_2, t_3 имеют угловые коэффициенты k_1, k_2, k_3. Кроме того, пусть $M = (1, y)$, $\angle COM = \mu$, $\angle A_1OD = \alpha$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $k = k_1 = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Тогда из того, что $y = \operatorname{tg}\mu = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-\mu) = \operatorname{ctg}3\alpha$, следует

$$y = \frac{\operatorname{ctg}\alpha(3-\operatorname{ctg}^2\alpha)}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\beta(3-\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{k(3-k^2)}{1-3k^2} = \frac{\sigma_1}{3}.$$

Поскольку $A_i = (1, k_i)$, $i = 1..3$, то $\frac{1}{3}(k_1+k_2+k_3) = \frac{\sigma_1}{3} = y$.

(б) Так как

$\angle B_1OD = 3\alpha/2$, $\angle MOD = 3\alpha$,

то

$\angle MOB_1 = \alpha$, $\angle MB_1O = \alpha$,

следовательно, $MO = MB_1$. Аналогично доказывается, что $MO = MB_2$.

Теорема доказана.

13. Т е о р е м а. (Среднее гармоническое). Пусть Z_3 — 3-звезда, k_1, k_2, k_3 — угловые коэффициенты её лучей. Тогда среднее гармоническое h угловых коэффициентов k_1, k_2, k_3 равно их среднему арифметическому a.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим a и h через k_1, k_2, k_3:

$$a = \frac{1}{3}(k_1+k_2+k_3) = \frac{\sigma_1}{3}, \qquad h = \frac{3}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}} = \frac{3\sigma_3}{\sigma_2}.$$

Согласно теореме 11, $\sigma_1 = -3\sigma_3$, $\sigma_2 = -3$, поэтому

$$h = \frac{-\sigma_1}{-3} = a.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Осташков, В.Н.* Практикум по решению инженерных задач матема-тическими методами: учебное пособие [Текст] / В.Н. Осташков / — М.: БИНОМ, 2013.— 200 с.
2. *Скопец, З.А.* Геометрия тетраэдра и его элемен-тов [Текст] / З.А. Скопец, Я.П. Понарин / — Ярославль: Верхне-Волжское книжное изд-во, 1974.— 240 с.
3. *Филипповский, Г. Б.* Лемма о медиане решает задачу [Текст] / Г.Б. Филипповский Математика в школе, 2012, № 5, с. 58–62.

Математическое моделирование поведения сложнопрофилированной составной балки при сосредоточенных нагрузках

Л.П. Размолодин

Динамическое воздействие подвижного состава на путь в железнодорожном транспорте, является ещё недостаточно изученным явлением, однако оно определяет долговечность его работы и безопасность эксплуатации. Исторически сложившиеся конструкция пути, состоящая из основания, выполненного в зависимости от грунтов из соответствующего материала, шпал и рельсов в последнее время подвергается серьёзному совершенствованию. Это связано с требованием увеличения объёмов и скоростей грузоперевозок, надёжности, безаварийности, повышению эксплуатационных характеристик путевого хозяйства, экономии энергоресурсов. Безбалластный путь, продвижением которого на Российском рынке транспортных услуг занимаются компании из Германии, Швейцарии, Японии имеет ряд неоспоримых достоинств. Некоторый сравнительный анализ безбалластного и классического пути дан в работе [1], где в рассмотрение взяты восемь показателей, характеризующих путь. Надо отметить при этом, что не все важнейшие параметры пути были учтены, но тем не менее балластный путь положительно характеризуется по пяти показателям, безбалластный только по трём. Стоимостные параметры строительства безбалластного и балластного пути очень разняться. Как приведено в [2] стоимость одного километры безбалластного пути составляет один миллион евро, стоимость балластного пути при его капитальном ремонте 19 млн. руб. разница очевидная. При этом если использовать безбалластный путь не только для пассажирских скоростных и высокоскоростных перевозок, но и для грузовых, то по большому счёту сравнение будет не в пользу безбалластного пути.

Одним из недостатков безбалластного пути является его высокая жёсткость, что проявляется в следующих отрицательных явлениях: большие вибрации, шум, а при длительной эксплуатации осадка бетонных блоков, выход из строя амортизирующих прокладок и другое. С учётом того, что грунты на территории России достаточно нестабильные, климат влажный, длительная эксплуатация безбалластного пути без серьёзных ремонтов вряд ли будет возможна, при этом малые эксплуатационные расходы по его содержанию будут сведены на нет. В то же время инженерная мысль приходит к следующему выводу: существующий железнодорожный путь в плане повышения его надёжности близок к пределу совершенства. Дальнейшее его развитие лежит в дополнительных конструктивных доработках. В [3] было предложено оснастить верхнее строение дополнительным подкладочным устройством, что увеличивает металлоёмкость, но позволяет снизить приведённую стоимость его жизненного цикла. В связи с этим были проведены расчёты по определению динамических характеристик верхнего строения пути с подкладкой под рельсом. Конструкция, состоящая из рельса плюс сложнопрофилированная прокладка [4], жёстко скреплённые между собой болтами, представляют собой составную балку. В 1801 году академик Н.И.Фусс по причине статической неопределённости расчёта балки, лежащей на сплошном упругом основании, предложил ввести в рассмотрение «коэффициент постели», позволяющий получить уравнения для упругой просадки балки, изгибающего момента и давления балки на основание. Уравнение изгиба (упругой просадки балки) получено в виде [5]

$$У = (Pк/2u)\ e^{-кх}\ (,$$

где Р- точечная сила давления на балку, [Н],

К – коэффициент относительной жёсткости основания балки и балки, равный $К =(u/4EJ)^{0,25}$ [1/м],

u – модуль упругости основания балки, [кг/см^2],

X – продольная координата вдоль балки,[м],

Е – модуль упругости материала из которого изготовлена балка,[кГ/см^2],

J- момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси, [см^4].

При расчёте прогиба одиночной балки в уравнении для К балки в знаменателе стоит EJ, так называемая жёсткость балки, где Е её модуль упругости и J осевой момент инерции. Балка, состоящая из двух жёстко скреплённых частей, будет воспринимать нагрузку и работать как элемент, когда сопротивление изгибу и жёсткость будут суммироваться, то есть, то есть дополнительно к EJ плюсуется E_1 J_1 жёсткость дополнительной балки. При расчётах для случая рельса Р65 как балки при эпюре шпал 1840 на км. пути. щебёночном балласте с толщиной слоя 0, 6 м., летние условия, износ рельса нулевой, при u =150 МПа, из [6] получено К =1,536м$^{-1}$. Подкладка представляет собой в сечении сложнопрофилированную конструкцию Рис.1.

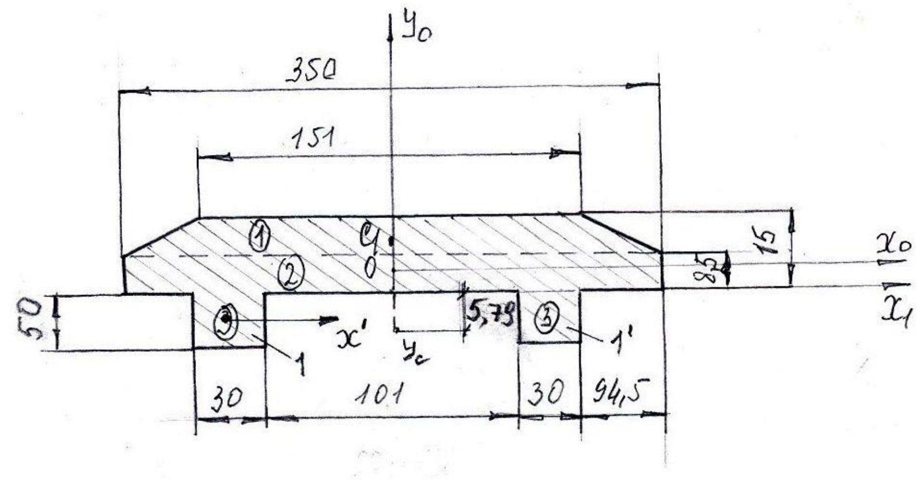


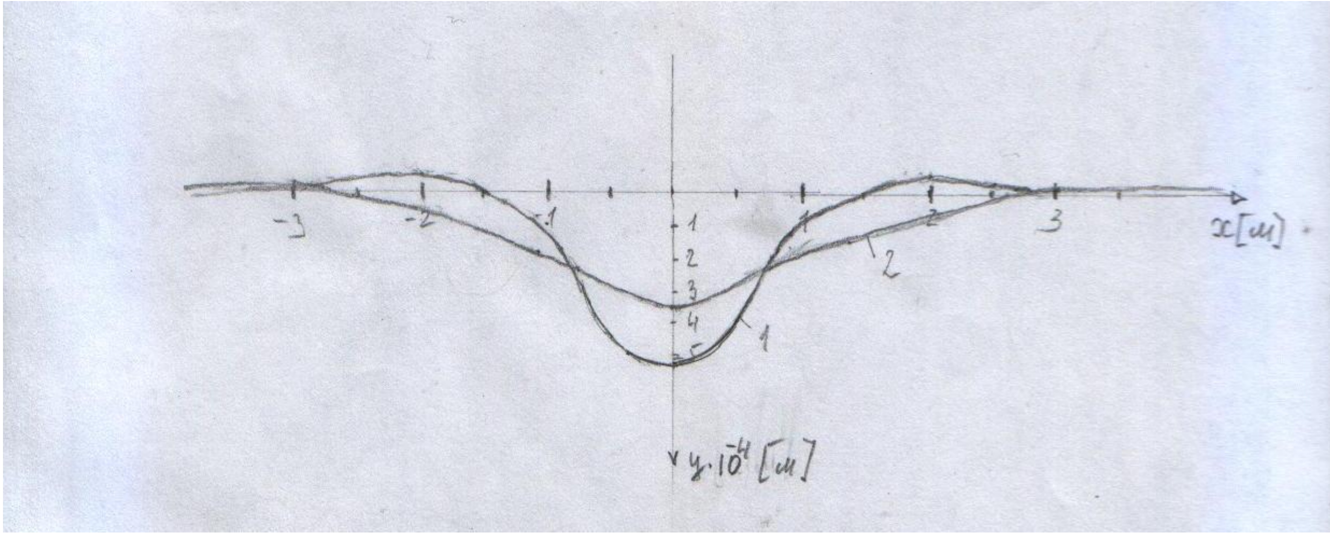
Рис.1

С подкладкой: при u =150 мПа, к жёсткости рельса EJ прибавляем жёсткость подкладки $E_1 J_1$, где E_1 –берём 2,1·10^5[мПа], J_1 –в вертикальной плоскости равняется 252см^4 , тогда

$$К =(150 мПа/4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 мПа\ 252\cdot 10^{-8} м^4\ 2,1 мПа\ 3548\cdot 10^{-8} м^4)^{0,25} =1,0 м^{-1}.$$

Сравнивая К без подкладки и с подкладкой видно, что К с подкладкой на 34,8% меньше.

При нагрузке Р = 10т. на Рис.2 показаны полученные расчётом кривые прогиба одиночной и составной балки



1- без подкладки
2- с подкладкой

Рис.2.

Максимальный прогиб одиночной балки составляет 0,51 мм. составной 0,328мм., что на 35,6% меньше. Радиус кривизны изгиба одиночной балки гораздо меньше, чем составной и у составной конструкции нет зон обратного прогиба. Применительно к конструкции верхнего строения железнодорожного пути большие перегибы одиночного рельса приводят к его изломам, а обратный изгиб к его угону. Такой характер работы рельс оказывает отрицательное воздействие на подшпальное основания. Оно испытывает при прохождение каждого колеса импульсное динамическое воздействие на балласт, который интенсивно уплотняется, а рёбра гранул щебёнки истираются. Наряду с таким воздействием на балластный слой на него ещё накладывается дополнительное действие от неравножёсткого основания рельса, так как он точечно опирается на шпалы. При средней скорости движения составов 60 км./час. и эпюре шпал 1840 это воздействие будет происходить с частотой $30c^{-1}$, а при скорости 100км/час $51c^{-1}$. С точки зрения конструкции пути и гипотезы Н.И.Фусса эти два явления суммируются, а результатом их является повышенное отрицательное воздействие на путь. Кроме того надо учитывать и ещё одну динамическую составляющую. Исходя из теории колебаний тела, находящегося на упругом подвесе или упругой опоре можно оценить его частоту и период колебания, если известен статический прогиб. Ранее получено, что для одиночной балки он равен 0,51мм., составной 0,32мм.

Период Т и частота ώ для одиночной балки равны Т = 0,044с. ώ = $142{,}7c^{-1}$, для составной 0,034с. и $184{,}7c^{-c}$ соответственно. Как очевидно период свободных колебаний одиночной балки с грузом больше чем составной, а частота меньше. Повышение жёсткости верхнего строения пути позволяет влиять и на инерционную составляющую динамического воздействия. Оценка величины $F_и$ инерционной составляющей можно произвести по соотношению

$$F_и = м\ ((У_0)^2+((v_0^2)\cdot f_{ст})/g\ )^{0,5}(g/\ f_{ст})\ \sin((g/f_{ст})^{0,5}\cdot t + ŋ).$$

Где- *м* масса тела, (кГ),
$У_0$ –начальная координата,(м),
v_0 –начальная скорость,(м/с),
$f_{ст}$ –статический прогиб,(м),
g- 9,8 м/c^2,
ŋ-начальная фаза.

При всех прочих равных условиях амплитудное значение величина сил инерции будет определяться также и статическим прогибом $f_{ст}$. Для составной балки он меньше, что определит и меньшее инерционное динамическое воздействие на все элементы пути.

Таким образом, путь будет подвергаться действию нестационарных сил периодического характера с разными частотами. Кроме рассмотренных действий сил надо учесть ещё и тот фактор, что вагон, находящийся при движении по неравноупругому пути будет совершать колебательные движения и за счёт сил упругости рессор. Произведём их оценку по методике в [7] через прогиб пружин вагона. Для четырёхосного полувагона на тележке МТ50 нагрузка на колесо и на рельс от колеса составляет 7,7т. Жёсткость рессор вагона 531кг/мм., вес полувагона 62т. Статический прогиб рессор при этом составит 14мм., циклическая частота будет равно 26,2$с^{-1}$, а период 0,23с. Путь находится под динамическим воздействием циклического характера с различными частотами и периодами. Для получения интегральной величины их действия с точки зрения постановки классической задачи о сложном колебательном движении тела необходимо учитывать диссипативные и возмущающие силы. Решение такой задачи возможно при наличии корректных начальных и краевых условий, что требует их детального уточнения в зависимости от конструкции пути и подвижного состава. Вероятность расстройства пути от влияния указанных факторов велико и от них надо избавляться или их действие минимизировать. На неравноупругость верхнего строения пути будет оказывать влияние земляное полотно и подушка, на котором расположена рельсошпальная решётка. Их деформационные характеристики также оказывают воздействие на динамику верхнего строения пути. Учёт всех параметров при расчёте динамических силовых действий в процессе движения подвижного состава является пока нерешённой задачей. Подкладочное устройства под рельсы может частично упростить математическое моделирование поведения верхнего строения пути и позволит прогнозировать надёжность, эксплуатационные и экономические его характеристики.

Библиографический список

1. *Савин, А.В.* Критерии выбору конструкции безбалластного пути [Текст] / А.В. Савин / Журнал: «Путь и путевое хозяйство». - №2. - 2014.
2. *Ермаков, В.М.* Научная конференция по верхнему строению пути в г. Дармштадт [Текст] / В.М. Ермаков / Журнал: «Путь и путевое хозяйство». - №1. - 2013.
3. Подкладочное устройство для железнодорожных и трамвайных путей: Л.П.Размолодин, С.М. Погостовский. Патент №2301860, 2006г.
4. *Размолодин, Л.П.* Оптимизация жёсткости рельсовых путей с целью предотвращения крушений на железнодорожном транспорте [Текст] / Л.П. Размолодин / Труды 9-ых Международных Колмогоровских чтений. Изд. ЯГПУ. – Ярославль. - 2011г. - с.324.
5. *Беляев, Н.М.* Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев / ГИТТЛ, М., 1954. - с.855.
6. *Виноградов, В.В.* Расчёты и проектирование железнодорожного пути [Текст] / В.В. Виноградов, А.М. Никонова, Т.Г. Яковлева / М. - Изд. «Маршрут». - 2003. - с.485.
7. Справочник инженера путейца [Текст] Т.1. Под ред. В.В. Басилова, М.А. Чернышёва. М. Изд. «Транспорт», 1972. - с.767.

О бифуркациях контура, состоящего из двух особых точек на линиях разрыва векторного поля и их сепаратрис

В.Ш.Ройтенберг

1. Введение.

Пусть M – компактное двумерное C^∞-многообразие, D - разбиение M на компактные двумерные C^∞-подмногообразия M_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, такие, что $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $i, j \in \{1,..,n\}, i \neq j$. Кусочно-гладким векторным полем класса C^r $(r \geq 1)$ на многообразии M с разбиением D назовем элемент топологического векторного пространства $\mathrm{X}^r(M,D) := \mathrm{X}^r(M_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{X}^r(M_n)$, где $\mathrm{X}^r(M_i)$ - топологическое векторное пространство векторных полей класса C^r на M_i с C^r-топологией. Траекториями векторного поля $X = (X^{(1)},\ldots,X^{(n)}) \in \mathrm{X}^r(M,D)$ следуя [1, с. 95] будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X^{(i)}(x)\}$ при $x \in \operatorname{int} M_i$ и $\hat{X}(x)$ - выпуклая оболочка векторов $X^{(i)}(x)$ и $X^{(j)}(x)$ при $x \in \partial M_i \cap \partial M_j$. Кусочно-гладкие векторные поля применяются в качестве математических моделей реальных динамических систем с переключениями. Поэтому важно изучить бифуркации кусочно-гладких векторных полей, при которых рождаются устойчивые периодические траектории (они соответствуют автоколебаниям). В [1] приведено исследование бифуркаций особых точек первой степени негрубости. Некоторые нелокальные бифуркации изучены автором в работах [2 - 7]. В настоящей работе мы рассматриваем бифуркации кусочно-гладких векторных полей, имеющих контур из сепаратрис двух особых точек на линиях разрыва (рис. 1). Такие векторные поля образуют подмногообразие коразмерности два в $\mathrm{X}^r(M,D)$. Поэтому их бифуркации естественно изучать в двухпараметрических семействах общего положения.

2. Формулировка результатов.

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^{(1)},\ldots, X_\varepsilon^{(n)}) \in \mathrm{X}^r(M,D)$ $(r \geq 3)$ C^r-гладко зависящих от параметра ε, меняющегося в некоторой окрестности E_0 точки $0 \in \mathbf{R}^2$. Продолжим векторные поля $X_\varepsilon^{(j)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, до векторных полей $\overline{X}_\varepsilon^{(j)}$ на некоторой окрестности M_i в M так, чтобы отображения $(x,\varepsilon) \mapsto \overline{X}_\varepsilon^{(j)}(x)$ принадлежали классу C^r.

Пусть точки $z_k^0 \in l_k := M_{j_k^-} \cap M_{j_k^+}$, $k = 1, 2$, при некоторых $j_k^-, j_k^+ \in \{1,\ldots,n\}$, $j_k^- \neq j_k^+$.

Выберем локальные карты $h_k : U_k \to \mathbf{R}^2$, $k = 1, 2$, так, чтобы

$$h_k(z_k^0) = (0,\ 0),\quad h_k(U_k \cap M_{j_k^-}) = \{(x,y) : y \leq 0\},\quad h_k(U_k \cap M_{j_k^+}) = \{(x,y) : y \geq 0\}.$$

Пусть в этих картах $X_\varepsilon^{(j_k^\pm)}(z) = P_k^\pm(x,y,\varepsilon)\partial/\partial x + Q_k^\pm(x,y,\varepsilon)\partial/\partial y$.

Предположим, что для поля X_0 выполняются следующие условия (У$_1$) – (У$_3$).

(У$_1$) Точка z_1^0 - особая точка векторного поля $X_0^{(j_1^+)}$, т.е. $P_1^+(0) = Q_1^+(0) = 0$. У матрицы линейной части поля в этой точке собственные значения $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < 0$, а вектор $(1,\ 0)^T$ не является собственным: $\partial Q_1^+(0)/\partial x \neq 0$. Вектор $X_0^{(j_1^-)}(z_1^0)$ направлен внутрь $M_{j_1^-}$: $Q_1^-(0) < 0$.

(У₂) $Q_2^+(0)=0, P_2^+(0)\partial Q_2^+(0)/\partial x>0$. Вектор $X_0^{(j_2^-)}(z_2^0)$ направлен внутрь $M_{j_2^-}$: $Q_2^-(0)<0$.

Эти условия не зависят от выбора локальных карт h_k. Без ограничения общности можно считать, что h_k выбраны так, что $\partial Q_1^+(0)/\partial x>0$, $\partial Q_2^+(0)/\partial x<0$, $P_2^+(0)<0$.

(У₃) Из точки z_1^0 выходит траектория Γ_0 поля X_0 со следующими свойствами: Γ_0 проходит через точку z_2^0, Γ_0 не содержит линейных особенностей и особых точек, отличных от z_1^0 и z_2^0, пересечение Γ_0 с некоторой окрестностью точки z_2^0 в $M_{j_2^-}$ является дугой векторного поля $X_0^{(j_2^-)}$, Γ_0 ω-предельна к z_1^0 вдоль собственного направления, соответствующего λ_2^0, Γ_0 имеет окрестность, гомеоморфную цилиндру.

Для векторного поля X_0, удовлетворяющего условиям (У$_1$) – (У$_3$), фазовый портрет в некоторой окрестности контура Γ_0 изображен на рис. 1.

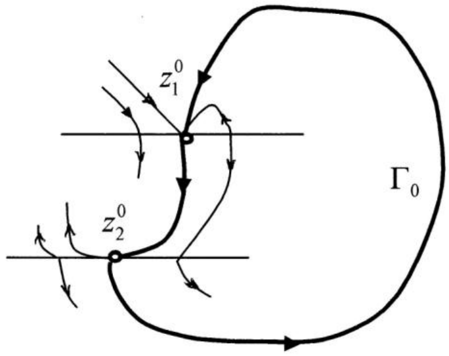


Рис. 1. Траектории векторного поля X_0 в окрестности сепаратрисного контура.

Из условия (У$_1$) следует, что найдутся такие окрестность $U_1\subset U$ точки z_1^0 и окрестность $\mathrm{E}_1\subset\mathrm{E}_0$ точки $0\in\mathbf{R}^2$, что для всех $\varepsilon\in\mathrm{E}_1$, векторное поле $\overline{X}_\varepsilon^{(j_1^+)}$ имеет в U_1 единственную особую точку $z_1(\varepsilon)$, при этом $z_1(\cdot)\in C^r$, $z_1(0)=z_1^0$, а ее собственные значения $\lambda_2(\varepsilon)<\lambda_1(\varepsilon)<0$ ($k=1,\ 2$). Пусть $h_1(z_1(\varepsilon))=:(\hat{x}_1(\varepsilon),\ \hat{y}(\varepsilon))$.

Из условия (У$_2$) следует, что существуют такое число $\bar{v}>0$ и такая окрестность $\mathrm{E}_2\subset\mathrm{E}_1$ точки $0\in\mathbf{R}^2$, что для всех $\varepsilon\in\mathrm{E}_2$ уравнение $Q_2^+(x,0,\varepsilon)=0$ имеет единственное решение $x=x_2(\varepsilon)\in(-\bar{v},\bar{v})$, при этом $x_2(\cdot)\in C^r$, $x_2(0)=0$. Точка $z_2(\varepsilon)$ имеющая в карте h_k координаты $x=x_2(\varepsilon)$, $y=0$ является грубой особой точкой векторного поля X_ε класса 2а в терминологии книги [1, С. 164].

Ввиду условия (У$_3$) и трансверсальности вектора $X_0^{(j_1^-)}(z_1^0)$ линии разрыва l_1 окрестность E_2 можно считать выбранной так, что отрицательная полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке $h_2^{-1}(x_2(\varepsilon),0)$, пересекает l_1 в точке $h_1^{-1}(\hat{x}_2(\varepsilon),0)$, $\hat{x}_2(\cdot)\in C^r$, $\hat{x}_2(0)=0$.

Обозначим $\hat{x}(\varepsilon):=\hat{x}_2(\varepsilon)-\hat{x}_1(\varepsilon)$.

Следующее условие не зависит от выбора продолжения $\overline{X}_\varepsilon^{(j_1^+)}$ поля $X_\varepsilon^{(j_1^+)}$.

(У$_4$) $\begin{vmatrix}\partial\hat{x}(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial\hat{x}(0)/\partial\varepsilon_2\\ \partial\hat{y}(0)/\partial\varepsilon_1 & \partial\hat{y}(0)/\partial\varepsilon_2\end{vmatrix}\neq 0$.

Если это условие выполняется, то в некоторой окрестности $\mathrm{E}_3 \subset \mathrm{E}_2$ точки $0 \in \mathbf{R}^2$ можно выбрать координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что $\hat{y}(\varepsilon) = -\varepsilon_1$, $\hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2$. В дальнейшем будем отождествлять точку $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ с ее координатной строкой: $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и обозначать $|\varepsilon| := \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$.

Теорема. *Пусть семейство векторных полей* $X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r(M, D)$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_0$, *удовлетворяет условиям* (У$_1$) – (У$_4$). *Тогда существует такое число* $\delta > 0$ *и такие* C^1*-функции* $b_k : (0, \delta) \to (-\delta, \delta)$, $b_k(+0) = 0$, $k = 1, 2$, $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta)$ $b_1(\varepsilon_1) < b_2(\varepsilon_1)$, *что у векторного поля* X_ε, $0 < |\varepsilon| < \delta$, *имеются только следующие периодические траектории, рождающиеся из контура* Γ_0: *при* $0 < \varepsilon_1 < \delta$, $\varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)$ – *двойной цикл, при* $0 < \varepsilon_1 < \delta$, $-\delta < \varepsilon_2 < b_2(\varepsilon_1)$ – *устойчивую* $\Gamma_1(\varepsilon)$ *и неустойчивую* $\Gamma_2(\varepsilon)$, *причем* $\Gamma_1(\varepsilon)$ – *гиперболическая траектория, а* $\Gamma_2(\varepsilon)$ *при* $b_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < b_2(\varepsilon_1)$ – *гиперболическая траектория, при* $-\delta < \varepsilon_2 < b_1(\varepsilon_1)$ *содержит дугу линии разрыва с концом в особой точке* $z_2(\varepsilon)$, *при* $\varepsilon_2 = b_1(\varepsilon_1)$ *является двойной сепаратрисой особой точки* $z_2(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы приводится в пунктах 3–6.

3. Функции соответствия в окрестности точки z_1^0.

Мы можем считать, что локальная карта h_1 выбрана так, что для матрицы линейной части векторного поля $X_0^{(j_1^+)}$ в точке z_1^0 вектор $(0;1)^T$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_2^0. От координат (x, y), задаваемых картой h_1, перейдем к координатам $\xi = x - \hat{x}_1(\varepsilon)$, $\eta = y - \hat{y}(\varepsilon) = y + \varepsilon_1$. В этих координатах $\bar{X}_\varepsilon^{(j_1^+)}(z) = \tilde{P}(\xi, \eta, \varepsilon)\partial / \partial\xi + \tilde{Q}(\xi, \eta, \varepsilon)\partial / \partial\eta$,

$$\tilde{P}(\xi, \eta, \varepsilon) = \lambda_1^0 \xi + \xi r_{11}(\xi, \eta, \varepsilon) + \eta r_{12}(\xi, \eta, \varepsilon), \; \tilde{Q}(\xi, \eta, \varepsilon) = a\xi + \lambda_2^0 \eta + \xi r_{21}(\xi, \eta, \varepsilon) + \eta r_{22}(\xi, \eta, \varepsilon), \quad (1)$$

где $a > 0$, $r_{kj} \in C^{r-1}$, $r_{kj}(0,0,0) = 0$, $k, j = 1, 2$. Обозначим $K_{\theta,d} := \{(\xi, \eta) : 0 < \eta \le d, |\xi| \le \theta\eta\}$, где $d > 0$, $0 < \theta < 1$. Из (1) и условия $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < 0$ следует, что мы можем считать d и $\delta_1 \in (0,1)$ выбранными так, что функция $R(\xi, \eta, \varepsilon) := \tilde{P}(\xi, \eta, \varepsilon) / \tilde{Q}(\xi, \eta, \varepsilon)$ определена для $(\xi, \eta) \in K_{\theta,d}$, $|\varepsilon| \le \delta_1$ и $\pm R(\pm\theta\eta, \eta, \varepsilon) > \theta$ для $\eta \in (0, d]$. Поэтому интегральная кривая $\xi = \chi(\eta, u, \varepsilon)$ дифференциального уравнения $\dfrac{d\xi}{d\eta} = R(\xi, \eta, \varepsilon)$, проходящая через точку $(u, d) \in K_{\theta,d}$, определена при $\eta \in (0, d]$ и не выходит из $K_{\theta,d}$, то есть

$$|\chi(\eta, u, \varepsilon)| \le \theta\eta \text{ при } \eta \in (0, d]. \quad (2)$$

Обозначим I_ε^1 и J_ε^1 – дуги, задаваемые в координатах (ξ, η), соответственно, условиями $\eta = d$, $|\xi| \le \theta d$ и $\eta = \varepsilon_1$, $|\xi| \le \nu d$. Пусть $\delta_2 = \min\{\delta_1, d/2\}$. Обозначим $\varphi(u, \varepsilon) := \chi(\varepsilon_1, u, \varepsilon)$. При $\varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2)$ функция $\varphi(\cdot, \varepsilon) := \chi(\varepsilon_1, \cdot, \varepsilon)$ является функцией соответствия по траекториям векторного поля $X_\varepsilon^{(j^+)}$ между дугами I_ε^1 и J_ε^1. Ввиду (2)

$$|\varphi(u, \varepsilon)| < \varepsilon_1. \quad (3)$$

По условию (А$_1$) $\lambda_1^0 / \lambda_2^0 > 1$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < \mu_- < \lambda_1^0 / \lambda_2^0 < \mu_+$. *Тогда найдутся такие числа* $\delta_3 \in (0, \delta_2]$, $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$, $|u| \le \theta d$

$$\left(\varepsilon_1/d\right)^{\mu_+} \le \varphi'_u(u,\varepsilon) \le \left(\varepsilon_1/d\right)^{\mu_-}, \tag{4}$$

$$\left|\varphi''_{uu}(u,\varepsilon)\right| \le C_1\varepsilon_1^{2\mu_- -1} \le C_1\varepsilon_1^{\mu_-}, \tag{5}$$

$$\left|\varphi'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon)\right| \le C_2\varepsilon_1. \tag{6}$$

4. Функции соответствия в окрестности точки z_2^0.

От координат (x,y), задаваемых картой h_2, перейдем к координатам $\xi = x - x_2(\varepsilon)$, $\eta = y$. В этих координатах $\bar{X}_\varepsilon^{(j_2^+)}(z) = \tilde{P}_2(\xi,\eta,\varepsilon)\partial/\partial\xi + \tilde{Q}_2(\xi,\eta,\varepsilon)\partial/\partial\eta$, где $\tilde{P}_2(\xi,\eta,\varepsilon) < 0$, $\operatorname{sgn}\tilde{Q}_2(\xi,0,\varepsilon) = -\operatorname{sgn}\xi$, если $|\xi| \le p$, $0 \le \eta \le p$, $|\varepsilon| < \delta_4$ при некоторых $p > 0$ и $\delta_4 \in (0,\delta_3]$. Пусть $\eta = \tilde{\eta}(\xi,u,\varepsilon)$ – решение дифференциального уравнения $d\eta/d\xi = \tilde{Q}(\xi,\eta,\varepsilon)/\tilde{P}(\xi,\eta,\varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $\tilde{\eta}(u,u,\varepsilon) = 0$, $u \in [0,p]$. Если p и δ_4 достаточно малы, то $\tilde{\eta}(\xi,u,\varepsilon)$ определено и положительно при всех $\xi \in (u,p]$. Обозначим $\psi(u,\varepsilon) := \tilde{\eta}(p,0,\varepsilon) - \tilde{\eta}(p,u,\varepsilon)$. Функция $\psi(\cdot,\varepsilon)$ задает соответствие по траекториям поля $-X_\varepsilon^{(j_2^+)}$ между дугами I_ε^2: $\eta = 0,\ \xi \in [0,p)$ и J_ε^2: $\xi = p$, $\eta \in (0,\tilde{\eta}(p,0,\varepsilon)]$.

Лемма 2. *При достаточно малом* $\delta_5 \in (0,\delta_4]$

$$\psi(0,\varepsilon) = \psi'_u(0,\varepsilon) = 0,\ \psi''_{uu}(0,\varepsilon) \ge \lambda_* > 0, \text{ если } |\varepsilon| < \delta_5. \tag{7}$$

5. Функции последования и функция расхождения.

В силу условия (У3) d можно считать выбранным столь малым, что Γ_0 пересекает дугу I_ε^1 в ее внутренней точке. Если p и δ_5 достаточно малы, то траектория поля X_ε, $|\varepsilon| < \delta_5$, начинающаяся в точке дуги I_ε^2 с координатой $\xi = u$ пересекает дугу I_ε^1 в точке с координатой $\xi = \varphi_1(u,\varepsilon)$, где $\varphi_1(\cdot,\cdot) \in C^r$, $(\varphi_1)'_u(u,\varepsilon) \ne 0$, а траектория поля $-X_\varepsilon$, $|\varepsilon| < \delta_5$, начинающаяся в точке дуги J_ε^2 с координатой $\eta = \tilde{\eta}(p,0,\varepsilon) - u$ пересекает дугу J_ε^1 в точке с координатой $\xi = \psi_1(u,\varepsilon)$, где $\psi_1(\cdot,\cdot) \in C^r$, $(\psi_1)'_u(u,\varepsilon) \ne 0$. Так как Γ_0 двусторонняя кривая, то локальные карты h_1 и h_2 можно считать выбранными так, что $(\varphi_1)'_u(u,\varepsilon) > 0$, $(\psi_1)'_u(u,\varepsilon) > 0$. Обозначим $f_1(u,\varepsilon) := \varphi(\varphi_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$ и $f_2(u,\varepsilon) := \psi_1(\psi(u,\varepsilon),\varepsilon)$. Так как $\hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2$, то и $f_2(0,\varepsilon) = \varepsilon_2$. Пусть $f_k^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ – функция, обратная к $f_k(\cdot,\varepsilon)$, $k = 1,2$. Функция $f(\cdot,\varepsilon) := f_1(f_2^{-1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ является функцией последования по траекториям поля X_ε. Введем также функцию расхождения $\tilde{d}(u,\varepsilon) := f_1(u,\varepsilon) - f_2(u,\varepsilon)$. Нетрудно убедиться, что

$$f(v,\varepsilon) = v,\ f'_v(v,\varepsilon) > 1\ (f'_v(v,\varepsilon) < 1) \Leftrightarrow \tilde{d}(u,\varepsilon) = 0,\ \tilde{d}'_u(u,\varepsilon) > 0\ (\tilde{d}'_u(u,\varepsilon) < 0),\ u = f_2^{-1}(v,\varepsilon), \tag{8}$$

$$f(v,\varepsilon) = v,\ f'_v(v,\varepsilon) = 1,\ f''_{vv}(v,\varepsilon) \ne 0 \Leftrightarrow \tilde{d}(u,\varepsilon) = \tilde{d}'_u(u,\varepsilon) = 0,\ \tilde{d}''_{uu}(u,\varepsilon) \ne 0,\ u = f_2^{-1}(v,\varepsilon). \tag{9}$$

Из (3) – (7) следует, что существуют такие $\bar{u} > 0$ и $\delta \in (0,\delta_5]$, что

$$\tilde{d}(\bar{u},\varepsilon) < 0 \text{ при } \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{10}$$

$$\tilde{d}''_{uu}(u,\varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [0,\bar{u}],\ \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{11}$$

Ввиду (6) и равенства $f_2(0,\varepsilon) = \varepsilon_2$ мы можем считать, что числа $\bar{u} > 0$ и δ выбраны так, что

$$\tilde{d}'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [0,\bar{u}],\ \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{12}$$

Из (4) и (7) следует, что при достаточно малом δ $\tilde{d}'_u(0,\varepsilon)<0$ при всех $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$. Учитывая (10) и (11) получаем, что существует C^{r-1}-функция $m:(0,\delta)\times(-\delta,\delta)\to(0,\bar{u})$, такая, что

$$\tilde{d}'_u(m(\varepsilon),\varepsilon)=0,\ \tilde{d}'_u(u,\varepsilon)>0 \text{ при } 0\le u<m(\varepsilon),\ \tilde{d}'_u(u,\varepsilon)<0 \text{ при } m(\varepsilon)<u\le\bar{u}, \tag{13}$$

6. Бифуркации.

Из равенства $\tilde{d}(0,\varepsilon)=f_1(0,\varepsilon)-\varepsilon_2$ и из (3) следует, что $\tilde{d}(0,\varepsilon)\big|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1}<0$, а $\tilde{d}(0,\varepsilon)\big|_{\varepsilon_2=-\varepsilon_1}>0$. Отсюда и из (12) получаем, что для любого $\varepsilon_1\in(0,\delta)$ существует единственное число $b_1(\varepsilon_1)\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$, такое, что

$$\operatorname{sgn}\tilde{d}(0,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(b_1(\varepsilon_1)-\varepsilon_2). \tag{14}$$

По теореме о неявной функции $b_1(\cdot)\in C^1$. Уменьшив при необходимости δ, из (14) получаем, что при $\varepsilon_1\in(0,\delta)$, $-\delta<\varepsilon_2<b_1(\varepsilon_1)$ $f_1(0,\varepsilon)>\varepsilon_2$ и $-p<f_1^{-1}(\varepsilon_2,\varepsilon)<0$. Это означает, что траектория поля $-X_\varepsilon$, выходящая из точки $z_2(\varepsilon)$, следующий раз пересекает дугу $\eta=0,\ -p<\xi\le0$ линии разрыва l_2 в точке $\zeta(\varepsilon)$ с координатой $\xi=f_1^{-1}(\varepsilon_2,\varepsilon)<0$. Следовательно, через точку $z_2(\varepsilon)$ проходит неустойчивая периодическая траектория $\Gamma_2(\varepsilon)$, содержащая дугу линии разрыва между точками $\zeta(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$. Аналогично, при $\varepsilon_2=b_1(\varepsilon_1)$ получаем, что входящая и выходящая сепаратрисы особой точки $z_2(\varepsilon)$ совпадают, образуя неустойчивую периодическую траекторию. Из (10), (11), (13) и (14) следует, что при $-\delta<\varepsilon_2\le b_1(\varepsilon_1)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет на промежутке $(0,\bar{u}]$ единственный нуль $u_1(\varepsilon)$, причем $\tilde{d}'_u(u_1(\varepsilon),\varepsilon)<0$. Ввиду (8) через точку с координатами $\xi=u_1(\varepsilon)$, $\eta=0$ проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_1(\varepsilon)$, а траектории, проходящие через точки с координатами $0<\xi\le\bar{u}$, $\eta=0$ ω-предельны к $\Gamma_1(\varepsilon)$. Аналогично (10) получаем, что для любого $u_*>0$ найдется такое $\rho>0$, что $u_1(\varepsilon)<u_*$ при $\varepsilon_1\in(0,\rho)$, $-\delta<\varepsilon_2\le b_1(\varepsilon_1)$, то есть $\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}u_1(\varepsilon)=0$. Это означает, что $\Gamma_1(\varepsilon)$ рождается из контура Γ_0.

Обозначим $M(\varepsilon):=\tilde{d}(m(\varepsilon),\varepsilon)$. Вследствие (11) и (13) $M'_{\varepsilon_2}(\varepsilon)<0$ при всех $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$. Так как $|f_1(u,\varepsilon)|\le\theta\varepsilon_1$, а $f_2(u,\varepsilon)\ge f_2(0,\varepsilon)=\varepsilon_2$, то при $\varepsilon_2=\varepsilon_1$ $M(\varepsilon)<0$. При $\varepsilon_2=b_1(\varepsilon_1)$ $\tilde{d}(0,\varepsilon)=0$ и потому $M(\varepsilon)>0$. По теореме о нулях получаем, что для любого $\varepsilon_1\in(0,\delta)$ существует единственное число $b_2(\varepsilon_1)\in(b_1(\varepsilon_1),\varepsilon_1)$, такое, что

$$\operatorname{sgn}M(\varepsilon)=\operatorname{sgn}(b_2(\varepsilon_1)-\varepsilon_2). \tag{15}$$

По теореме о неявной функции $b_2(\cdot)\in C^1$.

Из (15) следует, что при $b_2(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ не имеет нулей, а X_ε периодических траекторий, рождающихся из Γ_0. При $\varepsilon_2=b_2(\varepsilon_1)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный (двукратный) нуль $m(\varepsilon)$. Ввиду (9) через точку с координатами $\xi=m(\varepsilon),\eta=0$ проходит двойной цикл. При $b_1(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<b_2(\varepsilon_1)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет два нуля $0<u_2(\varepsilon)<u_2(\varepsilon)<\bar{u}$, причем $\tilde{d}'_u(u_2(\varepsilon),\varepsilon)>0$, $\tilde{d}'_u(u_1(\varepsilon),\varepsilon)<0$, $\lim\limits_{\varepsilon_1\to0}u_2(\varepsilon)=0$. Ввиду (8) через точку с координатами $\xi=u_1(\varepsilon),\eta=0$ ($\xi=u_2(\varepsilon),\eta=0$) проходит устойчивая (неустойчивая) гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_1(\varepsilon)$ ($\Gamma_2(\varepsilon)$) поля X_ε, рождающаяся из Γ_0.

Очевидно, что при $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta)$ X_ε не может иметь периодических траекторий, рождающихся из Γ_0.

Библиографический список

1. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [Текст] / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.5. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2006. С. 49-52.
3. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях сепаратрисного контура кусочно-гладкого векторного поля [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20: сб. трудов XX международной науч. конф. Т. 1. Изд-во ЯГТУ, 2007. С. 69-71.
4. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях петли сепаратрисы положения равновесия на линии разрыва [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21: сб. трудов XXI международной науч. конф. Т. 1. Саратов: Изд-во СГТУ, 2008. С. 125-127.
5. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях кусочно-гладких векторных полей, имеющих петлю сепаратрисы седла, находящегося на линии разрыва [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.6. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. С. 46-56.
6. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях петли сепаратрисы сшитого седло-узла [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // // Труды VI международных Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. С. 148-153.
7. *Ройтенберг, В.Ш.* О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2014, №2. С. 26-30.

О вершинах куба, лежащих на гиперплоскости

А.В. Селиверстов

Вероятностные алгоритмы часто оказываются эффективнее детерминированных. Оценка вероятности ошибки при вычислениях, связанных с многочленами, обычно использует лемму Шварца–Зиппеля [11]. Мы покажем, как можно использовать такие методы для решения задачи дискретной оптимизации, близкой к задаче о рюкзаке, то есть о распознавании гиперплоскости, на которой лежит некоторая вершина куба. Эта задача NP-полная, хотя она допускает приближённое решение за полиномиальное время [3, 12].

Постановка задачи о рюкзаке использует целые числа, но допускает различные переформулировки. Близкая задача рассмотрена в [2]. С другой стороны, задача о рюкзаке сводится к решению системы $n+1$ алгебраического уравнения от n переменных над алгебраически замкнутым полем. Например, система из линейного уравнения, определяющего гиперплоскость, и n уравнений вида $x_k^2 = 1$ для $(-1,1)$-куба или $x_k^2 = x_k$ для $(0,1)$-куба. По сути, мы построим другую систему уравнений, имеющую дополнительный геометрический смысл.

Гладкость аффинной гиперповерхности эквивалентна несовместности системы $n+1$ алгебраического уравнения от n переменных. Совместность системы может быть проверена за экспоненциальное время [6]. Отметим, что эта задача может быть решена вычислением приведённого базиса Грёбнера соответствующего идеала, однако сложность такого вычисления может быть очень высокой при больших значениях n из-за появления на промежуточных шагах многочленов высокой степени [5, 10]. Все известные вероятностные методы решения систем уравнений требуют экспоненциального времени в общем случае [8, 9, 11].

Гладкость n-мерной проективной гиперповерхности, заданной формой степени d с коэффициентами $f_1,\ldots,f_N$, где $N = C_{n+d}^d$, выражается неравенством нулю дискриминанта $D(f_1,\ldots,f_N)$. Напомним его определение. Гиперповерхности в P^{n+1} соответствуют гиперплоским сечениям многообразия Веронезе. Особые гиперповерхности соответствуют касательным гиперплоскостям к многообразию Веронезе. В свою очередь касательные гиперплоскости — это точки двойственного многообразия [4]. Дискриминант определяет гиперповерхность в двойственном проективном пространстве P^{n+1*}, двойственную к многообразию Веронезе [7]. Степень многообразия Веронезе d^n и степень дискриминанта $(n+1)d^n$ экспоненциально зависят от числа переменных.

Замечание. Гладкость некоторых гиперповерхностей легко проверяется в любой размерности. Например, если дана форма f и ненулевое число α, то аффинная гиперповерхность, заданная уравнением $f=\alpha$, гладкая. Для доказательства отметим, что в каждой точке гиперповерхности выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = deg(f)\alpha \neq 0$$

Следовательно, форма f и её первые производные не имеют общих нулей.

Замечание. Иным способом проверки гладкости служит построение регулярного отображения на заведомо гладкое многообразие. Свойства таких отображений для кривых рассмотрены в [1].

Рассмотрим невырожденную квадратичную форму $g(x_1,\ldots,x_n)$. Аффинная квартика X, заданная уравнением $g(x_1^2-1,\ldots,x_n^2-1)=0$, имеет 2^n особых $(-1,1)$-точек. Рассмотрим отображение

$$f:(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_1^2,\ldots,x_n^2).$$

Образ $f(X)$ является особой квадрикой (конусом), заданной уравнением $g(x_1-1,\ldots,x_n-1)=0$. Его единственная особая точка $(1,\ldots,1)$ — это образ всех 2^n особых точек на X. Напротив, квартика X', заданная уравнением $g(x_1^2-1,\ldots,x_n^2-1)=1$ гладкая; её образ $f(X')$ тоже гладкий. Более того, проективное замыкание X не имеет других особых точек и каждая из них изолирована; проективное замыкание X' гладкое.

Дана гиперплоскость H, определённая над полем рациональных чисел; задача распознавания $(-1,1)$-точек, лежащих на H, сводится к задаче распознавания особых точек на гиперповерхности четвёртой степени, которая строится вероятностным алгоритмом за полиномиальное время. **Доказательство**. Обозначим $g(x_1,\ldots,x_n)=\sum\alpha_{ij}x_ix_j$ квадратичную форму, зависящую от $m=\frac{n(n+1)}{2}$ параметров $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. Для любых ненулевых значений $\{\alpha_{ij}\}$ каждая $(-1,1)$-точка будет особой точкой аффинной квартики $g(x_1^2-1,\ldots,x_n^2-1)=0$. Если такая точка принадлежит гиперплоскости H, то она является особой точкой гиперплоского сечения.

Предположим, что существует такой набор чисел $\{\alpha_{ij}\}$, что проективное замыкание гиперплоского сечения квартики гладкое. Дискриминант такого сечения $D(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{nn})$

равен нулю на особых сечениях. Будем рассматривать независимые равномерно распределённые случайные целые числа α_{ij} из достаточно большого отрезка $[1;r]$. Вероятность равенства нулю дискриминанта оценим по лемме Шварца–Зиппеля [11]. Мощность множества

$$\{(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{nn}) \mid (\forall i, j)\alpha_{ij} \in \mathrm{Z} \cap [1,r], D(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{nn}) = 0\}$$

не превосходит $deg(D)mr^{m-1}$, где $m = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Следовательно, вероятность того, что сечение особое не превышает $deg(D)mr^{-1}$. Эта величина достаточно маленькая для всех значений r ? $n(n+1)deg(D)$. Мы можем работать с экспоненциально большими значениями r, поскольку при этом длины двоичных записей целых чисел из отрезка $[1;r]$ полиномиально ограничены. Отметим, что мы не используем явный вид дискриминанта, но только верхнюю оценку его степени [7].

Автор благодарен А.В. Гаврикову за замечания. Работа выполнена в ИППИ РАН при частичной поддержке РФФИ (проект 13-04-40196-Н).

Библиографический список

1. *Медных, И.А.* О точной верхней оценке числа голоморфных отображений римановых поверхностей малого рода [Текст] / И.А. Медных / Сибирский математический журнал. — 2012. — Т. 53, 2. — С. 325–344.

2. *Прелов, В.В.* О вычислении энтропии эллипсоида в хэмминговом пространстве [Текст] / В.В. Прелов / Проблемы передачи информации. — 2013. — Т. 49, 1. — С. 3–18.

3. *Схрейвер, А.* Теория линейного и целочисленного программирования [Текст] / А. Схрейвер / — М.: Мир, 1991.

4. *Харрис, Дж.* Алгебраическая геометрия. Начальный курс [Текст] / Дж. Харрис / — М.: МЦНМО, 2005.

5. *Чистов, А.Л.* Дважды экспоненциальная нижняя оценка на степень системы образующих полиномиального простого идеала [Текст] / А.Л. Чистов / Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, 6. — С. 186–213.

6. *Chistov, A.L.* An improvement of the complexity bound for solving systems of polynomial equations [Текст] / A.L. Chistov / Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011. — Т. 390. — С. 299–306.

7. *Gelfand, I.M.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants [Текст] / I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky / —Birkhäuser, Boston, 1994.

8. *Giusti, M.* A Gröbner free alternative for polynomial system solving [Текст] / M. Giusti, G. Lecerf, B. Salvy / Journal of Complexity. — 2001. — V. 17. — P. 154–211.

9. *Herrero, M.I.* Affine solution sets of sparse polynomial systems [Текст] / M.I. Herrero, G. Jeronimo, J. Sabia / Journal of Symbolic Computation. — 2013. — V. 51. — P. 34–54.

10. *Mayr, E.W.* Dimension-dependent bounds for Gröbner bases of polynomial ideals [Текст] / E.W. Mayr, S. Ritscher / Journal of Symbolic Computation. — 2013. — V. 49. — P. 78–94.

11. *Schwartz, J.T.* Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities [Текст] / J.T. Schwartz / Journal of the ACM. — 1980. — V. 27. — P. 701–717.

12. *Tamir, A.* New pseudopolynomial complexity bounds for the bounded and other integer Knapsack related problems [Текст] / A. Tamir / Operations research letters. — 2009. — V. 37, 5. — P. 303–306.

Фрактальные методы в естествознании

Е.И. Смирнов, В.С. Секованов, В.А. Ивков, В.Н. Селезнева, С.М. Шляхтина

До недавнего времени считалось, что фракталы – это красивые картинки и ничего более. Однако время и интенсивные исследования в различных областях науки развеяли данный взгляд на фракталы. Идеи фрактальной геометрии находят широкое применение в различных областях человеческих знаний. Данной науке посвящено много сайтов, написаны монографии, проводятся представительные научные конференции различного уровня. Об интенсивности исследований в области фрактальной геометрии свидетельствуют работы [1 – 12].

В данной работе мы остановимся на приложении фрактальной геометрии в физике и экономике.

Деррида, Де Сезе и Ициксон впервые обнаружили тождественность нулей Янга–Ли в термодинамическом пределе с множеством Жюлиа преобразования перенормировки $R_q(x) = \left(\frac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$. То есть фазовая граница Янга-Ли совпадает с фрактальным множеством Жюлиа преобразования $\mathrm{R_q}$ (см.[4]). В монографии [7] рассмотрены в смысле перенормировок фазовые границы Янга-Ли, продолженные в комплексную плоскость. Однако подробных пояснений для построения множеств Жюлиа рациональной функции $R_q(x) = \left(\frac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$ нет, что вызывает многочисленные вопросы у бакалавров, студентов, магистров и аспирантов, изучающих теорию фазовых переходов и множества Жюлиа.

Проведем исследование при $q = -0{,}1$.

Имеем: $R_q(x) = \left(\frac{x^2-0{,}1-1}{2x-0{,}1-2}\right)^2 = \left(\frac{x^2-1{,}1}{2x-2{,}1}\right)^2$.

Неподвижные точки находятся из уравнения: $(R_q(x))^{(1)} = x$, $\left(\frac{x^2-1{,}1}{2x-2{,}1}\right)^2 = x$. Произведя преобразования, получим: $x^4 - 2{,}2x^2 + 1{,}21 = 4x^3 - 8{,}4x^2 + 4{,}41x$. Данное уравнение равносильно уравнению $x^4 + 6{,}2x^2 - 4x^3 - 4{,}41x + 1{,}21 = 0$. Решая последнее уравнение с помощью среды MathCAD, получим:

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{pmatrix} 1.21 \\ -4.41 \\ 6.2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.975+0.449i \\ 0.975-0.449i \\ 1 \\ 1.049 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0.975+0.44$

$x_2 = 0.975-0.44$

$x_3 = 1$

$x_4 = 1.04$

Заметим также, что неподвижной точкой отображения $R_q(x) = \left(\dfrac{x^2 - 0{,}1 - 1}{2x - 0{,}1 - 2}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)^2$ будет и точка ∞.

Определим характер найденных неподвижных точек:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1.1}{2\cdot x - 2.1}\right)^2 = \frac{4\cdot x\cdot\left(x^2 - 1.1\right)}{(2\cdot x - 2.1)^2} - \frac{4\cdot\left(x^2 - 1.1\right)^2}{(2\cdot x - 2.1)^3}$$

$$\left|\frac{dR_q}{dx_1}\right| = \left|\frac{4\cdot(0.975 + 0.449i)\cdot\left[(0.975 + 0.449i)^2 - 1.1\right]}{[2\cdot(0.975 + 0.449i) - 2.1]^2} - \frac{4\cdot\left[(0.975 + 0.449i)^2 - 1.1\right]^2}{[2\cdot(0.975 + 0.449i) - 2.1]^3}\right| = 1.04$$

$$\left|\frac{dR_q}{dx_2}\right| = \left|\frac{4\cdot(0.975 - 0.449i)\cdot\left[(0.975 - 0.449i)^2 - 1.1\right]}{[2\cdot(0.975 - 0.449i) - 2.1]^2} - \frac{4\cdot\left[(0.975 - 0.449i)^2 - 1.1\right]^2}{[2\cdot(0.975 - 0.449i) - 2.1]^3}\right| = 1.04$$

$$\left|\frac{dR_q}{dx_3}\right| = \left|\frac{4\cdot 1\cdot\left(1^2 - 1.1\right)}{(2\cdot 1 - 2.1)^2} - \frac{4\cdot\left(1^2 - 1.1\right)^2}{(2\cdot 1 - 2.1)^3}\right| = 0$$

$$\left|\frac{dR_q}{dx_4}\right| = \left|\frac{4\cdot 1.049\left(1.049^2 - 1.1\right)}{(2\cdot 1.049 - 2.1)^2} - \frac{4\cdot\left(1.049^2 - 1.1\right)^2}{(2\cdot 1.049 - 2.1)^3}\right| = 501.04$$

Точка x_3=1 – притягивающая неподвижная точка.

Точки x_1=0.975+0.449i, x_2=0.975–0.449i, x_4=1.049 – отталкивающие неподвижные точки, поскольку $\left|\left(R_q(x_1)\right)'\right| = 1{,}048$, $\left|\left(R_q(x_2)\right)'\right| = 1{,}048$, $\left|\left(R_q(x_3)\right)'\right| = 0$, $\left|\left(R_q(x_4)\right)'\right| = 501{,}049$. Полученные вычисления показывают, что из четырех точек $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ притягивающей неподвижной точкой будет только точка $x_3 = 1$.

Согласно теореме Б.2.4. [3, с.331] каждый притягивающий цикл A притягивает критическую точку c.

Поэтому для нас важны критические точки отображения $R_q(x) = \left(\dfrac{x^2 - 0{,}1 - 1}{2x - 0{,}1 - 2}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)^2$, которые мы сейчас найдем, не используя информационно-коммуникационные технологии. Имеем:

$$\left(R_q(x)\right)' = \left[\left(\frac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)^2\right]' = 2\left(\frac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)\cdot\left(\frac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)' = 2\left(\frac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)\cdot\frac{2x(2x - 2{,}1) - 2\left(x^2 - 1{,}1\right)}{(2x - 2{,}1)^2} =$$

$$= 2\left(\frac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)\cdot\frac{4x^2 - 4{,}2x - 2x^2 + 2{,}2}{(2x - 2{,}1)^2} = 2\left(\frac{x^2 - 11,}{2x - 2{,}1}\right)\cdot\frac{2x^2 - 4{,}2x + 2{,}2}{(2x - 2{,}1)^2} = \frac{4\left(x^2 - 1{,}1\right)\left(x^2 - 2{,}1x + 1{,}1\right)}{(2x - 2{,}1)^3}$$

Критическими точками отображения $R_q(x)$ являются : $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{2{,}1}{2} = 1{,}05$; $x_3 = \sqrt{1{,}1} \approx 1{,}0488$; $x_4 = -\sqrt{1{,}1} \approx -1{,}0488$; $x_5 = 1{,}1$; $x_6 = \infty$.

Замечаем, что $x_1 = 1$ является притягивающей неподвижной точкой. Точка $x_6 = \infty$ также является неподвижной притягивающей точкой для функции $R_{-0,1}(x)$ Следуя [3], поясним сказанное.

Поведение функции $R_q(x)$ в окрестности V бесконечно удаленной точки ∞ эквивалентно поведению функции $F_q(x) = \dfrac{1}{R_q(\frac{1}{x})}$ в окрестности точки 0, поскольку диаграмма 1 коммутативна:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "R_q"] \arrow[d, "\frac{1}{x}"'] & C \arrow[d, "\frac{1}{x}"] \\
C \arrow[r, "F_q"] & C
\end{tikzcd}
$$

Диаграмма 1.

Боле точно: точку ∞ будем считать неподвижной притягивающей точкой функции R_q, если –0 – неподвижная притягивающая точка функции F_q.

В нашем случае имеем: $R_q(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1{,}1}{2x - 2{,}1}\right)^2$.

$$
F_q(x) = \frac{1}{R_q(\frac{1}{x})} = \frac{1}{\left(\dfrac{(\frac{1}{x})^2 - 1{,}1}{\frac{2}{x} - 2{,}1}\right)^2} = \frac{(\frac{2}{x} - 2{,}1)^2}{(\frac{1}{x^2} - 1{,}1)^2} = \frac{\dfrac{(2-2{,}1x)^2}{x^2}}{\dfrac{(1-1{,}1x^2)^2}{x^4}} = \frac{(2-2{,}1x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^4}{(1-1{,}1x^2)^2}.
$$

Следовательно, $F_q(x) = \dfrac{x^2(2-2{,}1x)^2}{(1-1{,}1x^2)^2}$.

$$
F_q{}'(x) = \frac{(2x(2-2{,}1x)^2 - 4{,}2x^2(2-2{,}1x))(1-1{,}1x^2)^2 - 2x^2(2-2{,}1x)^2(1-1{,}1x^2)(-2{,}2x)}{\left[(1-1{,}1x^2)^2\right]^2} =
$$

$$
= \frac{x(2-2{,}1x)(1-1{,}1x^2)[(2(2-2{,}1x) - 4{,}2x)(1-1{,}1x^2) + 4{,}4x^2(2-2{,}1x)]}{(1-1{,}1x^2)^4} =
$$

$$
= \frac{x(2-2{,}1x)[(4-4{,}2x-4{,}2x)(1-1{,}1x^2) + 8{,}8x^2 - 9{,}24x^3]}{(1-1{,}1x^2)^3} =
$$

$$
= \frac{x(2-2{,}1x)[(4-8{,}4x)(1-1{,}1x^2) + 8{,}8x^2 - 9{,}24x^3]}{(1-1{,}1x^2)^3} =
$$

$$
= \frac{x(2-2{,}1x)[4-8{,}4x-4{,}4x^2+9{,}24x^3+8{,}8x^2-9{,}24x^3]}{(1-1{,}1x^2)^3} =
$$

$$
= \frac{x(2-2{,}1x)(4-8{,}4x+4{,}4x^2)}{(1-1{,}1x^2)^3}.
$$

Таким образом, $F_q'(x)=0$ при $x=0$. Следовательно, бесконечно удаленная точка ∞ является сверхпритягивающей неподвижной точкой для функции $R_q(x)=\left(\dfrac{x^2-1{,}1}{2x-2{,}1}\right)^2$.

Точка $x_2=\dfrac{2{,}1}{2}=1{,}05$ отображается на ∞ $\left(R^{(1)}_{-0{,}1}(1{,}05)=\left(\dfrac{1{,}05^2-1{,}1}{2{,}1-2{,}1}\right)^2=\infty\right)$ после первого шага и остается там: $R^{(2)}_{-0{,}1}(1{,}05)=\infty\ \ldots\ R^{(n)}_{-0{,}1}(1{,}05)=\infty$.

Так как $R^{(1)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=0$, то остается исследовать только траектории точек $1{,}1$ и 0. Согласно [7] траектории этих точек взаимодополняющие, и достаточно исследовать траектории точек $\pm\sqrt{1{,}1}$, что равносильно исследованию траектории точки 0 ибо $R^{(1)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=0$. Итак, мы имеем:

$$R^{(1)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=0;$$

$$R^{(2)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=\left(\frac{1{,}1}{2{,}1}\right)^2\approx(0{,}5238)^2\approx 0{,}27;$$

$$R^{(3)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=\left(\frac{0{,}0729-1{,}1}{0{,}54-2{,}1}\right)^2=\left(\frac{1{,}0271}{1{,}56}\right)^2\approx(0{,}6584)^2\approx 0{,}43;$$

$$R^{(4)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=\left(\frac{0{,}1849-1{,}1}{0{,}86-2{,}1}\right)^2=\left(\frac{0{,}9151}{1{,}24}\right)^2\approx(0{,}738)^2\approx 0{,}54;$$

$$R^{(5)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=\left(\frac{0{,}2916-1{,}1}{1{,}08-2{,}1}\right)^2=\left(\frac{0{,}8084}{1{,}02}\right)^2\approx(0{,}7925)^2\approx 0{,}63;$$

$$R^{(6)}_{-0{,}1}\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)=\left(\frac{0{,}3969-1{,}1}{1{,}26-2{,}1}\right)^2=\left(\frac{0{,}7031}{0{,}84}\right)^2\approx(0{,}837)^2\approx 0{,}7.$$

Поскольку $\left(R_q(x)\right)'=\dfrac{4\left(x^2-1{,}1\right)\left(x^2-2{,}1x+1{,}1\right)}{\left(2x-2{,}1\right)^3}$, то при $x\in(0;1)$ $\left(R_q(x)\right)'>0$ и $R_q(1)=1$, замечаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(R^{(n)}_q\left(\pm\sqrt{1{,}1}\right)\right)=1$.

Согласно [7] в данном случае не может быть дополнительных аттракторов, что иллюстрирует ***Рис.1***. То есть аттракторами являются только точки 1 и ∞.

Отметим, что для графического представления аттракторов нами были разработаны алгоритмы выявления сингулярности Янга-Ли – множество Жюлиа преобразования перенормировки отображений $R_q(x)=\left(\dfrac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$ для $q=-0{,}1$, с помощью языка программирования Pascal.

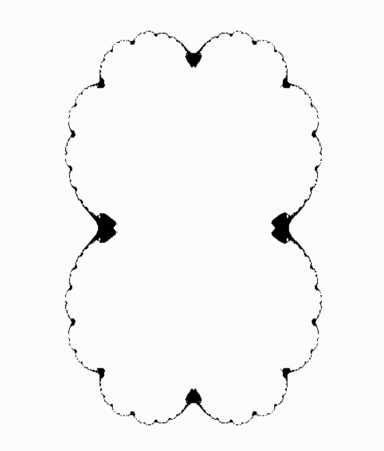


Рис. 1. *Сингулярности Янга-Ли – множество Жюлиа преобразования перенормировки для q=-0,1*

Представим фрагмент программного кода, реализующего данный алгоритм:

```
{0}    begin
{1}      k1:=k1+1;
{2}      Power(z,2,z1);
{3}      z1.re:=z1.re-1.1;
{4}      z2.re:=2*z.re-2,1;
{5}      z2.im:=2*z.im;
{6}      Chastnoe(z1,z2,z3);
{7}      Power(z3,2,z);
{8}        if (sqrt(sqr(z.re-1)+sqr(z.im))>1)
{9}          and (sqrt(sqr(z.re-1)+sqr(z.im))<1000) then
{10}           Putpixel(Nx,Ny,0)
{11}         else Putpixel(Nx,Ny,15);
{12}     end;
```

Опишем кратко представленный фрагмент программы:

{1} счётчик количества итераций

{2} процедура возведения в степень комплексного числа, т.е. z^2

{3} вычисление действительной части числителя, т.е. z^2-1,1 (мнимая часть не изменится)

{4} вычисление действительной части знаменателя, т.е. 2z-2,1

{5} вычисление мнимой части знаменателя, т.е. 2z

{6} процедура нахождения частного двух комплексных чисел, т.е. $\frac{z^2 - 1,1}{2z - 2,1}$

{7} процедура возведения в степень комплексного числа, т.е. $\left(\frac{z^2 - 1,1}{2z - 2,1}\right)^2$

{8-9} условия для неподвижной притягивающей точки x_3=1

{10} Закрашиваем в чёрный цвет все точки, которые удовлетворяют условиям

{11} Иначе закрашиваем в белый цвет.

На ***Рис. 2.*** изображено заполняющее множество Жюлиа (множество, орбиты точек которого пойманы). Заполняющее множество Жюлиа характеризует два бассейна притяжения $A(\infty)$ (черный цвет) и $A(\infty)$ (белый цвет).

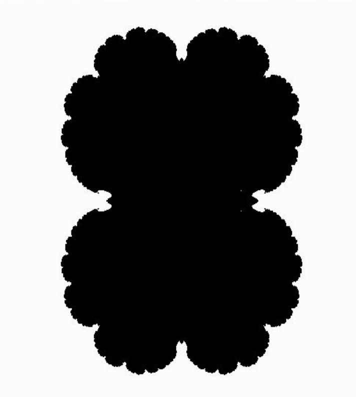


Рис. 2 *Сингулярности Янга-Ли – заполняющее множество Жюлиа преобразования перенормировки для q=-0,1*

Представим фрагмент программного кода:

```
{0}     begin
{1}       k1:=k1+1;
{2}       Power(z,2,z1);
{3}       z1.re:=z1.re-1.1;
{4}       z2.re:=2*z.re-2,1;
{5}       z2.im:=2*z.im;
{6}       Chastnoe(z1,z2,z3);
{7}       Power(z3,2,z);
{8}         if (sqrt(sqr(z.re-1)+sqr(z.im))<tt) then
{9}               Putpixel(Nx,Ny,0)
{10}          else Putpixel(Nx,Ny,15);
{11}    end;
```

Данный алгоритм аналогичен предыдущему, но выполняет построение заполняющего множества Жюлиа.

Укажем применение идей фрактальной геометрии в других разделах естествознания.

Мандельброт отмечает: «Метод фрактальной геометрии стал частью математического инструментария гидроаэродинамики, гидрологии и метеорологии. Его эффективность объясняется уникальной способностью выражать большое количество запутанных, неупорядоченных данных несколькими простыми формулами. Эта способность особенно ярко проявляется в случае мультифрактальности – фундаментального понятия при изучении турбулентности…» [5, с.157].

Фракталы с большой точностью описывают многие физические явления и образования реального мира: горы, облака, корни, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды, что далеко не соответствует простым геометрическим фигурам. Броуновское движение как случайное и хаотическое движение частичек пыли, взвешенных в воде, также является элементом фрактальной геометрии. След, оставляемый броуновской частицей, практически заполняет всю плоскость, т.е. во фрактальном смысле его размерность равна не 1, а 2. И это дает полное право броуновскому движению называться фракталом [см. 4, с.28].

«Мир по своей структуре (форме) является фрактальным», – заявляет академик Шабетник. «Наблюдаемая цикличность движения бесконечного мира вызывает ритмичность естественных процессов, что обусловлено как проявлением свойств самоподобия фрактальных форм, так и закона всеобщего взаимодействия» [10, с.10]. «Фрактальная природа материальных объектов является универсальным свойством и вызывается их энергетической сущностью… и изучение мира следует выполнять методами фрактальной геометрии» [Там же, с.26].

В области микромира волновая функция при квантовом фазовом переходе также описывается на языке фрактальной геометрии. Численные эксперименты показали, «что квадрат модуля волновой функции состоит из редких всплесков в пространстве с амплитудой, намного превышающей средний уровень. Всплески большой амплитуды окружены всплесками с меньшей амплитудой и т.д., формируя тем самым некую самоподобную фрактальную структуру» [1, с.123].

Фрактальные структуры проявляются и в некоторых агрегационных явлениях (осаждение, фильтрация, электролиз, и агрегация коллоидов, аэрозоли, пыли, сажи). Фрактальные кластеры (агрегаты) образуются в растворе при образовании геля, т.е. кластера, состоящего из соединенных частиц-золей; при образовании подобных систем в дымах и туманах; при релаксации металлического пара; при образовании пленок на поверхности в процессе напыления их из струи, содержащей аэрозоли; при образовании кластеров из частиц, находящихся в суспензиях и коллоидных растворах. Появилась теория фрактальных трещин, модель трения для фрактальных поверхностей, фрактальная механика древесно-полимерных композитов и пр. Физическое определение фрактала следующее: «Фракталы – это геометрические объекты (линии, поверхности, тела), имеющие сильно изрезанную структуру и обладающие свойством самоподобия в ограниченном масштабе» [8, с.402].

В работе [8] рассматривается применение фракталов в радиофизике и радиоэлектронике, в частности – фрактальная фильтрация малоконтрастных объектов. Показаны современные радиолокационные системы в совокупности с каналом распространения радиоволн и объектами зондирования с точки зрения теории сложных неравновесных систем, открытых для потоков энергии, энтропии и информации. В основе радиофизического применения теории фракталов лежат принципиально новые методы обработки полей и сигналов, которые используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных и эффекты самоподобия. Дробные фрактальные размерности характеризуют не только топологию исследуемых объектов, но и отражают процессы эволюции динамических систем и связаны с их свойствами. По своему содержанию контуры всех природных объектов суть динамические процессы, внезапно застывшие в физических формах и объединяющие в себе устойчивость и хаос.

Модели ограниченного роста популяций в биологии $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ также обладают фрактальными свойствами. При удвоении периода в модели популяций получаем «фрактал, основанный на двоичной системе с показателем масштабирования, равным числу Фейгенбаума» [6, с.77].

Идеи фрактальной геометрии применятся и в теории турбулентности. В классической книге «Фрактальная геометрия природы» основателя теории фракталов Бенуа Мандельброта, переведенной на многие языки и выдержавшей несколько изданий, говорится: «Кроме того, именно в контексте турбулентности теория каскадов и самоподобия достигла своих прогнозистских триумфов между 1941 и 1948 гг. Главными действующими лицами здесь были Колмогоров, Обухов, Онсагер и Фон Вайцзекер, однако традиция связывает достижения этого периода только с именем Колмогорова» [4, с.151]. Уриэл Фриш, известный своими работами по фрактальным моделям однородной турбулентности, в книге «Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова» отмечает, что теория динамических систем не только оказалась полезной в ряде случаев при исследовании турбулентности, но и сама развивалась под влиянием этих исследований [см. 9]. В статье «Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса», опубликованной в 1941 году Колмогоров пишет: «С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсации более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости. В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму» [2, с.478].

Таким образом, спектр применения фрактальной теории в естествознании достаточно широк и разнообразен. И действительно, ведь мы живем «с фрактальными артериями неподалеку от фрактальных речных систем, собирающих влагу со склонов фрактальных гор под фрактальными облаками и катящих свои воды к фрактальным берегам морей и океанов» [11, с.18].

Библиографический список

1. *Божокин, С. В.* Фракталы и мультифракталы [Текст] / С. В. Божокин , Паршин Д. А. / – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
2. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса [Текст] / А. Н. Колмогоров / – ДАН СССР 30(4), 1941.
3. *Кроновер, Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р. М. Кроновер/: пер. с англ. под ред. Т. Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
4. *Мандельброт, Б.* Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельброт / – М. : Ин-т компьютер. исслед. – 656 с.
5. *Мандельброт, Б.* Хадсон Р. Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах [Текст] / Б. Мандельброт, Р. Л. Хадсон /: пер.с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс». - 2006. – 400 с.
6. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов [Текст] / А. Д. Морозов / – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 159 с.
7. *Пайтген, Х.-О.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст] / Х.-О. Пайтген , П. Х. Рихтер / – М.: Мир. - 1993. – 176 с.
8. *Потапов, А. А.* Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах [Текст] / А. А. Потапов / В кн. Р. Кроновер Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. – С. 374 - 479.
9. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова [Текст] / У. Фриш /– М. : ФАЗИС, 1998.
10. *Шабетник, В. Д.* Фрактальная физика. Наука о мироздании [Текст] / В. Д. Шабетник / – М.: Профиздат, 2000. – 404 с.
11. *Шредер, М.* Фракталы, хаос, степенные законы (миниатюры из бесконечного рая) [Текст] / М. Шредер / – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. – 528 с.
12. *Афанасьев, В.В.* Экспериментальное исследование творческой активности студентов в процессе обучения математике. – [Текст] / В.В.Афанасьев, Е.И.Смирнов / Ярославский педагогический вестник. - 3.- 1996. - С.110 -115.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в вузе

Пути осуществления эффективного дифференцированного обучения математическим дисциплинам в средних профессиональных учебных заведениях

А.Б. Абдикаримова

В подготовке современного специалиста основополагающую роль играет дифференциация обучения. Дифференцированное обучение в средних профессиональных учебных заведениях является необходимым условием решения задачи подготовки будущего высококвалифицированного специалиста, обладающего способностью оперативно адаптировать и использовать новые достижения науки в профессиональной деятельности. Проблемы дифференциации обучения в средней и высшей школах были рассмотрены многими учеными и специалистами. Проблема дифференциации обучения в системе среднего профессионального образования в настоящее время находится лишь в стадии интенсивного осмысления: уточняются ее цели, формы и направления, содержание и методические пути реализации [3-4].

В настоящее время подготовка специалистов в средних профессиональных учебных заведениях не может обходиться единой для всех учащихся программой по учебным предметам, в том числе, по математике. В течение многих лет в средней школе и средних профессиональных учебных заведениях ведутся исследования, связанные с возможностями углубленного изучения различных дисциплин, с усилением их развивающего и воспитывающего влияния на личность студента.

Для обеспечения научного уровня профессиональной подготовки необходимо определить: какая часть содержания учебного материала по предмету является инвариантной части, а какая вариативной части. Содержание ядра (инвариантной части) должно обеспечивать достаточность подготовки обучения по программам каждого профиля. В случае, если учащиеся указанного направления изменят выбор профиля специальности в колледже или сферу деятельности, то будет сохранен их общеобразовательный минимум математической подготовки. Содержание же дополнительной (вариативной) части курса должно способствовать формированию понимания роли и места математики в деятельности, связанной с различными специальностями; представлений о приложениях математики в гуманитарной, технической и естественных науках [1].

В монографии Л.И. Майсеня целесообразным считается классификация содержания математического образования учащихся колледжей следующим образом:

- *минимальное содержание* математического образования предполагает введение математики в структуру личностного образования и культуры человека, формирование определенных умений прикладного использования математического аппарата;

- *базовое содержание* призвано обеспечить математическую подготовку в общекультурном и прикладном аспектах. Предполагается, что обучающиеся на этом уровне не будут иметь дело с математикой как наукой (на значительном теоретическом уровне) в будущей профессиональной деятельности;

-*повышенное содержание* с усилением фундаментализма призвано обеспечить возможность прикладного использования математики в будущей профессиональной деятельности. Обучение математике на повышенном уровне предполагает также подготовку учащихся к творческому использованию математических знаний в будущей профессиональной деятельности, в основе которой математика занимает существенное место [2].

Нам бы хотелось отметить, что обучение математике в среднем профессиональном учебном заведении, его ориентированность на потребности общества требуют достижения определенного гарантированного уровня обучения. Этот уровень должен быть различным для различных типов учебных заведений, иметь свою специфику, но не может быть ниже минимального уровня. Минимальный уровень, как правило, призван фиксировать не сумму знаний, а умение выполнять определенный вид заданий, т.е. уметь применять знания, сформированные навыки в стандартных ситуациях.

На этапе определения содержания математического образования уровни обучения при изучении математических дисциплин должны соответствовать основной цели обучения конкретной специальности. Для экономического и технического профилей мы выделили следующие направления:

- базовый уровень математического образования для студентов экономического и технического профилей на базе среднего (полного) общего образования, который представлен основным курсом математики;
- повышенный уровень математического образования для студентов экономического и технического профилей на базе среднего (полного) общего образования, который предполагает углубленное изучение математических основ профессиональных знаний.

Перейдем к более подробному описанию этих направлений.

•*Требования к базовому уровню в средних профессиональных учебных заведениях для учащихся экономических специальностей на базе среднего (полного) общего образования.* Содержание: обзор основных элементарных функций и их свойства и графики. Методика: изучение темы можно начать с построения кривой спроса и предложения. Повторение вопросов, связанных с производными функций, целесообразно кроме геометрического и механического смысла производной давать ее экономический смысл, определять эластичность функции, иллюстрируя эти понятия задачами с экономическим содержанием. При повторении темы « Уравнения и неравенства с модулем» акцентируем внимание на геометрическом смысле абсолютной величины числа, который затем будет использоваться при объяснении предела, непрерывности, производной функции, понятий теории вероятностей, а также будет востребован при изучении графического метода решения задач линейного программирования. Элементы теории вероятностей и математической статистики следует начать с изучения основных понятий теории вероятностей: достоверное событие, случайные события, невозможные события, противоположные события.

•*Требования к повышенному уровню обучаемых на экономических специальностях на базе среднего (полного) общего образования.* На базе выше обозначенного ядра можно начать знакомство студентов с началами экономико-математических методов, которые включают в себя отыскание точек равновесия между спросом и предложением, элементы теории графов и сетевого планирования, простейшие модели транспортных задач. На повышенном уровне курса необходимо знакомить студентов с основами математического моделирования, с простейшими экономико-математическими моделями и, соответственно, с математическим аппаратом, необходимым для их изучения.

•*Требования к базовому уровню для технических специальностей учащихся на базе среднего (полного) общего образования. Содержание: о*собо значимое место для базового уровня обучения математике отводится изучению понятия функции. Рассматриваются определение функции и ее свойства (ограниченность, монотонность, четность, периодичность и др.), формируются понятие функции, заданной явно, неявно и параметрически, вырабатываются навыки построения соответствующих графиков. Понятия непрерывности, разрывов и асимптот вводятся описательно, без строгих определений. Для закрепления усвоенных понятий часть учебного времени отводится также на решение неравенств и систем неравенств с двумя переменными. Сформированные знания и умения будут востребованы при вычислении интегралов. При изучении раздела «Степени и корни» существенными для дальнейшего использования в курсе высшей математики являются темы «Обобщение понятия корня» и «Метод рационализации». Знания и практические умения по тождественному преобразованию иррациональных выражений, устранению иррациональности в знаменателе дробей, переходу к дробным показателям будут нужны уже на базовом уровне при изучении темы «Предел последовательности и функции».

•*Требования к повышенному уровню для технических специальностей учащихся на базе среднего (полного) общего образования. Содержание: ме*тод математической индукции как один из наиболее важных методов доказательства, достаточно часто применяемый в курсах «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и др.; формула бинома Ньютона и полиномиальная формула, элементы комбинаторики, достаточно полезные в курсах «Математический анализ» и «Теория вероятностей»; в рамках темы «элементы математической логики», желательно познакомить учащихся с методами построения отрицания высказываний и основными операциями над высказываниями, с понятиями прямой, обратной, противоположной прямой и противоположной обратной теоремами; при изучении темы «Интегральное исчисление» можно ограничиться примерами, не требующими тщательного овладения методами подстановки и интегрирования по частям ; тема «Дифференциальные уравнения», имеющая прикладной характер, дающая возможность развития навыков математического моделирования.

Как показывают исследования, базовый уровень должен обеспечивать достаточную подготовку обучения, содержание повышенного уровня должно способствовать формированию понимания роли и места математики в деятельности, связанной с различными специальностями.

Библиографический список

1. *Григорьев, С.Г.* Преемственность в обучении математике учащихся средней школы и студентов экономического вуза [Текст] / С.Г. Григорьев / дис. в виде научного доклада на соискание ученой степени канд. пед. наук: 13.00.02 / С.Г. Григорьев.– Москва, 2000. – 31 с.
2. *Майсеня, Л.И.* Развитие содержания математического образования учащихся колледжей : теоретические основы и прикладные аспекты [Текст] / Л.И. Майсеня / монография / Л.И. Майсеня. Минск : МГВРК, - 2008. – 540 с.
3. *Рыжаков, М.В.* Модульно-рейтинговая система в условиях сетевого взаимодействия образовательных учреждений [Текст] / М.В. Рыжаков / Профильная школа. 2007. - №1 (22).- С. 5-13.
4. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. -- Педагогика, 1990.

Об интеграции теории и практики обучения студентов математике

Н.В. Бровка

В последние десятилетия интеграционные процессы становятся ведущей тенденцией на различных ступенях развития образования в разных странах, регионах и вузах. Интеграция образовательных пространств, академическая мобильность, расширение сферы влияния Болонской декларации оказывают влияние на национальное измерение качества вузовской подготовки молодых специалистов в Республике Беларусь. Международное измерение качества образования выдвигает требование сохранения в системе его содержания основных положений фундаментальных классических наук. От современного преподавателя математики требуются творческие умения, основанные на применении комплексных знаний и способности мобильно их использовать для решения образовательных задач. Решение научной проблемы повышения качества математической подготовки студентов возможно на основе концепции интеграции теории и практики обучения математике. Констатации единства теории и практики в какой-либо сфере деятельности явно недостаточно. Необходим диалектический подход к рассмотрению этого единства, предполагающий умение видеть в единстве различия, а в различиях – единство**. Единство теории и практики обучения студентов математике** обусловлено тем, что теория и практика реализуют одну и ту же цель, диктуемую социальным заказом общества. Кроме того, теория и практика обучения взаимно обогащают, дополняют друг друга, способствуя не только формированию системы знаний, умений и навыков по изучаемому предмету, но и становлению и развитию всесторонне развитой личности. **Основные отличия теории от практики обучения** состоят, во-первых, в степени глубины и последовательности охвата материала, поскольку теория обучения развивается в соответствии с логикой самой науки, а практика обучения предмету соотносится с характерными особенностями содержания предмета и соответствующей методикой его преподавания. Во-вторых, при изучении одних и тех же математических объектов в теории и практике рассматриваются их различные стороны, позволяющие выделить в каждом из них не только общие, но и некоторые особенные характеристики. Таким образом, в категориальном плане учебный предмет изоморфен науке, что же касается конкретного содержания, то оно может быть вариативным.

Изучение генезиса педагогической интеграции и анализ литературы по проблеме методологии дидактики математики позволило выделить предпосылки интеграции теории и практики обучения студентов математике. К ним относятся следующие факторы: то, что интеграция в разных ее проявлениях стала ведущей тенденцией современного образовательного пространства, активизация процессов информатизации, гуманизации и гуманитаризации математического образования, а также специфика математики, ее характерные особенности.

Суммируя результаты изучения проблемы интеграции в образовании, можно констатировать, что она является многоуровневой характеристикой образовательной системы, охватывающей широкий круг вопросов, различных по глубине и степени общности. В существующих исследованиях можно выделить следующие направления: основные современные педагогические концепции интеграции и ее категории (Б. А. Ахлибинский, А. Я. Данилюк, Е.И. Смирнов, Г. Ф. Федорец, Н. К. Чапаев); интеграция содержания общего и профессионального образования (М. Н. Берулава, В. А. Еровенко, И. П. Яковлев); интеграция и дифференциация форм и методов организации обучения (В.Г.Ермаков, В. И. Загвязинский, И. Д. Зверев, В. В. Казаченок, Л. С. Капкаева, Б.В.Пальчевский, А.П.Сманцер); интеграция учебных дисциплин (Н. А. Лошкарева, Г. Н. Солтан, В. Н. Федорова и Д. М. Кирюшкин); межпредметные связи и их роль в совершенствовании подготовки учителя (И. А. Новик, А. В. Усова, И. И. Цыркун) и др.

В настоящее время в системе математической подготовки студентов вузов существуют противоречия

– между теорией открытого, развивающегося, динамичного применения современных (в том числе и компьютерно-ориентированных) форм, методов и средств и консервативной практикой рецептурно-излагающих способов обучения студентов содержанию фундаментальных математических дисциплин;

– тенденциями нарастания объема научно-теоретических знаний, которые студенты должны усвоить в вузе, и снижения общего уровня математической подготовки поступающих в вуз абитуриентов;

– значительной ролью, которую играет фундаментальный курс математики в программе подготовки студентов, использованием ее аппарата в науке, профессиональном становлении будущего математика и недостаточным вниманием к его применению в учебном процессе с учетом профессиональной направленности студентов.

Выделенные противоречия обусловили научную проблему, состоящую в исследовании возможности использования интеграции теории и практики обучения студентов математике как средства повышения качества математической подготовки студентов педагогических специальностей на материале курса математического анализа. Образовательная практика свидетельствует, что в математической подготовке школьников, а затем и студентов, все более ощутимыми становятся разрывы между эмпирической арифметикой начальной школы, формально-логической математикой средней школы и абстрактно-дедуктивными теоретическими построениями высшей математики в вузе. Почему именно интеграция теории и практики может способствовать разрешению указанных трудностей? Изучение генезиса педагогической интеграции и анализ литературы по проблеме методологии дидактики математики позволили выделить ***предпосылки интеграции теории и практики обучения студентов математике***. К ним относятся: ведущая роль интеграционных процессов в современном образовательном пространстве, активизация процессов информатизации, гуманизации и гуманитаризации математического образования, а также специфика математики как науки. Изменения, происходящие в математике, касаются в первую очередь специальных, частных вопросов. Фундаментальные основы научного знания изменяются достаточно медленно и касаются не отмены уже известных закономерностей, а уточнения границ и способов применяемости известного в изменяющемся и обновляющемся знании. Изучение соотношения фундаментального и динамичного изменяющегося знания приводит к развитию мировоззрения студентов.

На основе изучения этапов развития педагогической интеграции и анализа дефиниций термина «интеграция», нами введено следующее определение: интеграция теории и практики обучения математике – **процесс и результат объединения в целое, соотнесения и согласования теоретических положений и способов практической деятельности в процессе математической подготовки обучаемых** [1]. **Средствами** данной интеграции выступают межпредметные связи, которые мы подразделяем на внутридисциплинарные, междисцилинарные и трансдисциплинарные. Межпредметные связи - педагогическая категория

- обозначающая синтезирующие отношения и связи между объектами, понятиями и положениями, изучаемыми разными науками,
- отражающая явления и процессы реальной действительности,
- находящая свое выражение в содержании, формах и методах учебно-воспитательного процесса и
- выполняющая образовательную, развивающую и воспитывающую функции в их органическом единстве.

Разработка научно-теоретических положений исследуемой интеграции осуществлялась на основе обновления построения содержания обучения математике в высшей школе, выделения методов познания, применяемых в математике, а также анализа, дополнения и обобщения характерных особенностей математики. Реализация положений интеграции проведена на материале самого объемного фундаментального курса в вузах – математического анализа. Это обусловлено тем, что в математическом анализе изучаются качественные стороны математических объектов (непрерывность, сходимость, гладкость, интегрируемость и т.д.), которые характеризуют динамику многих реальных процессов, лежат в основе исследования современных математических моделей и описываются символьным языком математики с учетом тонкостей и специфики его использования. Диалектичность математического анализа состоит в том, что упомянутые качественные стороны математических объектов изучаются с разной степенью конкретности и общности, на разных ступенях абстракции, что дает возможность развивать обще-учебные и интегративные умения студентов с первых дней обучения. Кроме того, к особенностям этой дисциплины, характерным и для всей математики как науки в целом, относятся абстрактность, логичность, доказательность. Таким образом, математический анализ обладает наиболее полным перечнем характерных особенностей, которые в той или иной степени присущи другим математическим дисциплинам. Курс математического анализа в классическом университете включает элементы топологии, полилинейной алгебры, тесно переплетается с курсами функционального анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Фундаментальность и преемственность построения процесса обучения являются факторами, способствующими формированию у студентов способности сложить многоцветные осколки знаний в единую математическую картину. В этом отношении продуктивную роль играет продуманная актуализация межпредметных связей, которая, во-первых, отвечает требованию развития мотивации обучения в высшей школе, согласно которой для студентов важна не только занимательность материала, но и возможность его применения в дальнейшей профессиональной деятельности. Во-вторых, согласуется с дидактической целью реализации единства формирования академических, социально-личностных и профессиональных компетенций посредством сочетания рецептурно-излагающего и проблемно-эвристического методов обучения, а также практико-ориентированного содержания обучения математике, обусловленного особенностями будущей профессии студентов.

Совершенствование учебного процесса посредством такой интеграции состоит в смене рецептурно-излагающего стиля обучения на стиль, главной задачей которого является обучение студентов методам работы с информацией, составляющей содержание фундаментальных курсов, к которым относится и математический анализ.

В соответствии в подразделением межпредметных связей выделены ***три вида*** рассматриваемой интеграции в обучении студентов математике: внутридисциплинарная, междисциплинарная, трансдисциплинарная. ***Внутридисциплинарная*** интеграция предполагает организацию единства практической деятельности и теоретических положений в рамках курса математического анализа. Ее ведущая функция – научное математическое знание, средства осуществления – внутридисциплинарные связи, основная задача – формирование знаний и способов деятельности по их применению в курсе математического анализа.

Примером интеграции первого вида в курсе математического анализа является введение единого алгоритма определения пяти видов интегралов, изучаемых в этом курсе. Необходимость изучения разных видов интегралов (двойных, тройных, поверхностных и криволинейных) создает у студентов впечатление беспорядочности и нагромождения теоретического материала. Во избежание этого мы даем единый алгоритм их введения, который обусловлен практическими приложениями и состоит из пяти шагов: 1) разбиения T множества интегрирования U на N частей, называемых элементами разбиения $U_i, U=\bigcup_{i=1}^{N} U_i$; 2) выбора фиксированной точки $\xi_i, i=\overline{1,N}$ в каждом из элементов разбиения; 3) вычисления произведения $f(\xi_i)\cdot\mu(U_i)$, где $f(\xi_i)$ – значение функции f в фиксированной точке, а $\mu(U_i)$ – мера элемента разбиения (либо его проекции на координатную ось или плоскость, что будет отмечено позднее); 4) составления интегральной суммы; 5) вычисления предела построенной интегральной суммы при стремлении параметра разбиения $\lambda(T)$ к нулю. Если предел этой суммы

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\cdot\mu(U_i) \overset{\text{def}}{=} \int_U f d\mu$$

существует, не зависит от способа разбиения множества интегрирования U и выбора фиксированных точек ξ_i, то его называют ***интегралом***. Вид этого интеграла определяется тем, какова структура множества интегрирования U и тем, какие объекты взяты в качестве элементов разбиения в соответствии с таблицей на рисунке 1.

Область интегрирования	Объект, взятый в качестве элемента разбиения	Мера элемента разбиения	Вид определяемого интеграла
Прямолинейный отрезок	Прямолинейные отрезки	Длина отрезка	Определенный интеграл Римана
Спрямляемая кривая	Отрезки дуги кривой интегрирования	Длина дуги	Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)
Спрямляемая кривая	Проекции отрезков дуги кривой на координатной оси	Длина отрезков на координатных осях	Криволинейный интеграл II рода (по координатам)
Гладкая поверхность (или кусочно-гладкая)	Части поверхности интегрирования	Площадь части поверхности	Поверхностный интеграл I рода (по площади поверхности)
Ориентируемая гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность	Проекции частей поверхности на координатные плоскости	Площади проекций частей поверхности на координатные плоскости	Поверхностный интеграл II рода (по координатам)
Область в плоскости R^2	Прямоугольники	Площадь прямоугольника	Двойной интеграл
Область в пространстве R^3	Параллелепипеды	Объем параллелепипеда	Тройной интеграл
Область в R^n	n-мерные параллелепипеды	n-мерный объем параллелепипеда	n-кратный интеграл

Рисунок 2– Соответствие видов интегралов и областей интегрирования

Необходимо отметить, что приведенный общий алгоритм введения понятия интеграла охватывает такой широкий их спектр несмотря на многие имеющиеся различия еще и потому, что все рассматриваемые в первом столбце таблицы множества интегрирования попадают в один класс множеств, называемых *жордановыми*. Геометрические изображения этих множеств для студентов привычны, поскольку со школьной скамьи их учат тому, что площадь или длина точки, площадь кривой или прямолинейного отрезка равны нулю. При вычислении объема тел в стереометрии предполагается, что объем границы тела тоже равен нулю. Тем самым они сразу рассматривают лишь жордановы множества, не вводя лишь этот термин. На языке математики это характеристическое свойство сформулировано в определении: множество $D \subset R^n$ называют жордановым, если оно ограничено и множество его граничных точек есть множество меры нуль в смысле Жордана. Дальнейшим естественным обобщением понятия интеграла и множества интегрирования является интеграл Лебега, наибольшее внимание которому уделяется в курсе функционального анализа.

Выделение содержательно-методических линий, соответствующих понятиям «сходимость», «непрерывность», «равномерная сходимость», «дифференцируемость» и «интегрируемость» применительно к различным объектам курса математического анализа (функциям одной и многих переменных, функциональным рядам, рядам Фурье и несобственным интегралам, зависящим от параметра) реализуется путем целенаправленного установления внутридисциплинарных связей, а также применения методов соотнесения, сравнения, аналогии, обобщения и конкретизации с опорой на разработанные нами приемы смысловых опор, бинарных оппозиций и алгоритмизации [2]. *Прием смысловых опор* состоит в делении изучаемого определения на части так, что каждая часть несет смысловую нагрузку, отражающую ключевые отношения в нем. Например, формулировки определений непрерывности, дифференцируемости, равномерной сходимости и др. приводятся в курсе по крайней мере, пять раз: для функций одной и многих переменных, функциональных последовательностей, рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметра [рисунок 2]. С помощью этого приема можно произвести *обобщение большого количества формулировок и определений* математических объектов, используя фреймовую модель их представления. Выделим с помощью значков $\langle\ \rangle$ фрагменты, являющиеся смысловыми опорами в определениях равномерной сходимости двух объектов – степенного ряда и несобственного интеграла соответственно:

$$\langle\ \forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon\in N:\forall n>n_\varepsilon\ \rangle\langle\ \forall x\in X\ \rangle\Rightarrow\langle\ |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon\ \rangle;$$

$$\langle\forall\varepsilon>0\,\exists\eta_\varepsilon\in(a,w):\forall\eta\in(\eta_\varepsilon,w)\ \rangle\langle\ \forall x\in X\ \rangle\Rightarrow\langle\ \left|\int_a^\eta f(t,x)dt-I(x)\right|<\varepsilon\ \rangle.$$

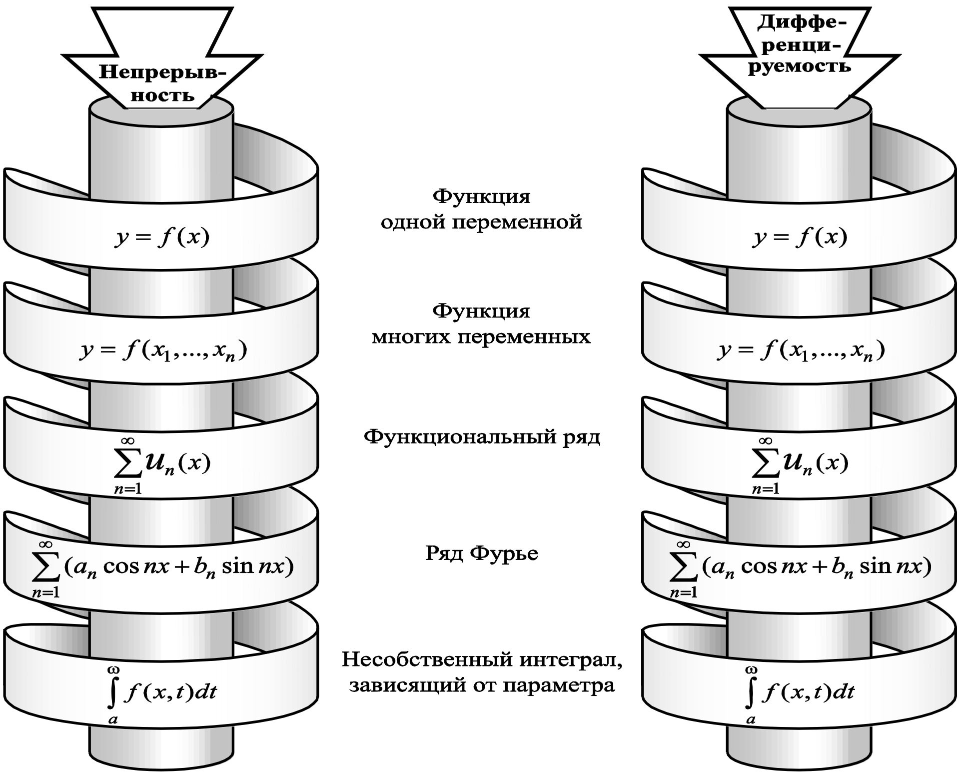


Рисунок 2 – Иллюстрация содержательно-методических линий, базирующихся на понятиях «непрерывность» и «дифференцируемость»

Структура определений одинакова, различаются лишь фигурирующие объекты. Существенно важным является порядок следования выделенных фрагментов. Если фрагменты, стоящие в приведенных формулировках на втором месте, переместить на первое, то получим определение не равномерной, а поточечной сходимости функционального ряда или несобственного интеграла. Для увеличения информационной емкости изучаемых понятий в разработанных нами средствах обучения реализована *визуализация приема смысловых опор* с применением возможностей анимации. ***Междисциплинарная*** интеграция состоит в организации обучения математической дисциплине в ее взаимосвязи с другими математическими дисциплинами и дисциплинами естественнонаучного цикла. Ее *ведущие* *функции* – межпредметное научное знание и способы деятельности, *средства осуществления* – внутридисциплинарные и междисциплинарные связи, *основные задачи* – формирование общенаучных представлений о математике как науке, умений и навыков по применению и переносу полученных знаний из различных областей математики, а также обще-учебных и элементов интегративных умений. ***Трансдисциплинарная*** интеграция выражается в организации взаимосвязи содержания обучения математическим дисциплинам с вопросами психолого-педагогического, философского и гуманитарного циклов – методикой преподавания математики, педагогикой, психологией, философией. Ее *ведущей функцией* является способ деятельности, *средствами осуществления* – междисциплинарные и трансдисциплинарные связи, *основной задачей* – развитие панорамного видения математики, прямое и опосредованное формирование основ научно-методических и общепедагогических знаний, умений и навыков будущего преподавателя. Необходимо отметить, что перечисленные виды интеграции и описанные способы их реализации в полной мере согласуются с уровнями системности и симбиоза, которые выделены в исследовании Е.И. Смирнова в процессе уровневой дифференциации интеграционных связей между учебными элементами [3, с. 292]. В процессе реализации указанных видов рассматриваемой интеграции важен учет аксиологической составляющей. Это выражается во включении в содержание обучения занимательных, парадоксальных фактов, предполагающих актуализацию межпредметных связей, и касающихся истории развития математики, приложений математических объектов, рассмотрения разных сторон одних и тех же математических объектов разными математическими дисциплинами.

✓ Всегда ли сумма углов треугольника равна 180 градусам? (В евклидовой геометрии – да, а в геометрии Римана сумма углов сферических треугольниках может быть и 270°, и 350° и 510°).

✓ Конечно или бесконечно множество всех яблонь на Земле? (Конечно. Оно выражается большим числом – «числом-гигантом», но оно конечно.)

- ✓ Каких чисел больше – рациональных или иррациональных? (Иррациональных)
- ✓ Всегда ли неограниченная величина является бесконечно большой?(Нет)
- ✓ В каком из множеств точек больше – в единичном отрезке или на прямой? (Одинаково)
- ✓ Любое ли множество можно измерить?(Нет. Примеры – снежинка Коха, коврик Серпинского, губка Менгера и др.)

Для студентов нематематических специальностей пояснения, касающиеся этих вопросов, выполняют роль аттракторов – развивающих познавательный интерес акцентов, которые поддерживают мотивацию изучения формальных математических объектов. Ответы для студентов-математиков на эти вопросы даются на основе актуализации внутри- и междисциплинарных связей математических дисциплин. Необходимо отметить, что терминология математического анализа и характерные для него методы познания и исследования придают процессу познания методологический характер.

Таким образом, методика интеграции теории и практики обучения студентов математике на основе выделения содержательно-методических линий, соответствующих ключевым качественным понятиям курса математического анализа (сходимость, дифференцируемость, равномерная сходимость, интегрируемость и др.) способствует углублению знаний, поскольку повышает информационную емкость изучаемых понятий, обеспечивает их структурированность. Такой подход

- способствует закреплению содержания обучения в долговременной памяти, поскольку обеспечивает структурированность, устойчивость, повторяемость информации, закрепление ее посредством визуализации и применения различных методов и способов представления знаний (таблиц, алгоритмов, символьных утверждений, фреймов, схем, предусматривающих элементы арт-рефлексии);
- обеспечивает свернутость и компактность содержания обучения, повторяемость ключевых понятий и их свойств – для сохранения в долговременной памяти,

разносторонность изучения математических объектов – для поддержания мотивации изучения, познания и рассмотрения прикладных аспектов.

Библиографический список

1. *Бровка, Н.В.* Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов [Текст] / Н.В.Бровка / – Минск: БГУ, 2009. – 243 с.
2. *Бровка, Н.В.* Об обучении студентов математическому анализу на основе интеграции теории и практики [Текст] / Н.В. Бровка // Интеграция общего и профессионального математического образования стран европейского содружества в контексте Болонского соглашения: материалы Международной научно-методической конференции, 23 –25 апреля 2014 г., БрГУ им. Петровского, г. Брянск. – Брянск: Изд-во ООО «Ладомир», 2014. – С. 422 – 433.
3. *Смирнов, Е.И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: монография [Текст] / Е.И. Смирнов / – Ярославль: ЯГПУ, 2012. – 646 с.

Применение информационно-коммуникационных технологий в области математической статистики и эконометрики к исследованию взаимосвязи показателей инвестиционных проектов

Ю.Н. Бурханова

Образование сегодня, как никогда, играет огромную роль в жизни общества и государства в целом. В современный период происходят коренные изменения в социально-экономической, политической и других сферах. В общественной жизни наблюдается тенденция увеличения темпов роста экономического и социального развития, и для обеспечения этого роста необходимо формирование новых творчески мыслящих специалистов высокого уровня, отвечающих современным требованиям. Фундаментальные научные исследования должны стать важнейшим ресурсом и инструментом освоения студентами компетентностей поиска, анализа, освоения и обновления информации.

Необходимость повышения качества образования диктует перспективы развития высшей школы и разработки новых подходов к обучению, которые характеризуются качественными изменениями содержания и структуры образования, внедрением в образовательный процесс информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Таким образом, объективно сформировалась задача обеспечить сферу образования методологией и практикой разработки и оптимального использования современных информационно-коммуникационных технологий. Это станет возможным путём создания новых методических систем обучения, ориентированных на развитие интеллектуального потенциала обучаемого, на формирование умений самостоятельно приобретать знания и осуществлять разнообразные виды исследовательской деятельности. Проблемы внедрения ИКТ в образовательную деятельность должны находить отражение в перспективных педагогических программах и научных исследованиях в области информатизации обучения и в высших учебных заведениях экономического профиля. В достижении поставленных целей может помочь целенаправленное внедрение ИКТ в образовательный процесс. Одновременно с этим анализ сложившихся традиционных методов и средств организации и проведения занятий по математической статистике и эконометрике в экономическом вузе констатирует преобладание репродуктивности при освоении учебного материала. Традиционные формы, методы и средства обучения в большей степени рассчитаны на преподавателя–транслятора информации, нередко студенты видят только результат, а не процесс изучаемого исследования. Всё вышесказанное определяет необходимость включения ИКТ в образовательный процесс, для чего необходимо разработать методику использования информационных технологий в учебном процессе преподавания эконометрики и математической статистики студентам экономических специальностей и способы использования на практике новых форм педагогических программных продуктов с применением компьютерной математической системы Mathematica.

Рассматривая возможность применения в обучении математической статистике и эконометрике ИКТ, функционирующих на основе компьютерной математической системы Mathematica, можно ожидать, что современное образование откроет перед педагогом и студентом новые способы решения многочисленных теоретических и практических задач. Анализ целей и задач преподавания курсов эконометрики и математической статистики в высших учебных заведениях экономического профиля и определение роли ИКТ в повышении профессиональных компетенций будущих экономистов приводят к идее модернизации методических основ обучения и методологии преподавания эконометрики и математической статистики в высших учебных заведениях экономического профиля.

Как в математической статистике, так и в эконометрике возможно выделить три вида научной и прикладной деятельности (по особенностям математико-статистических и эконометрических методов) сопряженной с использованием компьютерной математической системы Mathematica:

1) разработка и изучение методов прикладной статистики с учетом специфики экономических данных;

2) разработка и изучение математико-статистических моделей в соответствии с конкретными потребностями экономической науки и практики;

3) применение эконометрических методов для статистического анализа конкретных экономических данных.

Рассмотрим взаимосвязи выделенных выше видов научной и прикладной деятельности. По мере изучения материала и движения от пункта 1) к пункту 3) сужается граница области применения конкретного математико-статистического, эконометрического метода, но при этом повышается значение конкретной экономической ситуации. Если виду работ первого пункта соответствуют научные результаты, значимость которых оценивается по общеэконометрическим критериям, то для работ вида третьего пункта основное – это успешное решение задач конкретной области экономики и реализация их в системе Mathematica. Работы вида второго пункта занимают промежуточное положение, поскольку, с одной стороны, теоретическое изучение математико-статистических моделей может быть весьма сложным и математизированным, с другой – результаты представляют интерес не для всей экономической науки, а лишь для некоторого направления в ней.

Существующее многообразие применения математико-статистических методов в экономике позволяет найти класс задач, интересных каждому отдельно взятому студенту, отвечающих уровню его возможностей и учитывающих дальнейшее развитие индивидуальных способностей. С использованием информационно-коммуникационных технологий возможно сделать уклон на прикладную направленность изучаемых дисциплин. Акцент в обучении делается на применение получаемых теоретических знаний, на решение задач.

Mathematica сочетает возможности систем компьютерной алгебры –производить вычисления (символьные, численные, графические) без программирования – с проблемно-ориентированным языком программирования сверхвысокого уровня. Работа с системой происходит в диалоговом режиме: пользователь задаёт системе задание, а она сразу же его выполняет. Mathematica также обладает развитым встроенным языком программирования, легким для пользователя (вследствие новой идеологии программирования – функционального программирования). Таким образом, с помощью системы Mathematica можно решать многие задачи математической статистики и эконометрики на качественно новом уровне.

В данном работе на примере инвестиционного проекта «Изготовление и установка межкомнатных дверей» демонстрируется применение компьютерной математической системы Mathematica в качестве инструмента анализа взаимосвязи показателей проекта. А именно, была установлена степень тесноты взаимосвязи между изменяемыми, ключевыми переменными – ценой единицы продукции (дверь) P, условно-переменными затратами V и объёмом выпуска Q и результативными переменными – чистыми поступлениями от инвестиционного проекта NCF и чистой современной стоимостью проекта NPV. В качестве меры взаимосвязи использовался показатель корреляции R, который исчисляется на ПК с помощью компьютерной математической системы Mathematica. Значения ключевых параметров P,V и Q исследуемого инвестиционного проекта в количестве $n = 10000$ генерировались на ПК с помощью специального пакета стандартного дополнения:

<<Statistics\`Common\`DistributionsCommon\`

x=RandomArray[NormalDistribution[*a*, σ], *n*],

где *n* - объем каждой выборки параметров P,V и Q,

a, σ - параметры нормального распределения (для формирования параметров P,V и Q), определены статистическими данными по г. Набережные Челны.

10000 значений чистых поступлений NCF и столько же значений чистой современной стоимости NPV рассчитывались по специальным формулам инвестиционного менеджмента.

Чистые денежные поступления (Net Cash Flow, NCF) - это разница между положительным денежным потоком (поступление денежных средств) и отрицательным денежным потоком (расходование денежных средств) в рассматриваемом периоде времени в разрезе отдельных его интервалов.

NPV, чистая современная стоимость (сокращение от английского Net Present Value) — сумма предполагаемого потока платежей, приведенная к текущей (на настоящий момент времени) стоимости. Операция приведения к текущей стоимости называется дисконтированием. Приведение к текущей стоимости выполняется по заданной ставке дисконтирования.

Чаще всего NPV рассчитывается для потоков будущих платежей, например, при оценке экономической эффективности инвестиций.

Необходимость расчета NPV отражает тот экономический факт, что сумма денег, которой мы располагаем в настоящий момент, имеет большую реальную стоимость, чем равная ей сумма, которая появится в будущем. Это обусловлено несколькими причинами, например:

- влияние инфляции, уменьшение реальной покупательной способности денег;
- имеющаяся сумма может быть инвестирована и принести прибыль;
- риск неполучения предполагаемой суммы.

$$NPV = NCF_0 + \frac{NCF_1}{(1+r)^1} + \frac{NCF_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{NCF_n}{(1+r)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{NCF_k}{(1+r)^k},$$

где *k* – период проекта,

r – ставка дисконтирования (в десятичном выражении).

Результатом корреляционного анализа явилась следующая электронная таблица. Матрица в этой электронной таблице симметричная относительно главной диагонали с элементами на ней, равными единице, поскольку каждая переменная коррелирует сама с собой с R=1.

	A	B	C	D	E	F
1.		Условно-переменные	Объём выпуска,	Цена, P	Чистые поступле-	Чистая современная

		расходы, V	Q		ния, NCF	стоимость, NPV
2.	Условно-переменные расходы, V	1				
3.	Объём выпуска, Q	0,95381	1			
4.	Цена, P	0,02375	-0,00539	1		
5.	Чистые поступления, NCF	-0,37753	0,61753	0, 73675	1	
6.	Чистая современная стоимость, NPV	-0,37753	0,61753	0,73675	1	1

Из результатов корреляционного анализа в компьютерной математической системе Mathematica с помощью функций

LinearModelFit[PQ,{x}, {x}]
LinearModelFit [PV,{x}, {x}]
LinearModelFit [VQ,{x}, {x}]
LinearModelFit [V_NPV,{x}, {x}]
LinearModelFit [Q_NPV,{x}, {x}]
LinearModelFit [P_NPV,{x}, {x}]
LinearModelFit [NCF_NPV,{x}, {x}]

усматриваем независимость ключевых параметров проекта – цены P и объема выпуска Q; цены P и условно-переменных издержек V (поскольку значения коэффициентов корреляции между V, Q и P достаточно близки к 0); а также высокую прямую корреляционную связь между условно-переменными затратами V и объёмом выпуска Q (потому-то условно-переменные издержки часто называют пропорциональными, имея в виду, что с увеличением объёма выпуска продукта Q они растут линейно). Как и следовало ожидать, между условно-переменными затратами V и чистой современной стоимостью NPV существует умеренная обратная связь (R=-0,37753). Между объёмом выпуска Q и NPV, равно как и между ценой P и NPV, существует прямая корреляционная связь средней степени (соответственно R(Q; NPV)=0,61753 и R(P, NPV)=0,73675). И, наконец, результирующий показатель инвестиционного проекта, его чистая современная стоимость NPV напрямую зависит от величины потока платежей (чистых поступлений) NCF (R=1).

Близкие к нулевым значения коэффициента корреляции R указывают на отсутствие линейной связи между исследуемыми ключевыми показателями (P и Q, P и V), однако между этими переменными возможна нелинейная зависимость.

Следует отметить, что при стохастическом имитационном моделировании ключевых параметров P, V и Q и исчислении результирующих показателей проекта NCF, NPV, а также при последующем корреляционном анализе полученных результатов мы исходим из предположения о нормальном распределении ключевых и результирующих показателей проекта. Однако справедливость таких допущений нуждается в проверке, для осуществления которой следует применить специальные статистические критерии: хи-квадрат χ^2, омега-квадрат ω^2, Колмогорова-Смирнова. В компьютерной математической системе Mathematica эти критерии быстро и эффективно рассчитываются.

Главное в обучении будущих экономистов эконометрике и математической статистике – научить студентов учиться, выработать у них глубокую потребность в математических знаниях и экономическом анализе, стремление к совершенствованию и обновлению знаний, умение применять их в практической деятельности. Одно из условий эффективности учебного процесса – наличие интереса к изучаемому предмету.

Информационно-коммуникационные технологии позволяют конструировать новые методические формы представления учебного материала и новые формы мотивации, управления и контроля за самостоятельной работой студентов. Новым и перспективным направлением в области образования является использование в процессе обучения компьютерной математической системы Mathematica. Применение системы Mathematica в образовании избавляет студентов от массы трудоёмких вычислений и высвобождает время для обдумывания алгоритмов решения задач и анализа полученных результатов, представления результатов в выводах и прогнозах в наиболее наглядной форме. Высвободившееся время можно использовать для более глубокого изучения экономической сущности решаемых задач. Исследование реальных экономических ситуаций отвечает современным требованиям к реализации связи обучения студентов с практической деятельностью, а возможность использования ИКТ и адекватная интерпретация результатов решения позволяют сформировать у будущего экономиста умения давать оценку и прогнозировать последствия политических, экономических, социальных и других факторов.

О семантике событий доказывания

И. М. Вандула́кис, П. Стефане́ас

Введение

Философия математики в первой половине двадцатого века была в значительной степени сосредоточена на понятиях математического доказательства и математического факта (соответствующей истине), в том виде, в котором эти понятия понимались в логической семантике, разработанной в рамках главных программ оснований математики - логицизма, формализма, интуиционизма. С этой точки зрения, математическое знание понималось как совокупность логических систем, которые формализуют определенные аспекты фундаментальных математических понятий.

С другой стороны, исследования в истории математики показывают, что понятие математического доказательства понималось по-разному в разные времена и в разных культурах. Греческое понятие *аподиктического доказательства*, в той форме, в которой применяется в «Началах» Евклида было заменено в 17-ом -18-ом столетиях *аналитическим доказательством*, которое стало основной характеристикой Европейской математической традиции. А в начале 20-го столетия, кризис оснований математики привел к разграничению между классическим и конструктивным понятием математического доказательства и разработке различных систем математики (с различными логическими семантиками), которые основываются на одно или другое понятие *формального доказательства*. Исследования Геделя в метаматематике потрясли установленную веру в тождестве доказательства с истинностью. В последующие годы, в математической логике было разработано множество формальных представлений доказательств. Тем не менее, многие математики начали возражать против понятия формального доказательства. Маклейн, например, подчёркивает, что «Реальное доказательство - это не просто формализованный документ, а последовательность идей и умозрений <insights>» [Mac Lane, 1997]. Далее, компьютерные доказательства, которые появились во второй половине 20-го столетия, поставили новые проблемы перед сообществом математиков: вопрос о возможности понимания таких доказательств математиками, а также вопрос о границах допустимых средств доказательств.

Доказательства как события

Джозеф Гоген (1941-2006), предложил более общее понятие *события доказывания,* охватывающее все виды доказательств: аподиктические, диалектические, конструктивные, неконструктивные доказательства, а также шаги доказательств и компьютерные доказательства.

> «Математики говорят о «доказательствах» как будто они – реальные вещи. Однако в реальном мире могут действительно произойти только *события доказывания, [действия] доказывания* <*proof-events, provings*>, которые представляют собой актуальные переживания < experiences>, происходящие в определенное время и место, с участием конкретных людей, обладающих особые навыки, в силу их принадлежности в соответствующем математическом сообществе. …
> В событии доказывания участвует как минимум одно лицо, имеющее соответствующую подготовку и интерес, а также некоторые опосредствованные физические объекты, такие как произнесенные слова, жесты, рукописные формулы, трехмерные модели, напечатанные слова, диаграммы и формулы (мы исключаем из рассмотрения уединенные, чисто ментальные события доказывания …). Никакого из этих опосредствованных знаков не может быть «доказательством» самим по себе, потому что он должен быть интерпретирован, для того чтобы, он стал оживленным в качестве события доказывания; мы их будем называть *объектами доказывания*. Интерпретация доказательства часто требует построение промежуточных объектов доказывания и / или уточнения или исправления существующих объектов доказывания. Минимальный случай одного доказывающего, пожалуй, самый распространенный, но его трудно изучить, в то время когда, случай группы двух или более доказывающих, обсуждающих доказательства поразительно распространено» [Goguen, 2001].

Соответственно, событие доказывания является общественным процессом, происходящим в определенном месте и времени посредством публичного сообщения. Оно касается конкретных лиц, членов групп специалистов, которые обладают особые навыки и экспертизу.

События доказывания нельзя отождествлять с математическими фактами, соответствующими математическим истинам. В отличие от математических фактов, события доказывания могут иметь дело с неполными доказательствами, ложными доказательствами или даже изложениями идей или интуиций по конкретным проблемам без каких либо доказательств (например, доклад Гилберта в 1900 г., письмо С.Рамануджана к Г.Харди в 1913 г.). События доказывания происходят в определенных местах и временным интервалам и, таким образом, представляют собой неповторимые явления. Они имеют временную протяженность, в то время когда математические факты понимаются как универсалии, т.е. как сущности, существующие вне времени или никогда не существующие по необходимости. Следовательно, события доказывания и математические факты – это разные вещи.

Математическое доказывание как деятельность многоагентной системы

Событие доказывания предполагает наличие, по крайней мере, двух разных агентов двух типов: *доказывающего агента* <*prover*>, который может быть человеком или машиной, или их сочетание (гибридное доказывание), и *интерпретирующего агента* <*interpreter*>, который, как правило, должен быть человеком (лицом или группой экспертов). Доказывающий агент и интерпретирующий агент могут быть разделены пространством и временем, но они находятся в общении. В том случай, когда доказывающий агент есть человек, у него может возникнуть в уме представление или *интуиция* о том, что что-то в математике верно и выработать некое сообщение, зафиксированное в некотором семиотическом коде, чтобы передать свою интуицию. Это сообщение может не быть обязательно доказательством, а просто набросок доказательства или даже гипотеза. Оно определяет *начало* события доказывания. Несообщенные интуиции, такие, например, как неопубликованные исследования Гаусса по неевклидовой геометрии, не могут считаться началом события доказывания. Интерпретирующий агент, который окажется вовлеченным в этом событии доказывания, воспринимает это сообщение как событие доказывания и реагирует соответственно. В общем, сообщение, произведенное доказывающим агентом, может привести к различным исходам коммуникации. Для математика, занимающегося доказыванием, наиболее благополучный исход состоит в том, что все участники соглашаются, что «доказательство было дано». Но, есть и другие возможные исходы. Например, возможно, что большинство математиков более или менее убеждены, но хотят видеть некоторые дополнительные детали; или могут заключить, что результат вероятно верно, но имеются значительные пробелы в доказательстве. Но могут также согласиться, что результат является ложным. Возможно также, что некоторые участники события доказывания могут быть потеряны или запутанные. [Goguen, 2001].

Агенты играют разные *роли*. Тип агента определяет свою роль в отношении фиксированной задачи. Исполнение роли агентом означает, что он вовлечен в деятельность доказывания, т.е. что он участвует в событии доказывания. Роли, которые агенты могут исполнять, взаимозаменяемы: агент может исполнять роль доказывающего агента в одно время, а роль интерпретирующего агента в другое время события доказывания.

Человеческие агенты действуют с определенными *намерениями*, и их деятельность является *целенаправленным*, в зависимости от типа агента. Например, целью доказывающего агента, может быть, решить задачу или испытать эстетическое удовольствие от деятельности доказывания и его результатов или оба. Целью интерпретирующего агента, может быть, понять аргументацию, предложенную доказывающим агентом, чтобы проверить или опровергнуть ее. Цель может иметь промежуточные цели, которые могут быть связаны с определенными подзадачами основной задачи. Человеческим агентам можно приписать психические состояния, такие как вера, намерение, ожидание, способности и т.д. [Stefaneas, Vandoulakis 2015]. Когда их деятельность доказывания направлена на общей цели, это может привести к своему роду повышенной коллективной способности и эффективности деятельности доказывания. Такой коллективный потенциал агентов характерен, например, для событий доказывания посредством Интернета [Stefaneas, Vandoulakis 2012].

Взаимодействия между агентами

Агенты, как социальные субъекты, способны взаимодействовать с другими агентами, человеческими или искусственными, с тем, чтобы добиться цели (т.е. решить задачу) или помочь других агентов это сделать. Слои взаимодействия (минимально) двух агентов составляют следующую упорядоченную последовательность (каждый слой которой предполагает его предыдущий, но не наоборот):

i. Сообщение.
ii. Понимание.
iii. Интерпретация.
iv. Верификация и утверждение.

Сообщение. Среда обеспечивает окружающие условия для существования агентов и их коммуникации и тем самым служит *средой коммуникации* для агентов. Средства коммуникации включают письменные тексты (рукописные, печатные или электронные тексты, письма, стенограммы и т.п.) в (обычном или формальном) языке или в любой другой семиотическим кодом общения (знаки, формулы и т.д.). Среда обеспечивает также условия для устного общения (лекций и т.д.), условия для визуальной (невербальной) коммуникации (диаграммы, фильмы, Java-апплеты и т.д.), а также для общения через практику.

Процесс общения имеется место между доказывающим и интерпретирующим (или, по крайней мере, подразумеваемым интерпретирующим) агентом, которые участвуют в событии доказывания, хотя они могут быть в различных географических регионах, быть окружены различными средами, жить в разных временах, и принадлежать к различным математическим культурам. Тем не менее, они должны разделять общее *интерсубъективное пространство*, для того чтобы общение было возможно.

Доказывающий агент передает ментальное построение, закодированное в некотором семиотическом коде – в «тексте», в семиотической понимании термина. С другой стороны, (подразумеваемый) интерпретирующий агент должен воспринять что этот «текст» как предполагаемое доказательство, чтобы взяться за его декодирования. Доказывающий агент ожидает, что интерпретирующий агент будет убежден, что переданное построение является действительно доказательством. Его уверенность об этом, связана с личной твердой верой, что он не предан своей интуицией. Это прибавляет этический момент в отношении между доказывающими и интерпретирующими агентами и, в общем, перед научным сообществом [Bazhanov 2011].

Кроме того, «текст» формулируется доказывающим агентом в определенном *стиле*, исполняющем различные коммуникативные функции. Стиль может быть личным для доказывающего агента или его школы, или для целой традиции. Стиль представляет собой *мета-код*, который определяет выбор конкретного кода изложения и сочетание *принципов «смешивания»* <*blending principles*>, применяемых для получения «текста» доказывающим агентом [Stefaneas, Vandoulakis 2015].

Понимание. Понимание математического «текста», т.е. сообщения с предполагаемым доказательством – не результат простого прочтения «текста». Смысл, который доказывающий агент приписал в «текст» (*подразумеваемый смысл*), как правило, отличается от *воспринимаемого смысла*, приписываемого интерпретирующим агентом к тому же «тексту». Кроме того, доказывающий и интерпретирующий агента могут следовать различным *видам логики* в их рассуждениях. Понимание достигается, когда воспринимаемый смысл интерпретирующего агента *конгруэнтен* с предполагаемым смыслом доказывающего агента, т.е. когда можно установить отображение, называемое *семиотическим морфизмом*, между *семиотическими пространствами* доказывающего и интерпретирующего агентов [Goguen 1999, 2003; Stefaneas, Vandoulakis 2015].

Понимание «текста» интерпретирующим агентом является необходимым условием для его интерпретации; однако, это еще не гарантирует корректность доказательства.

Интерпретация. Это определение значений знаков, фиксированных языком или кодом коммуникации, используемым для представления и передачи доказательства или подразумеваемого доказательства. Код коммуникации содержит знаки и правила для комбинации (синтаксиса), интерпретации (семантики) и применения (прагматики) этих знаков, которые были согласованы на использование или должны быть расшифрованы.

Интерпретация является активным процессом, в ходе которой интерпретирующий агент может изменить первоначальное доказательство, добавлением новых понятий (определений), заполнением возможных пробелов в доказательстве, и т.д. В некотором смысле, интерпретация является реконструкцией смысла или сознательного воспроизведения информационного содержания «текста». Во время этого процесса, интерпретирующий агент может выбрать новый код, чтобы выразить смысл «текста». Тем не менее, стилистические характеристики исходного «текста» обычно не передаются. Процесс фокусируется на правильной экспликации и переформулировке его смысла. Специфика мета-кода служит коммуникативными целями и может способствовать, или препятствовать в понимании смысла «текста», но не сохраняется обязательно при интерпретации. Интерпретация, как правило, сформулирована в смеси стилей, современных интерпретирующему агенту, включая, возможно, элементов стиля доказывающего агента.

Верификация и утверждение.

Процесс доказывания завершен, когда агенты, участвующие в событии доказывания приходят к выводу, что они поняли доказательство и соглашаются, что это фактически доказательство, т.е., что доказательство устанавливает математический факт. Однако, бывают случаи доказательств, установленных компьютером, проверка которых практически невозможна человеком, так как ни человек, ни группа людей не в состоянии проверить огромное количество шагов доказательства. Что можно читать проверкой в таком случае является проверка корректности самого прувера (программы). Таким образом, в этом случае, проверка программы может гарантировать, что все возможные доказательства, порождаемые с помощью данного программного обеспечения «подтверждены». Тем или иным путем, либо человеком или с помощью автоматизированных машинных средств, окончательный результат проверки означает завершение события доказывания в этой точке времени и его утверждение.

Процесс верификации и утверждения всегда конечны во времени: математическое сообщество в конечный (хотя, возможно, очень длинный) интервал времени приходит к решению (положительную, или отрицательную) о предложенном доказательстве [Перминов 2001, 30-31]. После того, когда исход события доказывания проверен и утвержден, доказательство считается неопровержимым и надежным соответствующей группой математического сообщества и интегрируется в математическое наследие.

Таким образом, коллективный разум математического сообщества является окончательным утверждающим агентом истинности событий доказывания; он служит абсолютным критерием надежности предложенного доказательства.

Формальное представление событий доказывания

Понятие события доказывания можно формально представить с помощью *исчисления событий*. Первая формализация такого исчисления была предложена Робертом Ковальским и Мареком Серготом [Kowalski, Sergot 1986], о впоследствии била расширена Робом Миллером и Мюррем Шанаханом [Miller and Shanahan 1986]. Исчисление событий является логическим языком для представления и рассуждения о действиях и их воздействия. Используя язык исчисления событий, мы можем говорить о событиях доказывания и их последовательностей. Исчисление событий доказывания требует много-сортную логику предикатов с равенством, с сортами для

- индивидуальных физических объектов (людей, стульев, столов и т.д.).
- действительных чисел, для представления времени и переменных количеств.
- зависящих от времени свойств, таких как *состояния* и *действия*.
- независящих от времени высказываний, называемых *проблемами*, задаваемыми определенными (зависящими от времени) условиями.
- переменные величины.
- *Типы* событий доказывания, экземпляры которых определяют начало, и конец зависящих от времени свойств.

Событие доказывания *e* имеет место в пространстве и времени; оно касается фиксированной проблеме (высказывании), заданной определенными условиями (предикатами). Событие доказывания *e* имеет следующую внутреннюю структуру:

$$e \text{ Ç } \langle communicate(Intention, Problem), t \rangle$$

Это означает, что *интуиция* (идея, набросок доказательства, математическое рассуждение и т. д.) о (независящей от времени) *проблеме* (сформулированной в виде математического высказывания, заданного определенными условиями) *сообщается* во время *t*. В этом случае,

мы говорим, что представленное сообщение (семиотический «текст») является *экземплификацией* события доказывания по отношению к конкретной фиксированной проблеме.
Флюента f представляет собой последовательность событий доказывания (экземплификаций) развертывающихся во времени, касающихся одной фиксированной проблеме. Флюента является функцией, которая может быть интерпретирована в модели в виде множества точек времени. Таким образом, флюенты, также как события доказывания, имеют «начальные» и «конечные» точки.
Таким образом, связанная с событиями доказывания *онтология* включает типов событий доказывания (экземплификаций), флюенты и точки времени.
Значение события доказывания выражает субъективное убеждение сообщества, участвующего в событии доказывания в истинность сообщаемого «текста»; его можно оценить как субъективную (байесовскую) вероятность сообщества, участвующего в событии доказывания, в истинность предполагаемого доказательства. *Значение флюенты* меняется с течением времени, в зависимости от значений отдельных событий доказывания; она равна значению события доказывания в момент времени *t*.

Семантика событий доказывания

Какова семантика событий доказывания? Мы утверждаем, что интуиции доказывающего агента следуют логике, которая может быть выражена в терминах *исчисления задач* Колмогорова [Kolmogorov, 1932]:

- Доказывание интуиции «A & B» означает, доказывание интуиции A и доказывание интуиции B.
- Доказывание интуиции «A или B» означает доказывание интуиции A или доказывание интуиции B.
- Доказывание интуиции «A следует B» означает «сведение» интуиции B к интуиции A (или (умственное) преобразование интуиции A в интуицию B).
- Доказывание интуиции «не A» означает «провал» интуиции A, т. е. интуиция A влечет за собой нелепости.
- Доказывание интуиции «для всех x, A(x)» означает доказывание интуиции A для любого (произвольного) объекта из области пробега x.
- Доказывание интуиции «существует x, A(x)» означает доказывание интуиции A для указанного объекта с из области пробега x.

Тем самым, понятие доказывания или решения задачи, по Колмогорову, аналогично понятию доказательства как *«выполнения интуиций»* <*fulfillment of intentions*> известного историка математики Оскара Беккера или понятию доказательства как *«реализации ожиданий»* <*realizations of expectations*> современного философа математики Ричарда Л. Тиесцена [Tieszen, 1992, 2000 1989].

События доказывания и история математики

Таким образом, математические доказательства имеют историю. Их история представима через последовательности событий доказывания (флюенты). Историки математики изучают прошлые математические теоремы и способы получения их доказательства (с помощью понятий, определений, методов, известных в каждое эпохе), а также как математические теории и теоремы прошлого были восприняты современниками их авторов, и какое воздействие они оказали на последующем развитии математики. Иными словами, они по существу изучают события доказывания и последовательности таких событий. Эти последовательности событий доказывания относятся к определенной проблеме и к применяемым различным подходам для ее решения.

Представление предмета истории математике как изучения последовательностей событий доказывания дает нам возможность заново подойти к вопросу развития в истории математики и, в частности к вопросу характера изменений в развитии математики. *Изменение* в развитии математики может быть определено как упорядоченная пара событий доказывания.

Далее, можно определить понятие *траектории* в пространстве событий доказывания, которое выражает продвижение состояния события доказывания, вызванное некоторым действием, как функции времени. Тогда, вопрос об изменении математического знания может быть рассмотрен в терминах понятий непрерывности и разрывности траектории.

Интуитивно говоря, непрерывное изменение понимается как точка поворота или как «гладкое» преобразование. Во время непрерывного изменения, утвержденные исходы событий доказывания, которые верны во время t_1, продолжают быть верными в последующее время t_2 (но не обязательно наоборот). Напротив, скачкообразное изменение представляет собой резкое изменение или скачок. Исходы событий доказывания, которые верны во время t_1, перестают быть верными в последующее время t_2. Иными словами, непрерывное изменение является преобразованием сохраняющее истинность, тогда как в скачкообразном изменении, истинность не всегда сохраняется (или сохраняется для некоторого модифицированного аналога исходной проблемы). Например, теорема Гейне-Бореля верна в классической математике. Однако, в интуиционистской математике верна модифицированный аналог этой теоремы, сформулированный в терминах интуиционистского понятия «точечных видов» <pointspecies>, а в конструктивной математике школы Маркова эта теорема вовсе не верна.

Библиографический список

1. *Bazhanov, V. A.* Mathematical Proof as a Form of Appeal to a Scientific Community [Текст] / V. A. Bazhanov, / Russian Studies in Philosophy, vol. 50, no. 4 (Spring 2012), 2011. –P. 52–72.
2. *Goguen, J. A.* An introduction to algebraic semiotics, with applications to user interface design [Текст] / J. A. Goguen / Nehaniv, C. (ed.), Computation for Metaphors, Analogy and Agents. Springer. 1999. –P. 242-291.
3. *Goguen, J. A.* What is a proof [Текст] / J. A. Goguen / 2001.
4. *Goguen, J. A.* Semiotic morphisms, representations, and blending for interface design [Текст] / J. A. Goguen / Proceedings, AMAST Workshop on Algebraic Methods in Language Processing. AMAST Press. 1–15. Conference held in Verona, Italy,. - August. - 2003. – P. 25-27
5. *Kolmogorov, A. N.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik [Текст] / A. N. Kolmogorov / Mathematische Zeitschrift 35, 1932 . – P. 58–65.
6. *Kowalski, R., Sergot M.* A Logic-Based Calculus of Events [Текст] / R. Kowalski, M. Sergot / New Generation Computing.- **4**.- 1986. – P. 67–95.
7. *Mac Lane, S.* Despite Physicists, Proof Is Essential In Mathematics [Текст] / S. Mac Lane / Synthese **111**, 1997 . – P. 147–154.
8. *Miller, R.* The event-calculus in classical logic — alternative axiomatizations [Текст] / R. Miller, M. Shanahan / Electronic Transactions on Artificial Intelligence **3**(1), 1999. – P. 77-105.
9. *Перминов, В.Я.* Философия и основания математики [Текст] / В.Я. Перминов / М.: Прогресс-Традиция. - 2001. - С. 30-31.
10. *Stefaneas, P.* Proofs as spatio-temporal processes, P. Edouard Bour, G. Heinzmann, W. Hodges and P. Schroeder-Heister (Eds) “Proceedings of the 14th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science [Текст] / P. Stefaneas, I.M. Vandoulakis / Philosophia Scientiae 19(1), March 2015.

11. *Stefaneas, P.* The Web as a Tool for Proving. Metaphilosophy [Текст] / P. Stefaneas, I. Vandoulakis / Special Issue: Philoweb: Toward a Philosophy of the Web: Guest Editors: Harry Halpin and Alexandre Monnin. Volume 43, Issue 4, 2012. – P. 480–498.
12. *Tieszen, R. L.* Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge, [Текст] / R. L. Tieszen / Dordrecht: Kluwer. -1989.
13. *Tieszen, R. L.* What is a Proof? Detlefsen, M. (ed.) Proof, Logic and Formalization [Текст] / R. L. Tieszen / London: Routledge, 1992. – P. 57–76.
14. *Tieszen, R. L.* Intuitionism, Meaning Theory and Cognition [Текст] / R. L. Tieszen / History and Philosophy of Logic **21**.- 2000. - 179–194.
15. *Tieszen, R. L.* Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics [Текст] / R. L. Tieszen / Cambridge: Cambridge University Press. - 2005.

Содержание математической подготовки бакалавра политологии: опыт МГГУ им. М. А. Шолохова

Д.А.Власов, А.В. Синчуков

Теория построения содержания образования за период своего существования прошла ряд этапов развития и получила широкое освещение в большом числе работ и ряде монографий [**5, 11**]. В связи с реализацией ФГОС ВПО и Концепции современного гуманитарного образования [**8**] в настоящее время ее развитие продолжает быть востребовано. В частности, одним из аспектов содержания современного образования, который необходимо тщательно исследовать по причине востребованности и инструментальности математических методов и моделей в большинстве областей человеческой деятельности, является *прикладная математическая составляющая содержания образования* [**1, 2**].

Решая задачи, связанные с анализом и упорядочением обширного эмпирического материала, предоставленного педагогической практикой мы пришли к *необходимости проектирования содержания математической подготовки политолога* и специального *изучения структуры содержания математической подготовки политолога* с точки зрения описания динамики развития его профессиональной компетентности.

Во-первых, на основе реальной практики учебного процесса в МГГУ им. М.А.Шолохова мы предполагаем, что структуру содержания математической подготовки политолога можно охарактеризовать, используя понятие *графа типа «дерево»*. Отметим, что дерево является связным ациклическим графом. Другими словами граф типа «дерево» можно определить как частный случай графа, а именно, связным графом без циклов. Этот яркий и относительно простой для восприятия геометрический образ предоставляет возможность обратиться к понятийному аппарату и качественным закономерностям синергетики – современной междисциплинарной науки, которую в последнее время все чаще используют при описании сложных систем [**11**].

Во-вторых, относительный примитивизм и простота представления содержания образования в виде графа дерева, требует современного переосмысления такого установившегося термина дидактики, как *«содержательно – методическая линия»* и, возможно, рассматривать объекты, обозначаемые этим термином как более сложные, наделенные внутренней структурой и взаимодействующие между собой. Последнее естественным образом включает в качестве структурного элемента содержания межпредметные интегративные связи и позволяет на языке геометрических образов проникнуться известной проблемой согласования и синхронизации элементов содержания образования.

В-третьих, *теория фундирования* - теоретической основы для спиралевидной схемы развертывания и моделирования базовых учебных элементов в направлении их творческого обобщения в системе математической подготовки студентов. [**10**] Условием реализацией этой теории в МГГУ им. М.А.Шолохова стало использование *технологического подхода при* *проектировании содержания математической подготовки политолога.* Необходимо отметить, что его поэтапная реализация носит обоснованный характер и не является стремлением примкнуть к волне интереса к технологизации. Об этом говорят принципы, сформулированные В.М.Монаховым в монографии «Введение в теорию педагогических технологий» [7], в которой широко представлены условия, процедуры и возможности применения технологического подхода к проектированию педагогических объектов (включая методические системы обучения, компонентом которых является содержание обучения).

Внимание к математической подготовке будущих политологов обусловлено следующими причинами. В современных гуманитарных науках, в том числе и в политической науке все большую роль играют *количественные методы исследования*. Интересно отметить, что по использованию математики (математических моделей и методов) ведущие политологические школы среди общественных наук уступают только экономике. Подавляющее большинство зарубежных публикаций по политологии включает в себя результаты количественных исследований.

Опишем далее возможности, которые предоставляем использование математики в политологии. Уточнение этих возможностей стало необходимым условием построения содержания математической подготовки бакалавра политологии в МГГУ им. М.А.Шолохова.

Рис. 1. Принципиальные возможности использования математики в политологии

Рассматривая *возможности использования математики в политологии, отметим следующие два обстоятельства.*

Во-первых, *массив количественных данных о политике* к настоящему времени столь велик, что без использования математических методов и IT обрабатывать его невозможно. **Количественный анализ эмпирических данных в современной политологии, являясь основным способом проверки исследовательских гипотез, стал обязательным компонентом математической подготовки политолога в МГГУ им. М.А.Шолохова.** Во-вторых, *моделирование в политической науке есть практически единственный способ постановки научного эксперимента*. Зачастую получаемые выводы нетривиальны, не очевидны на уровне общих соображений и не могут быть получены никаким другим – «нематематическим» путем. **Освоение математических моделей и методов – стало одной из важнейших составляющих в подготовке современного политолога в МГГУ им.**

М.А.Шолохова. Особое значение эта составляющая приобретает в контексте научно-исследовательской работы студентов. В рамках данной статьи представим фрагмент нового содержания математической подготовки политолога (рис. 2), включающий наиболее актуальные и методически целесообразные учебные темы «Процесс исследования», «Шкалирование», «Описание данных», «Одномерная статистика», «Двумерная статистика», «Математическое моделирование».

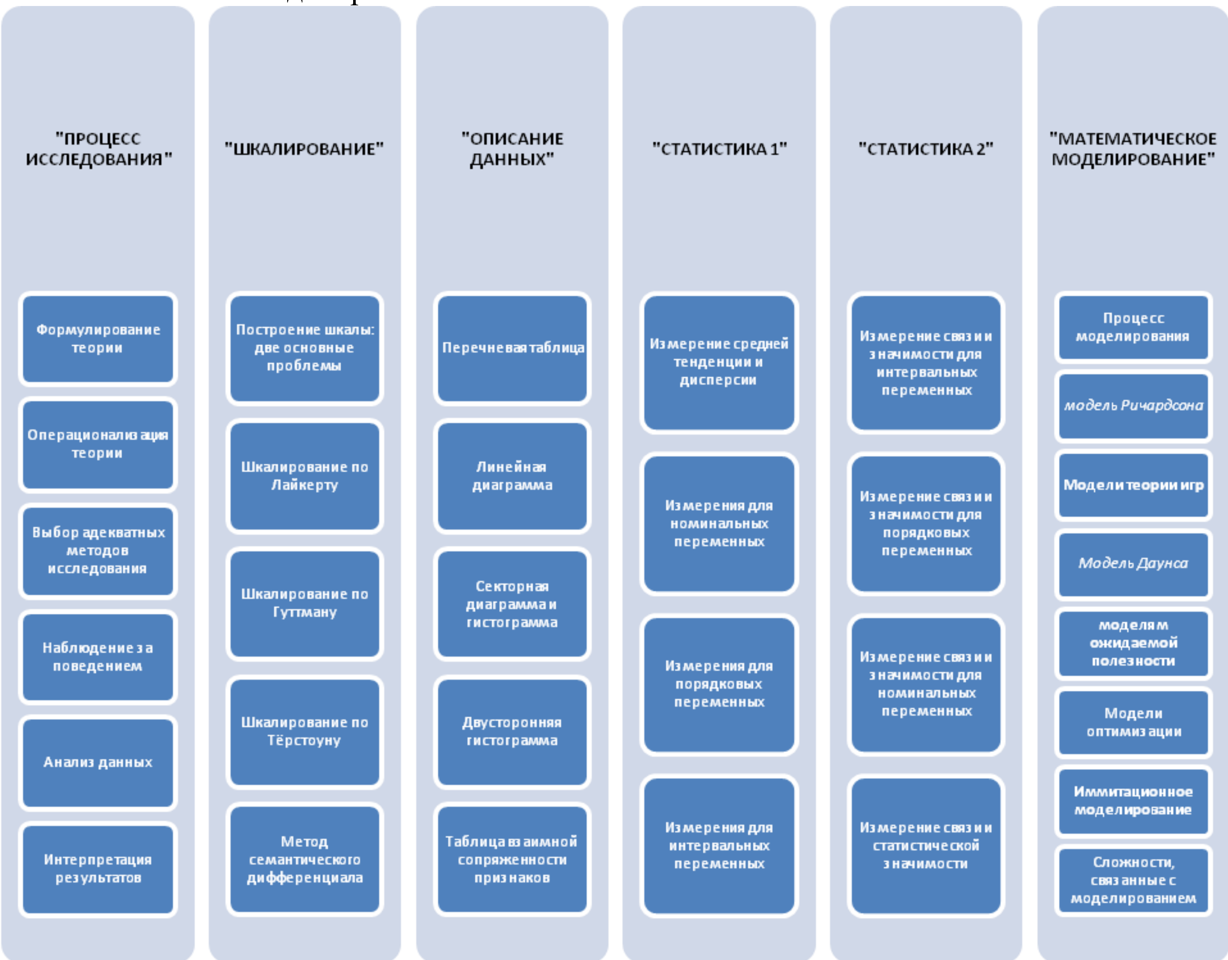


Рис. 2. Фрагмент нового содержания математической подготовки политолога.

В заключении статьи остановимся на **трех сложностях, связанных с моделированием в области политологии, которые преодолеваются в рамках созданной и реализованной методической системы математической подготовки политолога.** Её реализация в МГГУ им. М.А.Шолохова позволяет разорвать сложившийся к настоящему времени *«порочный круг»*: действующие политологи (как и большинство представителей других гуманитарных профессий) не применяют математические методы из-за недостаточной математической культуры, а студенты не проявляют достаточной активности в формировании своей математической подготовки, полагая, что она им в жизни и в будущей профессиональной деятельности не понадобится.

Как и к большинству инструментов, к использованию математических моделей следует подходить с определенной осторожностью. *Модель не может быть лучше заложенных в нее исходных допущений.* В частности, и рассуждение, которое, будучи выражено на естественном языке, не имеет смысла, не станет более осмысленным, если его перевести в математическую форму. Всегда важно помнить, что математика эффективна только как средство *получения логических выводов из исходных допущений*, а отсюда и адекватность модели зависит не от математического аппарата, а от этих самых допущений. Бывают случаи, когда для успешного применения той или иной мощной методики необходимо упростить исходные допущения, но даже подобное упрощение должно проходить проверку практикой и здравым смыслом. Если модель основана на ложных исходных допущениях, то это не значит, что и выводы ее будут ложными, но значит, что адекватность этих выводов никоим образом не может быть отнесена на счет исходных допущений.

Модель обязательно должна проходить экспериментальную проверку, если только она не задана исчерпывающим образом с помощью своих исходных допущений. В большинстве случаев в модель входят параметры, подлежащие внешней оценке, или исходные допущения о действительности, подлежащие верификации. Здесь мы видим еще один способ проверки исходных допущений на адекватность: если модель, будучи корректной, с логической точки зрения, дает ложные результаты, то из этого следует, что ложны, должно быть, ее исходные допущения.

Наконец, выданные моделью *результаты должны быть правильно переведены на естественный язык*. Обычная ошибка при моделировании состоит в том, что исследователь начинает «в лоб» трактовать результаты, полученные от достаточно узкой модели, тем самым переоценивая общность ее выводов.

Библиографичечский список

1. *Власов, Д.А.* Новое содержание прикладной математической подготовки бакалавра. [Текст] / Д.А.Власов, А.В. Синчуков / Преподаватель XXI век. Т. 1. № 1. 2013. - С. 71-79.
2. *Власов, Д.А.* Стратегия развитии методической системы математической подготовки бакалавров. [Текст] / Д.А.Власов, А.В. Синчуков / Наука и школа. Т. 5. № 5. 2012. - С. 61-65.
3. *Власов, Д.А.* Математическое моделирование: базовый курс [Текст] / Д.А. Власов, А.В. Синчуков, Г.А. Качалова / Учебное пособие. М.: Типография «11 Формат», 2013 – 65 с.
4. *Власов Д.А.* Количественные методы и математическое моделирование [Текст] / Д.А. Власов, А.В. Синчуков, Д.Н. Монахов, Г.А. Качалова / М.: Типография «11 Формат», 2013 – 80 с.
5. *Леднев, В.С.* Содержание образования: сущность, структура, перспективы [Текст] / В.С. Леднев / – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
6. *Мангейм, Дж. Б., Рич, Р. К.* Политология. Методы исследования: Пер. с англ. / Предисл. А.К. Соколова. [Текст] / *Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич* / – М.: Издательство «Весь Мир», 1997. – 544 с.
7. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий [Текст] / В.М. Монахов / – Волгоград: Перемена. - 2006. - 316 с.
8. *Нечаев, В.Д.* О концепции современного гуманитарного образования [Текст] / В.Д. Нечаев, А.А. Вербицкий / Высшее образование в России. - № 3. – 2011. - С. 14-22.
9. *Пантина, И.В.* Вычислительная математика [Текст] / И.В. Пантина, А.В. Синчуков / Учебник. М.: МФПУ «Синергия», 2012. – 176 с.
10. *Смирнов, Е.И.* Фундирование в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] / Е.И. Смирнов / Монография. Ярославль: Изд-во «Канцлер».- 2012. – 646 с.
11. *Тестов, В.А.* Обновление содержания обучения математике: исторические и методические аспекты [Текст] / В.А. Тестов / Монография. Вологда: ВГПУ, 2012. – 176 с.

Интерактивные формы обучения истории математики в педагогическом вузе

М.Ф. Гильмуллин, А.Л. Жохов

Профессионально-педагогическую направленность подготовки будущих учителей математики в процессе изучения любого вузовского предмета в настоящее время следует связывать с процессом перехода к новым ФГОС. По этим стандартам одним из требований к предметным результатам освоения базового курса математики в школе является формирование представлений о математике как части мировой культуры. В процессе обучения математике (как гуманитарному предмету) должны быть вскрыты социальные, культурные и исторические факторы становления математической науки [4, С.14].

Поэтому учителя математики должны быть подготовлены к осуществлению культурно-исторического подхода к обучению математике в школе. Для реализации целей общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся в содержание математического образования в школе теперь включен дополнительный методологический раздел «Математика в историческом развитии» [3, С.16]. Все математическое образование происходит в «культурно-исторической среде обучения» (этот термин введен в программу).

Этот культурно-исторический фон проявляется и в учебно-методических комплектах для основной школы, составленных в соответствии со стандартами. Теперь историзмы вплетаются в учебный текст по ходу изложения основного содержания. Они либо являются органической частью объяснительного текста, либо становятся содержательной базой для упражнений. Такой подход формирует также мотивацию изучения темы.

Проблема использования элементов истории математики в обучении не нова. В настоящее время эта проблема рассматривается в другом ракурсе в связи с требованиями нового стандарта, деятельностном подходе к обучению математике. Усвоение историко-математического материала будет решать многие вопросы достижения результатов изучения предмета и развития обучающихся, причем не только предметных, но и метапредметных, а также личностных. Например, одним из объектов оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий (УУД), заключающейся в определении гражданской идентичности личности. История отечественной математики представляет материал именно этой тематики. Основной процедурой оценки достижения метапредметных результатов является защита итогового индивидуального проекта. В историко-математических проектах содержатся многие объекты их оценки: способность к освоению систематических знаний, их самостоятельному пополнению; способность к решению личностно и социально значимых проблем; способность к самоорганизации и рефлексии и др. На историко-математическом материале можно организовать оценку сформированности почти всех видов УУД (личностных, регулятивных, познавательных, коммуникативных), а также специально-предметных (математических) действий. Можно назвать некоторые из них конкретно: целеполагание, планирование, контроль, коррекция, оценка, поиск необходимой информации, рефлексия, анализ, синтез, установление причинно-следственных связей, выдвижение гипотез и их обоснование и др.

Учитывая тот факт, что системно-деятельностный подход к обучению становится методологической основой нового стандарта, будущих учителей следует подготовить к организации активной учебно-познавательной деятельности обучающихся. Естественно, эта подготовка должна, в первую очередь, идти в рамках предметов математико-методического блока, к которым мы относим и историю математики [2]. Направленность подготовки согласуется и с перечнем компетенций учителя математики, заложенных в программу обучения истории математики. Перечислим некоторые из них: владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, постановке цели; готовность к уважительному отношению к историческому наследию и культурным традициям;

способность разрабатывать и реализовывать, с учетом отечественного и зарубежного опыта, культурно-просветительские программы и др.

Особым требованием к современной системе вузовского образования является развитие интерактивных форм обучения. Интерактивное обучение предполагает: взаимодействие всех обучающихся, включая преподавателя; смещение акцента с деятельности преподавателя на деятельность студента, при этом преподаватель выступает в роли организатора и координатора процесса обучения; новое знание и компетенции формируются на основе взаимодействия обучающихся, которые систематизируют коллективный опыт всех учащихся в процессе учебно-профессиональной деятельности.

Ведущими признаками интерактивного обучения являются:

диалогичность общения педагога и учащихся, которая предполагает их умение слушать и слышать друг друга (более общее понятие – взаимопроникновение культур обучающего и обучаемого);

усиление самостоятельной познавательной деятельности учащихся;

смысловое творчество, создание учащимися и педагогом новых для себя смыслов (новых произведений культур) по изучаемой проблеме;

рефлексия – самоанализ, самооценка участниками своей деятельности и взаимодействия с другими субъектами процесса обучения.

Рассмотрим интерактивные и активные формы обучения истории математики, которыми мы пользуемся для формирования у студентов профессионально ориентированных качеств, направленных на создание культурно-исторической среды обучения математике в школе.

Во-первых, создана среда обучения истории математики, позволяющая студентам найти и анализировать почти любую историко-математическую и историко-методическую информацию. Сюда мы относим как историко-математическую библиотеку и библиографическую базу данных, так и электронные образовательные ресурсы (ЭОР). Например, в распоряжении студентов имеется учебное пособие «История математики» [1], а также различные варианты курсов лекций по предмету в электронном формате. В принципе, на лекционных занятиях студентам нет необходимости записывать всю предлагаемую информацию, а только выборочно, на которую обращается особое внимание (преподавателем или студентами). Тем более, преподавателю нужно научить студентов, как ориентироваться в огромном историко-математическом пространстве. В этом заключается одно из требований к современному преподавателю – роль модератора в процессе обучения. С другой стороны, полный курс лекций в руках студентов позволяет использовать различные интерактивные формы обучения, как на лекциях, так и на семинарских занятиях.

Например, так организовывалась **лекция-модерация** в форме фронтальной работы по теме «Арифметика пифагорейцев». Модерация (от лат. moderor – «смягчаю», «сдерживаю», «умеряю») – это метод получения нового знания в режиме «здесь и сейчас» с помощью визуализации информации. Метод предполагает, что преподаватель, имеющий четкое представление о том, какие знания должны быть получены в итоге, управляет процессом самостоятельного поиска знания обучающимися. Преподаватель здесь выполняет две функции: с одной стороны, он является носителем модели знания, с другой стороны, он – равноправный участник реализации проекта моделирования. Модератор влияет на принятие группового решения, направляет группу при помощи вопросов, предложения своих вариантов решения, эмоционального воздействия. Он оформляет результаты работы аудитории в заранее продуманной визуальной форме.

Студенты самостоятельно заранее изучают содержание материала темы «Арифметика пифагорейцев». Вообще, организация интерактивной фронтальной работы базируется на самостоятельном ознакомлении студентов с лекционным материалом через любые доступные образовательные ресурсы или учебно-методические материалы. На интерактивной лекции в процессе работы над темой они вовлекаются в обсуждение следующих вопросов:

1) В чем заключается смысл девиза пифагорейцев «Все есть число»?

2) Какие классы чисел изучались пифагорейцами? Дайте их определения, приведите примеры.

3) Какие проблемы современной теории чисел связаны с пифагорейской арифметикой?

Визуализация информации выполняется следующим образом. Студенты получают разноцветные стикеры (наклейки, используемые для размещения информации), на которых записывают маркерами ту информацию, которая касается обсуждаемой темы. Затем эта информация озвучивается, стикеры клеятся на отведенные места на специальной доске. Студенты записывают при необходимости полученные существенные характеристики обсуждаемого вопроса, или фотографируют. Таким образом, создаётся представление об арифметике пифагорейцев.

В качестве другого примера рассмотрим **лекцию-фасилитацию** в форме групповой работы на тему «Классические задачи древности». Фасилитация (от англ. facilitate – «облегчать», «способствовать», «помогать») – это метод обучения, в основе которого лежит самостоятельная выработка студентами нового знания в процессе групповой работы в режиме «здесь и сейчас». При использовании метода фасилитации преподаватель выполняет организационную и мотивационно-целевую функцию, стимулирует деятельность аудитории с помощью вопросов, не вмешиваясь в содержательные аспекты обсуждения. Он не влияет на принятие группового решения. Фасилитатор озвучивает и фиксирует вопросы и ответы от аудитории. В принципе, фасилитатор может не знать предметную область обсуждения.

Результатом фасилитации по теме «Классические задачи древности» ожидается, что студенты в группах в процессе самостоятельного обсуждения создадут продукт, который в совокупности ответов является историей постановки и решения задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга. Возможно, при этом они коснутся темы «Луночки Гиппократа», задач построения правильных многоугольников.

Визуализация полученной информации может быть оформлена в форме **«Карты ума»**, представляющей, по мнению студентов, историко-математическую среду классических задач древности. «Карта ума» – это техника для стимулирования пошагового мышления и структурирования информации в визуальной форме. Берется большой белый лист бумаги. В центре рисуется центральный цветной образ, например, силуэт карты Греции, который подписывается «Классические задачи древности». От центрального образа рисуются ветки первого уровня, на ветках пишутся слова, определяющие ключевые понятия: «Удвоение куба», «Трисекция угла», «Квадратура круга». От веток первого уровня при необходимости отходят ветки второго уровня, раскрывающие идеи, написанные на ветках первого уровня. При необходимости рисуются стрелки, соединяющие понятия на разных ветках и обозначающие существующие отношения между ними (например, Пьер Ванцель доказал, что кубические уравнения, к которым сводятся задачи удвоения куба и трисекции угля, неразрешимы в квадратных радикалах).

Работа в малых группах – это одна из самых распространенных интерактивных форм, так как она дает всем учащимся возможность участвовать в работе, практиковать навыки коммуникативных действий, в частности, умение активно слушать, вырабатывать общее мнение, разрешать возникающие разногласия.

Такая форма работы лучше организовывать на семинарских занятиях. В качестве примера можно привести подготовку и совместную презентацию фрагмента урока с историко-математическим наполнением, работа над сценарием историко-математического внеклассного мероприятия. На семинаре по истории геометрии возможно организовать работу в малых группах по решению исторических задач. При такой учебной деятельности всегда требуется дать инструкцию для групповой работы, озвучить время для работы.

Мини-лекция является одной из эффективных форм преподнесения теоретического материала. Перед ее началом можно провести мозговой штурм или ролевую игру, связанную с предстоящей темой, что поможет актуализировать ее для участников. Фактически это приводит формулировке целей и задач некоторой ключевой идеи. Потом раскрытие содержания этой ключевой идеи выполняется в форме мини-лекции. Перед тем, как перейти к следующей ключевой идеи (вопросу, теме), необходимо подытожить предыдущую идею.

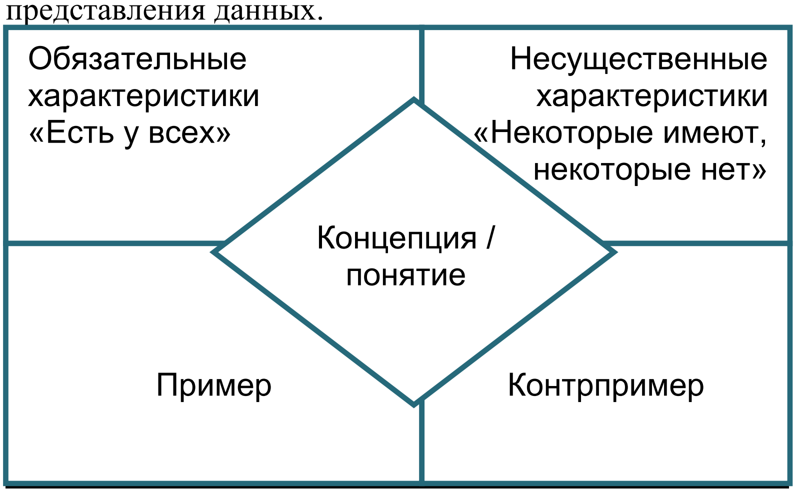
Примером организации занятия в форме цепочки мини-лекций является лекция по теме «Периоды развития математики». По этой теме можно организовать четыре мини-лекции, соответствующие четырем периодам развития математики по периодизации А.Н. Колмогорова: 1. Зарождение математики. 2. Период элементарной математики. 3. Период создания математики переменных величин. 4. Период современной математики.

«Мозговой штурм», «мозговая атака»– это метод, при котором принимается любой ответ учащихся на заданный вопрос. Важно не давать оценку высказываемым точкам зрения сразу, а принимать все и записывать мнение каждого на доске или листе бумаги. «Мозговой штурм» применяется, когда нужно выяснить информированность или отношение участников к определенному вопросу. Можно применять эту форму работы для обратной связи.

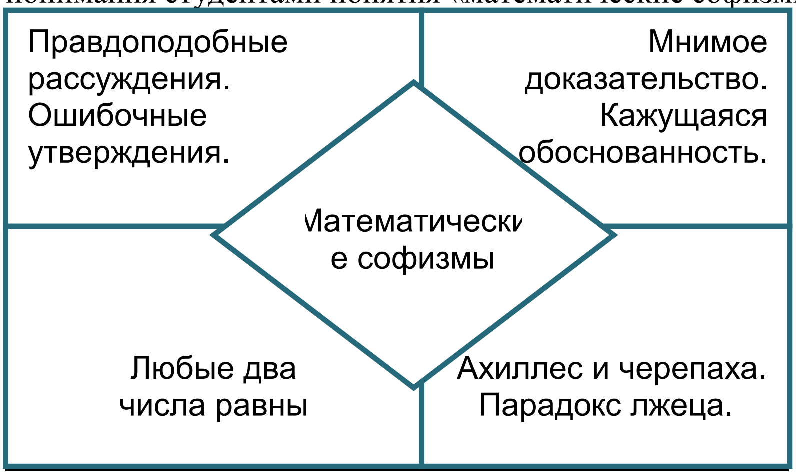
Алгоритм проведения «мозгового штурма»:

1. Задать участникам определенную тему или вопрос для обсуждения.
2. Предложить высказать свои мысли по этому поводу.
3. Записывать все прозвучавшие высказывания.
4. Перечислить все, что записано вами со слов участников.
5. Завершить работу, спросив участников, какие, по их мнению, выводы можно сделать из получившихся результатов и как это может быть связано с обсуждаемой темой.

После завершения «мозговой атаки» (которая не должна занимать много времени), необходимо обсудить все варианты ответов, выбрать главные и второстепенные признаки и характеристики понятия. Можно использовать при этом, например, матричную форму представления данных.



Рассмотрим, например, продукт «мозгового штурма», проведенного для выяснения понимания студентами понятия «математические софизмы».



Таким образом, использование интерактивных форм обучения истории математики готовит будущих учителей к работе в условиях новых ФГОС и вооружает их методами формирования всех видов универсальных учебных действий в культурно-исторической среде обучения математике в школе.

Библиографический список

1. *Гильмуллин, М.Ф.* История математики: учебное пособие [Текст] / М.Ф. Гильмуллин / – Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009.– 212 с.
2. *Жохов, А.Л.* Познание математики и основы научного мировоззрения: мировоззренчески направленное обучение математике: учебное пособие [Текст] / А.Л. Жохов / – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – 183 с.
3. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5-9 классы [Текст] – М.: Просвещение, 2011. – 64 с.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст] – М.: Просвещение, 2011. – 48с.

Игры хаоса

В.А. Ивков

В последнее время все большее внимание уделяется исследованию хаотических явлений и процессов, в частности диссипативным системам и турбулентности. Одной из наиболее значимых работ в этом направлении является монография [4]. Здесь исследуются подходы к определению хаоса, развитие теорий турбулентности, различные проявления хаоса в динамических системах. Определение хаоса через свойства существенной зависимости от начальных условий и сложности траекторий динамической системы было рассмотрено ранее в [2]. В [4] проведены численные эксперименты по моделированию турбулентных структур на примере экономической динамики, водной поверхности, реакции Белоусова и др. При некоторых условиях поведение моделируемых систем приводит к возникновению хаоса в полном соответствии со сценарием Фейгенбаума. В результате траектории развития систем образовывают хаотические аттракторы, имеющие некоторое отношение к фрактальным структурам.

Отличительной характеристикой хаоса является то, что структуры, наблюдаемые в целом, бесконечно повторяют себя в меньших или больших масштабах. Это свойство называется самоподобием и является одной из основных черт фрактальных структур. Таким образом, хаос и фракталы являются связанными объектами, и, следовательно, хаотические явления необходимо рассматривать не только в рамках теории хаоса, но и изучать методами фрактальной геометрии (см. [6], [7]).

Аналитически сценарий перехода к хаосу исследован в [5, с.121-133], но, как доказывают авторы исследования [8], в данном случае необходима реализация принципа наглядности. В соответствии с этим принципом рассмотрим связь хаоса и фрактала на примере построения салфетки (треугольника) Серпинского. Салфетка Серпинского относится к регулярным фракталам, т.е. имеющим строго определенный алгоритм построения. Он заключается в следующем: берем равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Затем из него вырезаем центральный треугольник, построенный на средних линиях данного треугольника. Получаем три меньших треугольника. В каждом из них также вырезаем центральный равносторонний треугольник и т.д. В результате получаем фигуру, образующую бесконечное число изолированных точек внутри начального треугольника.

Построим исследуемую фигуру с помощью системы программирования Visual Basic. Для реализации алгоритма используем систему итерируемых функций (СИФ), которая подробно описана в [3].

Алгоритм, записанный на языке Basic:

```
Private Sub CmdCIF_Click()
  PctFrac.Scale (0, 1)-(1, 0)
  x1 = 0: y1 = 0
  x2 = 1/2: y2 = Sqr(3)/2
  x3 = 1: y3 = 0
  d = CInt(Txtd.Text)
  Call sif(x1, y1, x2, y2, x3, y3, d)
End Sub
```

В данной процедуре, вызываемой по нажатию кнопки CmdCIF устанавливаем масштаб объекта PictureBox (PctFrac) как единичный квадрат и задаем координаты вершин базового треугольника: (0; 0), $(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$, (1; 0). Затем вызываем собственно итерационную процедуру построения фрактала.

```
Private Sub sif(x1, y1, x2, y2, x3, y3, d)
  If x2 - x1 > 1 / d Then
    PctFrac.Line (x1, y1)-(x2, y2) ' Рисование треугольника
    PctFrac.Line (x2, y2)-(x3, y3)
    PctFrac.Line (x3, y3)-(x1, y1)
    x11 = (x1 + x2) / 2: y11 = (y1 + y2) / 2
    x12 = (x2 + x3) / 2: y12 = (y2 + y3) / 2
    X13 = (x1 + x3) / 2: y13 = (y1 + y3) / 2
    Call sif(x1, y1, x11, y11, x13, y13, d)
    Call sif(x11, y11, x2, y2, x12, y12, d)
    Call sif(x13, y13, x12, y12, x3, y3, d)
  End If
End Sub
```

Вызываемая процедура рисует треугольник в окне PctFrac, вычисляет координаты вершин новых треугольников и рекурсивно вызывает себя для построения трех новых треугольников. В результате получаем (см. рис.1).

М. Барнсли из Джорджийского технологического института предложил следующую игру, назвав ее игрой в хаос (см. [1, с.37]). Внутри равностороннего треугольника выбираем произвольным образом точку. Случайным образом выбираем вершину данного треугольника (возможно с использованием генератора случайных чисел). Находим точку, находящуюся на середине отрезка между выбранной точкой и случайной вершиной. Затем снова выбираем случайным образом вершину и находим середину отрезка между новой точкой и выбранной вершиной и т.д. Самое интересное заключается в том, что при большом количестве точек мы получаем структуру, аналогичную салфетке Серпинского (см. рис.2).

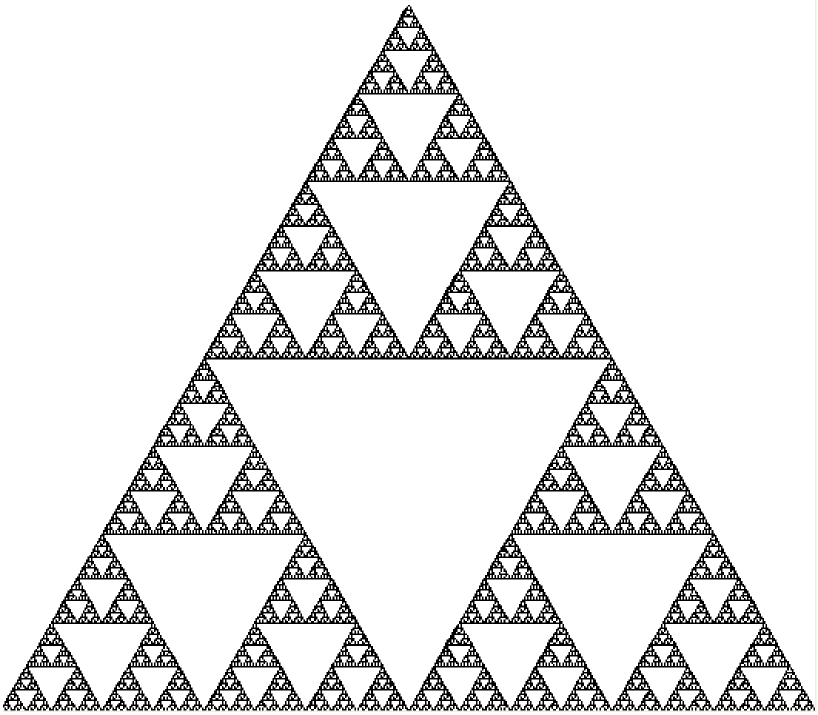


Рис.1. Салфетка Серпинского при построении с помощью СИФ

Фрагмент программы, реализующий игру в хаос:

```
Private Sub CmdB_Click()
  Dim x0, y0, xn, yn As Single, n As Long, sl As Byte, i As Long
  If TxtX.Text = "" Then MsgBox "Введите значение x", vbCritical: Exit Sub
  If TxtY.Text = "" Then MsgBox "Введите значение y", vbCritical: Exit Sub
  If TxtN.Text = "" Then MsgBox "Введите число итераций", vbCritical: Exit Sub
  n = CLng(TxtN.Text)
  x0 = CSng(TxtX.Text)
  y0 = CSng(TxtY.Text)
  If (x0 < 0) Or (x0 <= 1 / 2) And (y0 > x0 * Sqr(3)) Or (x0 > 1 / 2) And (y0 > Sqr(3) - Sqr(3) * x0) Or (y0 < 0) Then
     MsgBox "Точка вне треугольника", vbCritical
     Exit Sub
  End If
  PctFrac.Circle (x0, y0), 0.01, vbRed
  Randomize -Timer
  For i = 1 To n
    PctFrac.PSet (x0, y0)
    sl = Int(Rnd * 3)
    Select Case sl         ‘ Выбор случайной вершины
     Case Is = 0
        xn = x0 / 2: yn = y0 / 2
      Case Is = 1
         xn = (x0 + 1 / 2) / 2: yn = (y0 + Sqr(3) / 2) / 2
      Case Is = 2
         xn = (x0 + 1) / 2: yn = y0 / 2
    End Select
   x0 = xn: y0 = yn
  Next i
```

End Sub

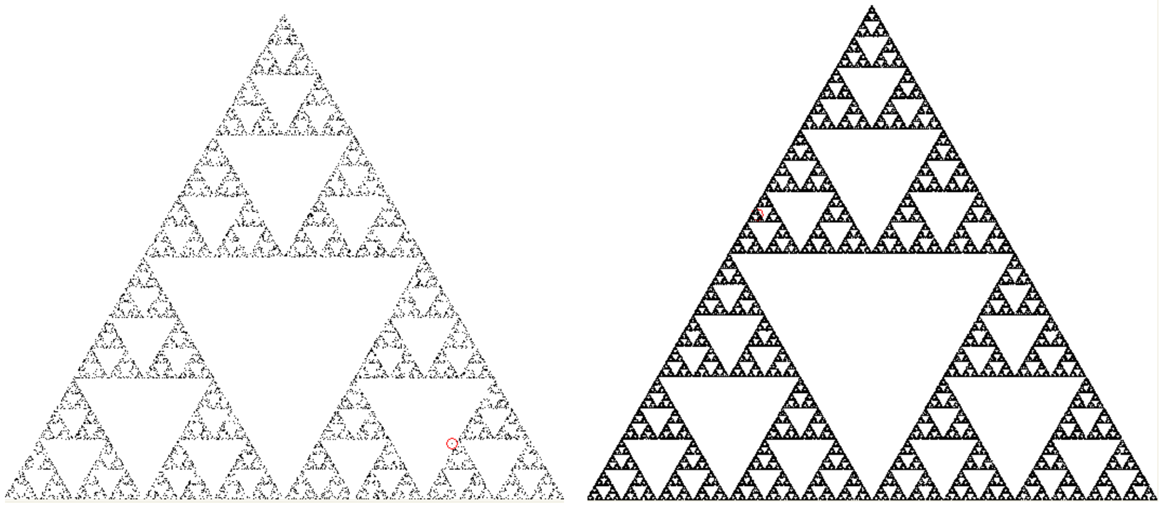


Рис.2. Игра в хаос. Результат при n=10000 (слева) и n=100000 (справа)

В программе вводим начальную точку внутри треугольника (x_0; y_0) и число итераций n. На рис. 2 слева начальная точка (0,8; 0,1) и число итераций n=10000, а справа – начальная точка (0,3; 0,8) и число итераций n=100000.

Легко заметить, что многократное повторение случайных точек приводит нас к определенному виду регулярного фрактала. Это происходит потому, что фрактал в данном случае является аттрактором некоторой динамической системы. Меняя правила выбора случайных точек, получаем новые регулярные фракталы. Так, достаточно легко построить ковер Серпинского, шестиугольник Серпинского или «дракон» Хартера-Хейтуэя (рис. 3).

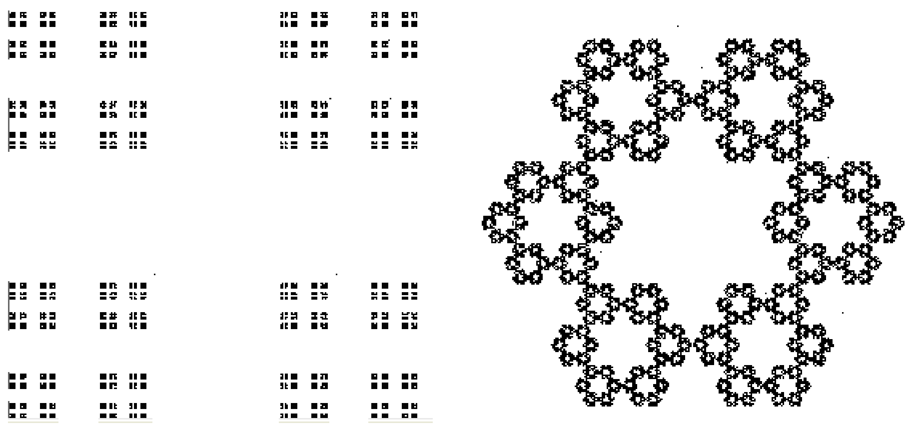


Рис.3. Ковер и шестиугольник Серпинского, полученные в случайном эксперименте

Таким образом, используя наглядное моделирование хаотического блуждания в общем-то случайной начальной точки, ограниченной только областью обитания (треугольник, квадрат, шестиугольник) и некоторым правилом (переход в сторону случайно выбранной вершины на пропорциональное расстояние), получаем аттрактор в виде известной фрактальной структуры.

Библиографический список

1. *Божокин, С. В.* Фракталы и мультифракталы [Текст] / С. В. Божокин, Д. А. Паршин /– Ижевск : «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
2. *Колесов, А. Ю.* К вопросу об определении хаоса [Текст] / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов / Успехи математических наук, т.64, вып.4(388), 2009 г., июль – август. – С.125-172.
3. *Кроновер, Р.* Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р. Кроновер /– М. : Техносфера, 2006. – 488 с.

4. *Мищенко, Е. Ф.* Многоликий хаос [Текст] / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий , А. Ю. Колесов , Н. Х. Розов / – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 432 с.
5. *Секованов, В. С.* Элементы теории фрактальных множеств. Учебное пособие [Текст] / В. С. Секованов / – Изд. 5-е, перераб. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 248 с.
6. *Секованов, В. С.* Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» [Текст] / В. С. Секованов, В. А. Ивков / Вестник Костромского государственного университета имени Н. А. Некрасова. –2013. – №5. – С. 155–157.
7. *Секованов, В. С.*, Ивков В. А. Проблемная лекция по теме «Хаотичные изображения» [Текст] / В. С. Секованов, В. А. Ивков / Труды XI международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль, Изд-во ЯГПУ, 2013. – С.137-139.
8. *Смирнов, Е. И.* Наглядное моделирование в обучении математике: Теория и практика. Учебное пособие [Текст] / Е. И. Смирнов, В. Н. Осташков , В. В. Богун / – Ярославль: Канцлер, 2010. – 498 с.

Особенности преподавания дифференциальной геометрии в отечественных педагогических институтах XX столетия

И.В. Игнатушина

В России до 1917 г. существовало 150 учительских семинарий, готовивших учителей начальных школ, 19 учительских институтов, выпускники которых имели право работать в городских училищах, и только два высших педагогических института для подготовки учителей средней школы. Поэтому после Октябрьской революции в стране, где развертывалась сеть школ, возникла острая потребность в педагогических кадрах.

Поначалу вся работа по преобразованию учительских институтов в высшие учебные заведения и по организации новых высших педагогических учебных заведений проводилась непосредственно на местах, стихийно и без учета местных возможностей. Но уже в середине 1919г. этот процесс взял под свой контроль Народный комиссариат просвещения РСФСР.

В августе 1919г. Второй Всероссийский съезд по просвещению вынес решение об организации сети единых высших педагогических учебных заведений – институтов народного образования. К концу 1920г. в РСФСР было уже 59 таких институтов, и в большинстве из них имелись математические и физические отделения. Учителей готовили также университеты, в которых были организованы педагогические факультеты с физико-математическими отделениями. Существовали также практические институты народного образования, которые в дальнейшем были реорганизованы в педагогические техникумы, затем в педучилища, в настоящее время – это педагогические колледжи.

В 20-е годы прошлого века в педагогических институтах широко применялся бригадно-лабораторный метод. Практика показала всю несостоятельность этого метода, и в 1932г. он был отменен.

В феврале 1924г. в Москве состоялась первая Всероссийская конференция по педагогическому образованию, на которой были определены направления и содержание подготовки учителей и принят примерный учебный план педагогического вуза. Следует отметить, что в этом плане очень мало внимания уделялось специальным научным дисциплинам – они занимали всего 38 % общего времени.

В 1927г. были утверждены новые учебные планы высших педагогических учебных заведений, в которых специальные предметы были представлены гораздо шире. Срок обучения на физико-математическом факультете увеличился до пяти лет.

Согласно этому плану, специальная математическая подготовка включала курс математического анализа, в котором излагались и вопросы дифференциальной геометрии. Так на физико-математическом отделении педагогического факультета Северо-Кавказского государственного университета дифференциальная геометрия изучалась на третьем курсе как раздел математического анализа. Этот факт отражен в сборнике программ педагогического факультета на 1927-28 учебный год [20]. В данном разделе освещалась теория кривых на плоскости и в пространстве, а также теория поверхностей в достаточно полном объеме. В заключение рассматривались проблемы построения географических карт. При этом использовались только средства математического анализа без привлечения векторного и тензорного исчислений. В качестве учебных пособий рекомендовалось использовать «Дифференциальную геометрию» Д.Ф. Егорова [10] и «Курс дифференциального и интегрального исчисления» К.А. Поссе [17].

В начале 30-х годов дифференциальную геометрию в Северо-Кавказском университете вел выпускник Киевского университета, профессор Владимир Петрович Вельмин (1885 – 1974), который сыграл большую роль в становлении ростовской математической школы. Лекции он читал искусно, с элементами историзма и глубокого анализа проблемы.

Растущая сеть средних и высших школ остро нуждалась в преподавателях-математиках. В связи с этим в 1932 г. повсеместно начинается организация физико-математических факультетов в педагогических институтах.

В 1934 г. были изданы первые программы по математическим дисциплинам для педагогических институтов. Согласно этой программе дифференциальная геометрия изучалась как раздел математического анализа. Помимо векторной алгебры и векторного анализа, с которыми студенты здесь знакомились впервые, в него входили, главным образом, вопросы, относящиеся к изучению плоских и пространственных кривых. Учение о поверхностях было представлено лишь одним пунктом, освещающим такие вопросы, как касательная плоскость и нормаль к поверхности, квадрат линейного элемента.

С середины 30-х годов начинают издаваться учебники по математике, специально предназначенные для студентов педагогических институтов. К таким учебным пособиям относится «Дифференциальная геометрия» (1936г.) [21] Сергея Павловича Финикова (1883–1964) – известного исследователя в этой области, профессора МГУ.

Научная общественность постоянно проявляла интерес к учебной деятельности в педагогических институтах. Так профессор МГУ Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959) в докладе 1939г. на заседании Московского математического общества, посвященном преподаванию математики в школе, предложил в педагогических институтах широко развивать сеть факультативных курсов, семинаров и кружков. Семинары, указывал он, играют важную роль в подготовке будущих учителей к творческой деятельности; специальные курсы позволяют студентам познакомиться с проблемами современной математики. Во многих педагогических высших учебных заведениях на семинарах и спецкурсах рассматривались вопросы дифференциальной геометрии.

В 1938г. дифференциальная геометрия в педагогических институтах становится уже самостоятельной дисциплиной. Она изучалась в четвертом или пятом семестре. 2 ноября 1938г. Всесоюзным Комитетом по делам высшей школы при СНК СССР была утверждена программа по дифференциальной геометрии, разработанная С.П. Финиковым специально для физико-математических факультетов педагогических институтов [22].

Согласно этой программе свойства кривых на плоскости изучались только методами математического анализа, векторное исчисление начинали применять при исследовании пространственных кривых и поверхностей. Рекомендовалось при изложении пространственных кривых принимать за параметр длину дуги, а изложение теории поверхностей вести в ортогональной системе координат. Все это позволяло выяснить геометрические свойства рассматриваемых образов, используя более простой аппарат формул.

Обязательным пунктом рассматриваемой учебной программы был исторический обзор дифференциальной геометрии. Он знакомил студентов с происхождением каждого из ее разделов, причинами их возникновения и особенностями развития, а также с деятельностью ученых, сыгравших важную роль в ее развитии. Это, с одной стороны, способствовало лучшему усвоению данной дисциплины, с другой стороны, позволяло продемонстрировать студентам на примере изучения дифференциальной геометрии эффективный методический прием использования элементов историзма в обучении математики.

На практических занятиях при решении задач студентов знакомили с кривыми и поверхностями, имеющими приложения в технике. Программа была обязательна по объему, но по усмотрению преподавателя отдельные ее вопросы могли быть изложены в измененном порядке. В качестве учебных пособий использовались курсы дифференциальной геометрии Финикова С.П. [21], Нордена А.П.[14], Бюшгенса С.С.[7], Рашевского П.К. [19] и задачники Милинского В.И.[11], Моденова П.С.[12], Гюнтера Н.М. и Кузьмина Р.О. [9].

Программа по дифференциальной геометрии С.П. Финикова с некоторыми изменениями и дополнениями использовалась в большинстве педагогических вузах вплоть до 60-х годов XX века. Наряду с ней разрабатывались и другие учебные программы по данной дисциплине. Так, в Московском областном педагогическом институте, основанном в 1931г., дифференциальную геометрию преподавали в соответствии с учебной программой [6], составленной в 1947г. заведующим кафедры геометрии, профессором Сергеем Владимировичем Бахваловым (1898–1963), который являлся учеником С.П. Финикова.

Отличительной особенностью этой учебной программы является то, что в ней исключен раздел о плоских кривых. Предлагалось вопросы учения о плоских кривых рассматривать как частные случаи учения о пространственных кривых (например, длина дуги, кривизна, понятие об особых точках и т.п.). Построение плоских кривых и анализ их формы по уравнениям производилось на основе прочитанного материала на практических занятиях. Такой подход позволял сэкономить 1/3 бюджета времени и перераспределить оставшиеся часы на более основательное изучение других разделов.

Особое внимание было уделено учению о поверхностях, как наиболее способствующему геометрическому развитию и эрудиции будущих учителей, в частности доступным вопросам о построении геометрии на поверхности. Для изложения материала использовалось векторное исчисление.

Расчет времени по основным разделам программы был следующим:

№	Название темы или раздела	Рекомен. число часов	Из них	
			лекции	практ. зан.
1.	Учение о кривых	30	21	9
2.	Учение о поверхностях	38	30	8
	Итого	68	51	17

Рекомендовалось использовать в качестве основной учебной литературы курс Финикова С.П. [21] и задачник Милинского В.И. [11], в качестве дополнительной – учебники Бюшгенса С.С. [7] и Рашевского П.К. [19].

В Ленинградском педагогическом институте им. А.И. Герцена дифференциальную геометрию в 1957 г. ввели в состав курса высшей геометрии, включавшего, помимо этого, проективную геометрию и основания геометрии. Программа этого курса была разработана профессором Ильей Яковлевичем Бакельманом (1928–1992), возглавлявшим кафедру геометрии. В соответствии с этой программой И.Я. Бакельман издал учебник «Высшая геометрия» для студентов педагогических институтов [4]. В нем освещались следующие разделы дифференциальной геометрии: основы теории кривых, основы теории поверхностей, внутренняя геометрия поверхности. Краткий и четкий язык изложения, достаточное число иллюстраций позволили сделать эту книгу полезным и доступным пособием для студентов как очных, так и заочных отделений педагогических институтов.

В 1954г. Министерство высшего образования СССР утвердило новые учебные планы по специальности «математика» для педагогических институтов с четырехлетним сроком обучения (квалификация – «учитель математики и физики средней школы», «учитель математики средней школы»). Согласно этим планам было сделано некоторое перераспределение часов на математические курсы. Так, в учебном плане, по которому осуществлялась подготовка учителей математики и физики, прежде обязательный курс дифференциальной геометрии был переведен в разряд факультативных курсов. В учебном плане для специальности «учитель математики средней школы» курс дифференциальной геометрии остался обязательным.

Для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов к курсу «Дифференциальная геометрия» разрабатывались специальные методические указания, которые позволяли организовать самостоятельную работу по его изучению. В них описывался порядок знакомства с данной дисциплиной, указывалась соответствующая учебная литература, приводились решения базовых задач, а также список вопросов для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения. Одно из таких методических пособий было разработано в 1954г. П.С. Моденовым [13]. Изложение материала автор начинает с указания роли и значения дифференциальной геометрии. Он отмечает, что дифференциальная геометрия имеет большое значение для понимания теории относительности в физике и необходима для освоения теоретической механики и физики. Курс, который будет изучен, поможет студенту хорошо понять геометрию Н.И. Лобачевского и современную проблему о геометрической структуре нашего реального пространства.

Отметим, что в 40-х годах XX в. значительная часть преподавателей готовилась в стенах учительских институтов. В 50-х годах эти институты, как правило, были преобразованы в педагогические с четырехлетним сроком обучения, что привело к качественному изменению высшего педагогического образования. Начавшаяся в середине 50-х годов научно-техническая революция поставила перед отечественной педагогической высшей школой новые, более сложные задачи.

Развитие математики существенным образом влияло на содержание учебных планов и программ. Новые разделы математики появлялись сначала в виде специальных и факультативных курсов, а затем переносились в основной курс. Применение новых методов позволяло изложить старый программный материал в более сжатые сроки и высвободить время для изучения новых разделов. Это влекло за собой перераспределение часов и изменение программ. С середины 50-х годов этот процесс происходит на физико-математических отделениях тех педагогических вузов, которые получили право работать по учебным планам, разработанным своими математическими кафедрами. Такая картина наблюдалась в Московском педагогическом институте им. В.И. Ленина, Московском областном педагогическом институте им. Н.К. Крупской, Ленинградском педагогическом институте им. А.И. Герцена и в Ивановском педагогическим институте.

В 1954–1959 гг. Математическая комиссия при Министерстве просвещения под руководством профессоров Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина Алексея Ивановича Марукшевича (1908–1979) и Виктора Иосифовича Левина (1909–1986) разработала учебный план и программы для математических факультетов и отделений педагогических институтов. В этих документах в значительной степени нашла отражение практика упомянутых четырех институтов. В учебный план был введен ряд математических предметов, отражавших особенности научно-технической революции.

Эти планы начали внедряться в 1962–63 уч. году, когда педагогические институты перешли на подготовку выпускников по специальности «учитель математики средней школы» с четырехлетним сроком обучения. Наряду с этим во многих вузах сохранилась подготовка по специальности «учитель математики и физики средней школы» с пятилетним сроком обучения.

Были пересмотрены и усовершенствованы учебные программы по математическим курсам. Так, в курс математического анализа из дифференциальной геометрии перенесен ряд геометрических приложений (кривые на плоскости и в пространстве). Сам курс дифференциальной геометрии был объединен с курсами оснований геометрии и проективной геометрии в единую учебную дисциплину – высшую геометрию. Сюда же был включен новый раздел «Элементы топологии замкнутых поверхностей». Введение единого курса позволяло дать стройное логическое изложение высшей геометрии.

В тех педагогических вузах, где учебный план был рассчитан на пять лет, дифференциальная геометрия продолжала читаться как самостоятельный курс. Подтверждением этому служит программа для педагогических институтов по дифференциальной геометрии, вышедшая в 1962г. под редакцией Левона Сергеевича Атанасяна (1921–1998) – профессора Московского государственного педагогического института им. В.И.Ленина [18]. Курс «Дифференциальная геометрия» велся в пятом семестре и содержал два раздела.

Первый раздел знакомил студентов с теорией кривых на плоскости и в пространстве. В этом разделе с помощью векторной функции скалярного аргумента изучались свойства кривых и вводились основные инварианты – кривизна и кручение. При изложении этого раздела рекомендовалось ознакомить учащихся с элементарными приложениями изучаемой теории к некоторым разделам теоретической механики. С этой целью использовали кинематический способ изложения теории кривых.

Второй раздел курса был посвящен общей теории поверхностей. Здесь рассматривались различные способы задания поверхности, определялись касательная плоскость и нормаль, вводились в рассмотрение первая и вторая кривизны поверхности, изучались кривые на поверхности, в частности, замечательные линии. Изложение теории поверхностей завершалось доказательством теоремы об определении поверхности при помощи двух квадратичных форм.

Для сокращения вывода основных уравнений поверхности предлагалось использовать метод внешних форм, основы которого изложены в книге С.П. Финикова «Дифференциальная геометрия»[21].

В конце курса рекомендовалось дать исторический очерк развития дифференциальной геометрии, в котором следовало обратить внимание на роль отечественных ученых в развитии этой науки.

В связи с отсутствием практических занятий по данному курсу ведущая кафедра должна была разработать систему заданий по основным его разделам, организовывать систематические консультации и прием заданий.

С переходом к всеобщему среднему образованию возросли требования к уровню подготовки учительских кадров. В связи с этим Министерство просвещения СССР при участии научно-педагогической общественности разработало новый учебный план по специальности «Математика» с четырехлетним сроком обучения. В плане нашли отражение современные требования к учителю средней школы. Работать по нему педагогические вузы начали в 1970 г.

В основе указанного учебного плана лежала идея создания объединенных курсов по трем основным дисциплинам: математическому анализу, алгебре и теории чисел, геометрии. Обеспеченные достаточным количеством часов, они позволяют логически стройно изложить все разделы соответствующих дисциплин и привить студентам аналитическую, алгебраическую и геометрическую культуру. Кроме того, такое построение учебного плана позволяло в случае необходимости вносить коррективы в те или иные разделы указанных дисциплин без изменения всего учебного плана.

Курс геометрии включал аналитическую, проективную и дифференциальную геометрию, основания геометрии и элементы топологии. Постановка единого курса геометрии в педвузе должна обеспечить будущему учителю достаточно широкий взгляд на геометрию и вооружить его конкретными знаниями, дающими ему возможность преподавать геометрию в средней школе по новой программе и квалифицированно вести факультативные курсы по геометрии. Программа по геометрии была разработана профессором Московского государственного педагогического института им. В.И.Ленина Вячеславом Тимофеевичем

Базылевым (1919–1989) и профессором МГУ Владимиром Григорьевичем Болтянским (род. в 1925г.). Редактором программы выступил профессор И.Я. Бакельман [2].

Сведения по дифференциальной геометрии сообщались в разделе «Линии и поверхности в евклидовом пространстве. Элементы топологии», который читался в четвертом семестре по 2 часа в неделю. При определении линий, поверхностей, поверхностей с краем и т.д. использовались знания по топологии. Плоские кривые рассматривались как частный случай пространственных, и вся теория излагалась сразу для пространственных кривых, что позволяло сократить время на изучение теории кривых. Изложение теоретического материала заканчивалось рассмотрением внутренней геометрии поверхности и демонстрацией реализации в малом геометрии Лобачевского на поверхности постоянной отрицательной кривизны. На практические занятия отводилось 16 часов. По данному разделу предусматривалось проведение двух контрольных работ.

Следует отметить, что программа позволяла преподавателю выбирать метод для изложения материала по своему усмотрению, исходя из уровня подготовленности слушателей, а также переставлять отдельные темы курса.

В учебной программе тех же авторов 1977г. [3] изложение вопросов дифференциальной геометрии предполагалось вести с применением векторного исчисления. Для этого были введены следующие темы: «Векторные функции одного и двух скалярных аргументов и их дифференцирование», «Понятие линии и гладкой кривой в евклидовом пространстве, их параметризация с помощью вектор-функции», «Гладкие поверхности, их параметризация с помощью вектор-функции».

В качестве учебных пособий по данному разделу геометрии рекомендовалось использовать «Краткий курс дифференциальной геометрии» А.П. Нордена [15], «Лекции по дифференциальной геометрии» А.В. Погорелова [16], "Введение в дифференциальную геометрию «в целом»" И.Я. Бакельмана, А.Л. Вернера, Б.Е. Кантора [5].

Указанная учебная программа по геометрии с небольшими изменениями использовалась до конца XX столетия почти во всех педагогических вузах для подготовки по специальностям «Математика», «Математика и физика». Отметим только, что в учебной программе 1987г. из раздела, посвященного дифференциальной геометрии, были исключены понятие о натуральном уравнении кривой и вопрос о реализации в малом геометрии Лобачевского на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Этот вопрос перенесли в раздел «Основания геометрии с элементами геометрии Лобачевского», который изучался позднее.

Для подготовки по специальности «Физика и математика» использовали программу, составленную в 1982г. профессорами Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина В.Т. Базылевым и Константином Ивановичем Дуничевым [1]. По учебному плану для специальности «Физика и математика» на изучение геометрии отводилось меньшее количество часов, чем для специальности «Математика». В связи с этим программа была несколько сокращена. Сокращение коснулось и раздела «Линии и поверхности в евклидовом пространстве», посвященного вопросам дифференциальной геометрии. Например, из программы был удален вопрос о второй квадратичной форме поверхности. Содержание остальных вопросов было значительно упрощено.

Несмотря на то, что подавляющее большинство педагогических вузов нашей страны в XX столетии работало по государственному учебному плану и только немногие использовали индивидуальный учебный план, направления научной работы в каждом из них, а следовательно, и учебной деятельности были различными и зависели от преподавательского коллектива. Практически во всех педагогических вузах возникли научные школы по разным направлениям. Естественно, что это положительным образом повлияло на преподавание математики. В учебный план были введены специальные и факультативные курсы, а также специальные семинары, на которых студенты имели возможность узнать о современном состоянии некоторых отраслей науки. Во многих педагогических вузах вопросы дифференциальной геометрии были избраны для изложения на таких занятиях. Например, в Московском государственном педагогическом институте им В.И. Ленина (теория поверхностей, геометрия Римана и многомерные пространства, геометрия погруженных многообразий), в педагогическом институте им. А.И. Герцена (дифференциальная геометрия в целом, риманова геометрия), в Ивановском педагогическом институте (заполнения и покрытия пространств высших размерностей, геометрия точечных решеток), в Куйбышевском педагогическом институте (дополнительные вопросы теории поверхностей), в Горьковском педагогическом институте им. А.М. Горького (проективно-дифференциальная геометрия линейчатых пространств), в Ростовском педагогическом институте (теория поверхностей, дополнительные главы дифференциальной геометрии поверхностей).

Следует отметить, что между программами по математике, в том числе и по дифференциальной геометрии, классических университетов и педагогических институтов существовал значительный разрыв. Если в педагогических институтах вплоть до середины 50-х годов на семинары и спецкурсы отводилось 80 часов, то в университетах – в четыре раза больше. Это позволяло университетам при наличии соответствующих преподавательских кадров поддерживать на достаточно высоком уровне творческую работу студентов в конкретных областях математики. Педагогические институты, за исключением некоторых, не имели в этом отношении больших возможностей. Однако со временем удельный вес этих форм учебной работы повышается и в педагогических институтах.

К концу XX столетия ряд педагогических институтов достиг университетского уровня преподавания математики. Доказательством этого является тот факт, что начиная с 90-х годов XX в. многие педагогические институты были преобразованы в педагогические университеты, первым из которых стал Московский государственный педагогический университет.

В настоящее время все вузы страны работают по индивидуальным учебным планам и программам, составленным на основе государственных стандартов высшего профессионального образования. Это позволяет не только преподавателям, но и вузам выстроить индивидуальную траекторию образовательной и научной деятельности, исходя из запросов времени и собственных возможностей.

В большинстве педагогических вузов вопросы дифференциальной геометрии излагаются в общем курсе геометрии. При этом для определения понятий «линия», «поверхность» и т.п. используется язык топологии.

Как видно из представленного материала, подготовительная работа по знакомству с приложениями дифференциального исчисления к геометрии начиналась еще в курсе математического анализа. В некоторых учебных программах даже предлагалось полностью перенести в курс математического анализа раздел «Кривые на плоскости и в пространстве». Это, с одной стороны, позволяло показать одно из практических приложений дифференциального исчисления, с другой стороны, подготавливало прочный фундамент для дальнейшего изучения курса «Дифференциальная геометрия». При этом изложение указанного материала в курсе математического анализа велось в координатной форме, которая является наиболее простой и понятной для восприятия студентов, и только после его усвоения для дальнейшего знакомства с дифференциальной геометрией использовалось векторное исчисление, метод подвижного репера, квадратичные формы и другой аналитический аппарат. Однако, в настоящее время указанная пропедевтическая работа практически сведена на нет, что создает определенные трудности для студентов при изучении данного раздела геометрии.

На всем протяжении XX столетия наблюдается конверсия научных знаний из дифференциальной геометрии в соответствующий учебный предмет. Сначала о каком-либо новом научном факте сообщается на семинаре или конференции по дифференциальной геометрии. Все присутствующие получают возможность познакомиться с указанным научным фактом и принять участие в обсуждении. Другой способ ознакомления с новыми научными результатами – это чтение специальной литературы. Носители нового научного знания в своей преподавательской деятельности используют его при составлении программ спецкурсов и спецсеминаров. Далее при проведении спецкурсов и спецсеминаров происходит поиск наиболее адаптированных приемов и методов ознакомления студентов с этим новым научным знанием. В конечном итоге выстраивается некий вариант изложения соответствующего учебного материала. Затем этот материал переносится в программу основного курса. При этом преподаватели продолжают вести работу по совершенствованию методики его изложения и формированию соответствующего методического обеспечения обновленной учебной дисциплины. Этот процесс продолжается и в наше время. Разрабатываются конкретные методические системы по преподаванию курса «Дифференциальная геометрия». Один из вариантов такой системы представлен в докторской диссертации В.И. Глизбург «Методическая система обучения топологии и дифференциальной геометрии при подготовке учителя математики в аспекте гуманитаризации непрерывного математического образования» (2009г.) [8].

Библиографический список

1. *Базылев, В.Т.* Геометрия [Текст]/ В.Т.Базылев, К.И. Дуничев / Программы педагогических институтов.– М., 1982. Сб. №4.–10с.
2. *Базылев, В.Т.* Программы педагогических институтов. Геометрия (для специальности №2104 «Математика») [Текст]/ В.Т. Базылев, В.Г. Болтянский /– М., 1970.–14с.
3. *Базылев, В.Т.* Программы педагогических институтов для специальности №2104 «Математика» и «Математика и физика». Геометрия [Текст]/ В.Т. Базылев, В.Г. Болтянский /– М., 1977.–13с.
4. *Бакельман, И. Я.* Высшая геометрия. (Учеб. пособие для пед. ин-тов) [Текст]/ И.Я. Бакельман/– М., 1967. -368 с.
5. *Бакельман, И.Я.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом» [Текст]/ И.Я. Бакельман, А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор/– М., 1973.–440с.
6. *Бахвалов, С.В.* Программа по курсу «Дифференциальная геометрия» для физико-математического факультета педагогических институтов [Текст]/ С.В. Бахвалов/– М., 1947.– 6с.
7. *Бюшгенс, С.С.* Дифференциальная геометрия [Текст]/ С.С. Бюшгенс/– М., 1932. – 304 с.
8. *Глизбург, В.И.* Методическая система обучения топологии и дифференциальной геометрии при подготовке учителя математики в аспекте гуманитаризации непрерывного математического образования: Дис. д-ра пед. наук: 13.00.02 [Текст]/ В.И. Глизбург/– М, 2009.– 437с.
9. *Гюнтер, Н.М.* Сборник задач по высшей математике [Текст]/ Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин.– М, 1949.
10. *Егоров, Д. Ф.* Дифференциальная геометрия [Текст]/ Д.Ф. Егоров/– М.-П., 1910.
11. *Милинский, В.И.* Задачи по высшей геометрии. Дифференциальная геометрия [Текст] В.И. Милинский, О.К. Житомирский, В.Д. Львовский / Задачи по высшей геометрии. Часть II. .– М.-Л., 1937.– 296с.
12. *Моденов, П.С.* Сборник задач по дифференциальной геометрии [Текст]/ П.С. Моденов /– М., 1949.– 240с.
13. *Моденов, П.С.* Методические указания к курсу «Дифференциальная геометрия» для студентов-заочников физико-математических факультетов [Текст]/ П.С. Моденов /– М., 1954.– 51с.
14. *Норден, А.П.* Дифференциальная геометрия [Текст]/ А.П. Норден /– М., 1948.– 216с.
15. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст]/ А.П. Норден / – М., 1958. – 244 с.
16. *Погорелов, А.В.* Лекции по дифференциальной геометрии [Текст]/ А.В. Погорелов /– Харьков, 1955.– 148с.

17. *Поссе, К. А.* Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст]/ К.А. Поссе / – СПб., 1908.
18. Программы педагогических институтов. Дифференциальная геометрия [Текст]/ Ред. Л.С.Атанасян.– М., 1962. – 5с.
19. *Рашевский, П.К.* Курс дифференциальной геометрии [Текст]/ П.К. Рашевский /– М.-Л., 1938.– 336с.
20. Сборник программ педагогического факультета на 1927-28 уч. г. [Текст] – Ростов-на-Дону, 1928. – Вып.1 Физико-техническое отделение.– 78с.
21. *Фиников, С.П.* Дифференциальная геометрия [Текст]/ С.П. Фиников /– М, 1936.–236с.
22. *Фиников, С.П.* Программы педагогических институтов. Дифференциальная геометрия. Для физико-математических факультетов [Текст]/ С.П. Фиников /– М., 1939.– 3с.

Современное состояние геометро-графического образования в школе и в вузе

Н.В. Кайгородцева

Существующие проблемы снижения уровня геометро-графической подготовки студентов технических специальностей вузов являются следствием весьма низкой подготовки выпускников школ в области элементарной геометрии и черчения. Что касается черчения, то такой предмет совершено исчез из школьных программ. Исключением являются единичные школы, где директор, понимая важность и значение приобретаемых школьниками на этих уроках знаний, оставил уроки черчения в сетке расписания.

В связи с практически повсеместным исключением предмета "Черчение", отвечавшего за развитие у школьников пространственного и технического мышления, на учебную дисциплину "Геометрия" должна возлагаться двойная нагрузка и двойная ответственность. Однако, проводимые на первых занятиях в вузах, входные тесты показывают, зачастую отсутствие достаточного уровня геометрических знаний у вчерашних абитуриентов. Чем объяснить подобное состояние и отношение к одной из фундаментальных наук, занимающейся изучением свойств и соответствий окружающего нас геометрически устроенного мира?

Прежде всего следует понять причины сокращения изучения геометрии в школе. Во-первых, сокращение учебных часов фундаментальных дисциплин (геометрии и алгебры, русского языка, истории, географии и других), являвшихся основными с момента возникновения школьного образования, происходит из-за появления новых современных дисциплин, изучение которых обусловлено развитием науки и техники, общества и производства. В последние десятилетия в школьную программу вошли информатика, право, экономика и другие дисциплины, но, в связи с тем, что общее количество учебных часов увеличивать нельзя (во избежание перегрузки учащихся), то для ввода «новых» пришлось сократить «старые» дисциплины.

Лавина информации, которую нужно усвоить для полноценной жизни в обществе, для грамотного использования всех благ цивилизации, уже привели к увеличению продолжительности школьного обучения: с десятилетнего – на одиннадцатилетнее. Однако введение Единого Государственного экзамена (ЕГЭ) сейчас сформировало ситуацию, когда последние два года обучения в школе (10 и 11 класс) все ученики, вместо изучения нового материала, получения новых знаний, активно готовятся к ЕГЭ. Это связано с тем, что балл, полученный на ЕГЭ, стал определяющим фактором для поступления в вузы, а, следовательно, и в определении будущей карьеры и жизненного благополучия. Поэтому учителя направили все свои силы на муштровку учеников, на «натаскивание» их на верные ответы по тестам ЕГЭ.

Сама идея проведения ЕГЭ великолепна. Она предусматривает проверку школьных знаний не только за последний год обучения. Это позволяет школьнику увидеть дисциплину целиком, по-новому взглянуть на ее отдельные положения и установить логические взаимосвязи между ее частями. Кроме того, ЕГЭ облегчает физическую и, главное, моральную нагрузку на детей, возникавшую в момент сдачи вступительных экзаменов, которые проходили практически сразу после сдачи выпускных экзаменов в школе. Однако, неизбежность сдачи ЕГЭ по окончании школы привело к некоторым проблемам. Как правило, 10 и 11 года обучения «выпали» из общего образовательного процесса. Эти годы посвящены изучению лишь тех тем, которые содержатся в тестовых вопросах ЕГЭ по математике, русскому языку, как обязательных для сдачи учебных предметах, и тех предметов, сдача ЕГЭ по которым необходима при поступлении в тот или иной вуз. Такая подготовка идет в ущерб всем остальным учебным предметам, которые в свою очередь также играют не последнюю роль в формировании интеллектуально развитой личности.

В последнее время в средних школах введена Государственная Итоговая аттестация (ГИА) выпускников девятых классов. Получается, что из одиннадцати лет обучения в школе, 3-4 года посвящены «дрессировке» учеников для успешной сдачи ГИА и ЕГЭ. Конечно, стоит отметить, что два основных учебных предмета (математика и русский язык) являются при сдаче ГИА и ЕГЭ обязательными, что поднимает их над другими общеобразовательными предметами. Однако, в ЕГЭ по математике процентное соотношение тестовых вопросов по геометрии значительно ниже алгебраических. Многие ученики пропускают, т.е. не выполняют часть, содержащую геометрические задачи, и при этом успешно сдают Единый Государственный экзамен по математике и поступают в вузы.

Сокращение геометрических вопросов напрямую связано со слабой геометрической подготовкой школьников. Наибольшее затруднение у учеников вызывает такой раздел геометрии, как стереометрия, изучаемая в старших классах. Сложности здесь вызваны резким переходом от плоских объектов к работе с объектами пространства. Это происходит, не смотря на цели и задачи, сформулированные в учебных программах по математике (5-6 класс) и геометрии (8-9 класс), согласно которым у учеников за 5 лет обучения должно сформироваться пространственное мышление и появиться умения выделять плоскостные элементы из состава пространственных объектов (куба, параллелепипеда, конуса и т.д.). Однако проведение анализа современных учебников по математике и геометрии указывает на недостаточность и теоретического, и практического материала, связанного с оперированием пространственными объектами. Именно поэтому старшеклассники оказываются не готовыми для восприятия и понимания стереометрии. Геометрия для них переходит в разряд «сложных» дисциплин.

В связи со сложностью для выпускников школ решения геометрических задач было произведено сокращение геометрических вопросов в тестах. Естественно это повысило возможность успешной сдачи ЕГЭ, без решения геометрических задач. И теперь всем очевидно, что раз при сдаче ЕГЭ стало возможно обойтись без знаний геометрии, в школе перестали уделять ее изучению должного внимания. Соответственно, выпускники, окончившие среднюю школу, не имеют достаточной базы геометрической подготовки, которая, как известно, важна во всех научных дисциплинах и сферах человеческой деятельности. Особенно знания геометрии нужны будущим специалистам инженерного профиля, поэтому для данных направлений подготовки бакалавриата и специалитета следует изменить подход к представлению теоретических знаний с наглядно-эмпирического подхода, который использовался до настоящего времени, на логико-конструктивный подход, который знаком студентам со школы. Логика поможет студентам быстро восполнить необходимый запас элементарных геометрических знаний.

Кроме того, современные возможности информационно-коммуникационных технологий, позволяют строить пространственные объекты сразу в виде 3D-моделей в виртуальной реальности, не прибегая к помощи двумерных изображений - чертежам, что и являлось основной причиной сложности понимания объемности в стереометрии.

Сегодня проблемы построения плоских изображений пространственных объектов, называемых проекциями, и вопросы их преобразования для решения конструкторских задач, изучаемых ранее - в классическом курсе начертательной геометрии, отошли на второй план. Данный факт подтверждает проведенный анализ геометро-графической составляющей федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования третьего поколения инженерных направлений подготовки, который показал об исключении традиционного курса начертательной геометрии из основной образовательной программы [1]. Однако начертательная геометрия развивает важное для будущих инженеров пространственное мышление, играющее «главную роль» в деятельности по изобретательству и рационализации.

Существующая возможность обновления учебной дисциплины начертательной геометрии подтверждается существующим арсеналом научных исследований ученых-геометров, открытия и предложения которых развили науку «Начертательная геометрия», но пока не нашли место в учебном курсе начертательной геометрии. Настало время и появилась возможность изменить содержание и подход к изучению одной из базовых дисциплин инженерного образования - начертательной геометрии.

Традиционно классические учебники по начертательной геометрии начинаются с демонстрации видов проецирования пространственных объектов на плоскость чертежа и рассказа о методе Монжа на примере построения проекций точки. При этом предполагается, что понятие «Точка» общеизвестно, но в школе это понятие не определяется. Начальные разделы геометрии, излагаемые в курсе математики 5-го класса, начинаются с темы «Отрезок» (см. [2]). Поэтому вчерашние школьники воспринимают понятие «*Точка*» интуитивно. При этом и в вузе (в традиционном курсе начертательной геометрии) понятие «точка» также не определяется. Кроме того ничего не говорится о размерности геометрического элемента «точка», о самом понятии «размерность», о понятии «множество», хотя позднее будет отмечено, что «любую геометрическую фигуру следует рассматривать как множество всех принадлежащих ей точек» [3], в том числе, «прямая задается двумя точками», а «плоскость – тремя точками, не лежащими на одной прямой». Логичнее будет начать курс начертательной геометрии с известных основ геометрии, рассматриваемых в курсе высшей геометрии в вузах. Это, во-первых, поможет установить межпредметную связь, а, во-вторых, введет основные понятия, которые ранее считались известными для студентов, хотя это было не так.

Основными геометрическими объектами элементарной (евклидовой) трехмерной геометрии являются «точка», «прямая», «плоскость». Поэтому в учебном курсе начертательной геометрии следует уделить им повышенное внимание. Необходимо подробно, совместно со студентами определить размерность этих основных объектов и размерность условий их взаимного расположения. И только после того, как основные понятия определены, основные определения рассмотрены, можно приступать к описанию свойств и видов проецирования, к демонстрации и обоснованию образования комплексного чертежа Монжа. Дело в том, что чертеж, как конструкторский документ никто не отменял и поэтому правила его создания и требования по его оформлению остаются актуальными и необходимыми в «багаже знаний» будущего инженера.

Предлагаемый подход к рассмотрению начертательной геометрии со стороны изучения размерностей объектов и их структурных характеристик, позволяет обосновывать факты, ранее предлагаемые студентам без доказательства. Данный обновленный курс начертательной геометрии раскрывает суть строения геометрического мира и объясняет некоторые, остававшиеся ранее загадочными, понятия.

Инновационный курс начертательной геометрии изложен в учебном пособии «Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования» [4]. Кроме того в комплект к данному учебнику был составлен и издан сборник задач и упражнений [5].

Предлагаемый инновационный курс получил математизированную доказательную базу, что явилось затрудняющим фактом перехода профессорско-педагогического состава кафедр геометро-графических дисциплин от сложившегося и отработанного традиционного учебного курса к новой дисциплине математического профиля. В связи с этим были разработаны и изданы методические рекомендации с подробным описанием, как самого учебного курса, так и возможных методических приемов обучения ему студентов [6].

Предлагаемое обновление вполне справедливо: появились новые потребности, а главное и возможности в решении геометрических инженерных задач и поэтому начертательная геометрия может перестать быть дисциплиной обслуживающей инженерную графику, а стать полностью самостоятельной и получить право на дальнейшее развитие, так как решение проблем конструктивного или аксиоматического построения отображений остаются актуальными сегодня и будут таковыми завтра.

Библиографический список

1. *Кайгородцева, Н. В.* Анализ геометро-графической составляющей образовательных стандартов бакалавриата третьего поколения [Текст] / Н. В. Кайгородцева, К. Л. Панчук // Омский научный вестник. – 2012. – Вып. 1(107). – С. 6-11.
2. Математика 5 класс: учебник [Текст] / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М.: Мнемозина, 2005. – 280 с.
3. *Фролов, С. А.* Начертательная геометрия: учебник для втузов [Текст] / С. А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
4. Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования: учебник [Текст] / В. Я. Волков [и др.]. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2010. – 253 с.
5. Сборник задач и упражнений по начертательной геометрии (к учебнику «Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования») [Текст] / В. Я. Волков [и др.]. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2010.– 73 с.
6. *Кайгородцева, Н. В.* Инновационная методология начертательной геометрии: монография [Текст] / Н. В. Кайгородцева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. – 184 с.

О разноуровневых заданиях в математической подготовке студентов педагогического вуза

Л.П. Латышева, А.Ю. Скорнякова

Происходящее в системе высшего педагогического образования усиление внимания к формированию высокой профессиональной квалификации достигается с помощью создания условий овладения узко-предметными знаниями, умениями и навыками при многоуровневом представлении их студентам. Имеющие в связи с этим место теоретические положения и практические наработки, относящиеся к вопросам математического образования будущего педагога, являются предметом анализа в данной статье.

По мнению ряда ученых (В.П. Беспалько [1], С.И. Калинина [2], Н.В. Перьковой [5], Е.И. Смирнова [7], Н.Л. Стефановой [8] и др.), качество предметной подготовки обучающихся во многом зависит от наличия в учебном процессе различных по форме, характеру и сложности заданий. Например, метод укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниева в рамках одного занятия предполагает работу не только с исходной, но и с обратной, аналогичной задачами; составление задания по некоторым, общим с ними элементам, а также, по возможности, формулировку обобщающей задачи [9, с. 168]. В.П. Беспалько рассматривает учебные упражнения в соответствии с четырьмя уровнями усвоения материала: ученическим, алгоритмическим, эвристическим и творческим [1, с. 55 – 61]. Е.И. Смирнов особое внимание уделяет цепочкам задач учебно- и научно-исследовательского характера, позволяющих создавать условия эффективного овладения содержанием дисциплины, развития поисковой и творческой активности студентов [7, с. 538 – 544]. Для того чтобы подобное стало посильным обучающимся, необходима подготовительная работа. Поэтому при организации их самостоятельной деятельности важно продумывать систему предварительных указаний, облегчающих выполнение последующих заданий, включая упражнения для самоконтроля, подбор примеров, позволяющих перестроить мысль с прямого на обратный ход, и т.д.

Так, в Пермском государственном гуманитарно-педагогическом университете имеется некоторый опыт использования при обучении математическим дисциплинам заданий, разделенных на три уровня: выполняемых по алгоритму; – в соответствии со схемой, содержащей как алгоритмические, так и эвристические указания; – когда достижение цели не гарантируется конечным числом шагов, а предполагает выбор (а также комбинацию) их из многих вариантов. В рамках курса математического анализа студентам вначале предлагаются всевозможные упражнения на вычисление по известным шаблонам и формулам, после чего даются задания второго уровня, снабженные предписанием выполняемых действий и предполагающие последующую формулировку вывода; далее обучающиеся самостоятельно составляют различные упражнения для одногруппников.

Многие исследователи отмечают [4 – 7], что эффективность обучения в вузе зависит от осознанности выполняемых действий, поскольку достижение этого помогает, во-первых, зафиксировать, что думает и как действует студент, во-вторых, критически оценить полученные наработки. Поэтому завершающим этапом занятия является рефлексия, в нашем случае зачастую проводимая средствами электронной рабочей тетради в специально разработанном интерфейсе курса среды Moodle, представленном на сайте http://elearn.pspu.ru/ [6].

Применительно к *первому уровню* может оказаться полезным, например, следующее: «Докажите, что если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx}_{J_1} + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{Замена в } J_1 \ : \begin{cases} x = -x; \\ dx = -dx \end{cases}.$$

$\uparrow$ (Учитываем свойство 1 и четность функции.)

<u>*Задание.*</u> Докажите: если $f(x)$ – нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$» [3, с. 63].

Кроме этого, предусматриваются разноуровневые задания, нацеленные на оказание помощи первокурсникам в освоении математической литературы, информация в которой обычно является достаточно «концентрированной» и содержит много символов и формул. Причем к заданиям алгоритмического типа относятся работы на составление конспекта из основных положений рассматриваемой теории и формулировку соответствующих вопросов. Более сложные поручения предусматривают составление плана изучаемого математического текста и восстановление недостающих фрагментов и ссылок в доказательствах.

Ко *второму уровню* относится, например, задание, связанное с вычислением интеграла $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$; $n = 1, 2, 3\dots$.

$$«u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}; \qquad du = \frac{-2n\,x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}};$$

$$dv = dx; \qquad v = x.$$

Тогда $J_n = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \dfrac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$(в числителе добавили и вычли a^2) $= \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \dfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx - \int \dfrac{2na^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$,

т.е. $J_n = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,J_n - 2na^2\,J_{n+1} \Rightarrow \boxed{J_{n+1} = \dfrac{1}{2na^2}\,\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2}J_n}$

(рекуррентная формула). Получили формулу, применяя которую через (n – 1) шагов J_n можно свести к $J_1 = \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + c$» [3, с. 37]. Укажите пример.

Третий уровень предполагает создание обучающимися логической схемы базы знаний по теме параграфа или раздела, содержащей перечень основных формул и зависимостей. Примером может служить задание на применение аппарата дифференциального исчисления для поиска экстремумов функций: «Наиболее простая и математически разработанная область связана с нахождением наименьших и наибольших значений дифференцируемых функций одного переменного, заданных на отрезке [a,b]. Опишите общую схему такого исследования для прикладных «оптимизационных» задач. Опишите подобную схему для функции двух независимых переменных, заданной в плоской области D. Проведите аналогии и выделите общее и особенное в реализации этих схем» [4, с. 110].

Приведем примеры еще некоторых разноуровневых заданий.

Задание 1. Исследуйте на монотонность последовательности $b_n = \dfrac{n^4}{n^3-2}$; $b_n=4n+n^3$; $b_n = \dfrac{n^2+5n+2}{n^2+5n+7}$.

Следуя рекомендации [5, с. 70], студентам предлагается проводить рассуждения согласно плану: сформулировать гипотезу, для проверки которой полезно воспользоваться определением возрастающей (убывающей) последовательности и проанализировать соответствующие разности или частное; рассмотреть общий член последовательности как композицию двух возрастающих (убывающих) функций либо предложить свой вариант рассуждений. На заключительном этапе обучающимся рекомендуется сделать общий вывод.

Использование подобного плана позволяет студентам актуализировать знания, находить рациональный путь решения, экспериментировать и, по возможности, предлагать индивидуальный вариант проверки гипотезы. В итоге, после выполнения подобной работы студенты более осознанно выполняют исследовательские задания, предполагающие самостоятельное решение субъективно новой проблемы.

Задание 2. Предложите пример убывающей последовательности. Какие должны быть значения параметров x, y, z, чтобы последовательность $b_n = \dfrac{n^2+xn+y}{n^2+zn+y}$ была убывающей?

Задание 3. Постройте график предельной функции:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \qquad (x \ge 0).$$

При выполнении заданий 2 и 3 обучающиеся сталкиваются с необходимостью анализировать, сравнивать, преобразовывать выражения. Тем самым углубляются знания студентов, сфера их применения расширяется и приобретается опыт поисковой и творческой деятельности.

Задания в контрольных, индивидуальных и самостоятельных работах также могут различаться по уровню сложности. Примеры заданий трех уровней сложности по соответствующим темам курса «Математический анализ» приведены в табл. 1.

Таблица 1

Примеры разноуровневых заданий

Понятие функции и способы ее задания			
№ варианта	*Задания I уровня*	*Задания II уровня*	*Задания III уровня*
1	Найдите область определения функции $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x-12}}$	Постройте график функции $y=\arcsin(\sin x)$	Приведите пример функции, заданной аналитически, областью определения которой является множество (2;5) $\cup\{7\}$
2	Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\frac{(1-x)(1+5x)}{x^2}}$	Постройте график функции $y=\arcsin(\cos x)$	Приведите пример функции, заданной аналитически, областью определения которой является множество [-2;2] $\cup\{3\}$
Свойства и приложения производной и интеграла			
№ варианта	*Задания I уровня*	*Задания II уровня*	*Задания III уровня*
1	Исследуйте функцию *y*= и постройте ее график	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями , и прямой	Докажите справедливость равенства
2	Исследуйте функцию $y=\frac{x+1}{x^2+9}$ и постройте ее график	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = arctgx$, $y=\frac{\pi}{4}(2-x)$, прямой $x = 1$ и осью ординат	Убедитесь в том, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$
Числовые и функциональные ряды			
№ варианта	*Задания I уровня*	*Задания II уровня*	*Задания III уровня*

1	Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$	Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$	Составьте знакочередующийся числовой ряд, у которого $a_n = 1 - f(n)$, где $n \in N$
2	Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$	Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$	Составьте знакочередующийся числовой ряд, у которого $a_n = f(n) + 1$, где $n \in N$

Приведенные задания отражают возможность контролировать усвоение студентами соответствующего учебного материала и констатировать достигнутые умения на разных качественных уровнях: от репродуктивного до творческого.

Таким образом, приведенный анализ, подкрепленный конкретными иллюстрирующими примерами, в определенной степени обозначает основные пути и особенности совершенствования математической подготовки студентов педагогического вуза с использованием средств дифференциации уровней учебных заданий.

Библиографический список

1. *Беспалько, В.П.* Слагаемые педагогической технологии [Текст] / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
2. *Калинин, С.И.* Об организации творческой деятельности магистрантов [Текст] / С.И. Калинин // Матем. вестник педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. Вып. 15: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. – Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013.– С. 186 – 194.
3. *Латышева, Л.П.* Дифференцирование и интегрирование функций одной переменной: учебное пособие. Направление подготовки 050100 – «Педагогическое образование», профиль – «Математика. Информатика», квалификация (степень) – «Бакалавр педагогического образования» / Л.П. Латышева; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – 106 с.
4. *Латышева, Л.П.* Избранные вопросы методики преподавания математики в вузе: учебное пособие [Текст] / Л.П. Латышева, Л.Г. Недре, А.Ю. Скорнякова, Е.Л. Черемных. – Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – 208 с.
5. *Перькова, Н.В.* Методика организации самостоятельной деятельности студентов 1 курса педвуза на занятиях по математическому анализу [Текст]: дис…канд. пед. наук: 13.00.02 / Перькова Наталья Владимировна. – СПб., 2002. – 154 с.
6. *Скорнякова, А.Ю.* Создание информационно-образовательной среды педвуза как средство повышения эффективности самостоятельной работы студентов в учебном процессе [Текст] // Информатика и образование – 2014. – № 2. – С. 11–17.
7. *Смирнов, Е.И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст]: монография / Е.И. Смирнов. – Ярославль, 2012. – 646 с.
8. *Стефанова, Н.Л.* Методика и технология обучения математике [Текст]: курс лекций: пособие для вузов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов, В.П. Радченко, В.В. Крылов, В.Е. Ярмолюк, В.И. Снегурова, И.А. Иванов, под науч. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

9. *Эрдниев, П.М.* Укрупнение дидактических единиц в математике: Кн. для учителя [Текст] / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

Эволюционное уравнение Эйгена и его дидактические интерпретации в системе образования

В.М. Монахов, В.Е. Фирстов

Введение.

Цель сообщения – на основе принципов синергетики и анализа внешних факторов образовательного пространства современной России обозначить инновационные подходы в русле модернизации отечественного образования. Речь идет об интерпретации эволюционной динамики образовательных процессов в рамках уравнения Эйгена, которая демонстрируется на примерах реализации таких образовательных процессов, как алгоритм развивающего обучения в рамках психологической концепции Л.С. Выготского, модели согласования системы образования с рынком занятости в трактовке теории борьбы за существование В. Вольтерра, а также прогностической модели развития образования в России. Такой подход определить инновационные ориентиры в процессе модернизации российской системы образования.

1. Теорема И.Р. Пригожина и ее следствия.

Представления синергетики об открытых системах восходят к фундаментальным работам бельгийского физико-химика, русского эмигранта И.Р. Пригожина (1947), которые удостоены Нобелевской премии по химии (1977). Основной вывод из этих работ сводится к тому, что замкнутые системы в природе – это, скорее, исключение, поскольку практически всегда рассматриваемая система контактирует с внешней средой и, таким образом, является открытой системой. *По теореме И.Р.Пригожина [1], для поведения таких объектов характерно то, что в процессе взаимодействия с внешней средой всякая открытая система соответствующим образом структурируется (самоорганизуется), принимая некоторое динамически оптимальное состояние, фазовая конфигурация которого представляет некий консенсус между внешней средой и рассматриваемой системой. Изменение внешних условий приводит к новой конфигурации рассматриваемой системы и т.д.*

Во второй половине XX в. накопилось довольно много фактов, свидетельствующих о том, что такое поведение открытых систем имеет достаточно общий характер. Отсюда следует центральная идея синергетики о целенаправленном характере эволюции открытых систем, которыми безусловно являются системы образования. Если эволюцию рассматриваемой открытой системы описывать в виде траектории в фазовом пространстве, то цели эволюции идентифицируются с определенными элементами данного пространства, к которым и устремляются фазовые траектории эволюционирующей открытой системы. Для самой системы эти элементы, по сути, представляют некое *притягивающее множество* или *аттрактор цели*.

Таким образом, основные принципы синергетики – это *принцип самоорганизации* (адаптации) открытой системы с внешней средой и принцип *самоподобия*, за которыми легко угадываются ***дидактические принципы системности и последовательности***.

2. Эволюционная динамика открытых систем и уравнение Эйгена.

Динамика самоорганизации эволюционирующей открытой системы в представлении М. Эйгена (Нобелевская премия по химии, 1967) [2] в общем виде описывается :кинетическим уравнением:
$$\frac{dx_i}{dt} = \left(F_i - R_i\right)x_i + \sum_{i \neq l}\varphi_{il}x_i, i = \overline{1;n}, \qquad (1)$$
где x_i – концентрация i-го носителя информации; $F_i;R_i$ – соответственно, скорости образования и убыли x_i; φ_{il} – скорость образования x_i по другим каналам $i \neq l$ передачи информации в рассматриваемой системе.

Система (1) является нелинейной, причем, каждое ее уравнение имеет вид $\dot{x} = f(x)$. Известно [4], что аттракторы такого уравнения достигаются при $t \to \infty$ и являются конечными, поскольку в данном случае $0 \leq x \leq 1$. Учитывая, что в реальности мы всегда имеем дело с распознаванием образов в толерантном пространстве [5], то имеет место нормировка:
$$|x^{\infty} - x| \leq \varepsilon, \qquad (2)$$
где x^{∞}- значение x при $t \to \infty$; ε - некоторая нормировочная константа и, если x удовлетворяет условию нормировки (2), то его рассматривают как ***реальный образ объекта, измеряемый за конечное время с нормированной точностью.***

Ниже в рамках уравнения Эйгена (1) будут построены модели образовательных процессов.

3. Сократовский диалог и концепция развивающего обучения Л.С. Выготского, как составляющие алгоритма учебного процесса.

Сократовский метод обучения в диалоге в общих чертах можно рассматривать, следуя Л.С. Выготскому [6], в рамках представления об уровне актуального развития обучаемого, который с помощью наводящих вопросов постепенно наращивается в пределах зоны ближайшего развития данного обучаемого субъекта. В этом случае, если, например, уровень знаний S' должен быть поднят до уровня S, то процесс обучения описывается последовательностью [3]:
$$S' = S_0';\ S_1' = S_0' \cup \Delta S_0'; S_2' = S_1' \cup \Delta S_1'; ...; S_n' = S_{n-1}' \cup \Delta S_{n-1}' = S, \qquad (3)$$
где $S_k'; \Delta S_k'$ — соответственно уровень актуального и зона потенциального развития на k-м шаге обучения; $k = \overline{0; n-1}$. Таким образом, знание формируется за счет постепенного приращения знаний зоны ближайшего развития.

В терминах квантитативной теории информации последовательность (3) можно выразить следующим рекуррентным (разностным) уравнением:
$$I_{k+1} = I_k + \Delta I_k, \quad k = \overline{0;n} \qquad (4)$$
где I_k — количество информации, соответствующее актуальному уровню знаний обучаемого субъекта на k-ом шаге обучения; ΔI_k — знания, которые активируются путем целенаправленного учебного воздействия на зону потенциального развития уровня I_k данного субъекта и по мере наполнения уровня I_{k+1} в процессе $I_k \to I_{k+1}$ реализуется $(k+1)$-й шаг обучения. При этом знания области ΔI_k по классическим исследованиям [6] представляют функции $\Delta I_k = \Delta I_k(I_k)$ так, что области ΔI_k развиваются на основе имеющегося опыта I_k посредством создания и разрешения соответствующих проблемных ситуаций в учебном процессе.

Зависимости $\Delta I_k(I_k)$ имеют нелинейный характер и таким образом уравнение (4) представляет нелинейное конечно-разностное уравнение 1-го порядка, описывающее итерационный процесс, реализующий разностный аналог уравнения Эйгена (1) при $n=1$.

Для оптимизации развивающего обучения определим информационные характеристики учебного процесса моделируемого процедурой (4). В этом случае переход к уровню знаний I_{k+1} происходит в результате «освоения» области ΔI_k посредством целенаправленного учебного воздействия на зону потенциального развития уровня I_k обучаемого субъекта так, что информационная энтропия в процессе развивающего обучения (4) составит:

$$H = \sum_{k=0}^{n} \Delta I_k \, p_k = -\sum_{k=0}^{n} p_k \, log_2 \, p_k \to \min \ , \qquad (5)$$

где p_k – вероятность усвоения совокупности знаний области ΔI_k. Оптимизация в рамках данной учебной модели строится посредством минимизации информационной энтропии (5), что подразумевает целенаправленное воздействие на вероятности p_k, которые определяются экспериментально с помощью специальных тестовых процедур, методика проведения которых описана в работе [7]. Существенно отметить, что среди современных дидактов существует мнение [8], что условие $p_k \geq 0{,}7$ можно рассматривать как ***математический критерий дидактического принципа завершенности процесса обучения***.

4. Модель согласования системы образования с рынком занятости.

Этот процесс описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = \left(a - cy\right)x\,, \ \frac{dy}{dt} = \left(bx - d\right)y\,, \qquad (6)$$

Модель (6) представляет частный случай уравнения Эйгена (1) при n=2 и сводится к известной модели В. Вольтерра «хищник-жертва» в теории борьбы за существование, в которой процесс эволюции обусловлен видовым освоением геобиосферы Земли [9]. В данном случае «жертвами» и «хищниками», соответственно, выступают продукт системы образования x и рынок занятости y; коэффициенты a и b характеризуют интенсивности выпуска продукта и появления рабочих мест, а коэффициенты c и d – это интенсивность спроса и сокращения нерентабельных производств.

Анализ модели (6) показывает [9], что зависимость численностей рынка занятости и продукта системы образования от времени при взаимодействии имеет периодический характер. При этом оказывается, что из этих зависимостей удается ***оценить скорость процесса, т.е. время, необходимое на воспроизводство рынка занятости.***

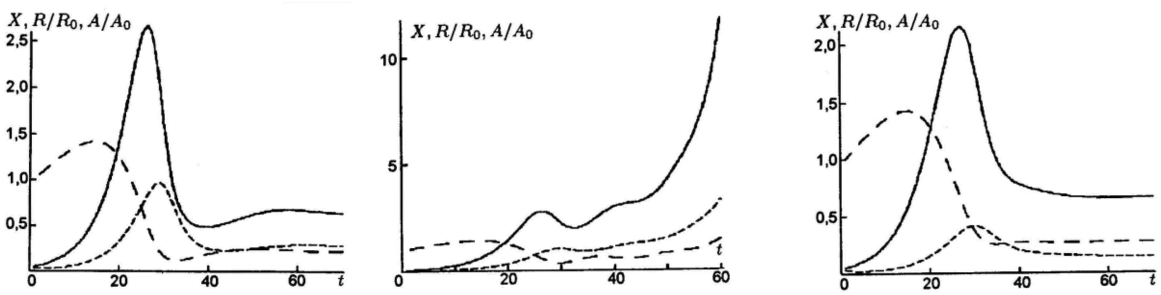
5. Прогноз развития системы образования РФ.

В случае n=3 эффективность прогнозов в рамках модели (1) в 90-х гг. прошлого века была продемонстрирована на системе образования РФ, когда рецепты «шоковой терапии» привели к серьезному сокращению финансовых ресурсов России, что грозило сокращением ассигнований на образование в 2-3 раза [10]. Тогда в 1994 г. со стороны Всемирного банка реконструкции и развития России предложили кредит в размере 2 млрд. долларов на «реструктуризацию системы образования» на весьма жестких условиях [11]. Для экспертной оценки приемлемости условий кредита Министерство образования России по согласованию с Всемирным банком обратилось к специалистам ИПМ им. М.В.Келдыша РАН и ЯГУ им. П.Г.Демидова с целью спрогнозировать последствия этих условий в 5, 10, 20-летней перспективе на уровне макроэкономики.

Исходя из представлений нелинейной динамики, удалось установить [4;12], что экономическое развитие страны укладывается в рамки дискретной 3-параметрической модели: один параметр характеризует ресурсы, другой – ВВП и третий параметр – потенциал науки и образования.

Анализ макромодели показал, что поведение рассматриваемой системы сильно зависит от двух факторов. Первый – это *время запаздывания*: если наука и образование внезапно начнут работать намного лучше, то экономика это почувствует только через 3-5 лет. Второй фактор – это *восприимчивость к инновациям*, который устанавливался по данным статистики ООН: принимая восприимчивость японской экономики за 10 баллов, для экономики США этот фактор оказывается 8 баллов, для Западной Европы – 6 баллов, а для СССР и России – это всего 1 балл.

Результаты реализации макромодели [10] представлены на рис. 1. На рис.1а страна богатая ресурсами планирует индустриализацию и вкладывает деньги в науку. Если при этом экономика невосприимчива в отношении реализации инноваций, то примерно через 20 лет начинается уменьшение ресурсов и в перспективе такая страна выходит на малопродуктивный уровень возобновляемых ресурсов.



а) б) в)

Рис. 1. *Траектории макропараметров экономики (усл. ед.) и влияние инновационной восприимчивости и финансирования интеллектуальной сферы: X – ресурсы (длинный пунктир); R – уровень объема производства (сплошные линии); A – уровень научно-технического потенциала (короткий пунктир); t – время в годах; индекс 0 – отвечает исходному значению параметра.*

Если за счет реформ инновационная восприимчивость экономики увеличена, то возникает ситуация на рис. 1б. В этом случае примерно через 25 лет уровень развития достигает локального максимума, за которым наблюдается непродолжительный спад, обусловленный переходом на новые ресурсы развития (поскольку наука и образование должным образом финансируются), и примерно после 30 лет происходит дальнейший рост, который обеспечивается интеллектуальной сферой. При этом расход ресурсов изменяется довольно слабо (рис. 1б). Однако, если на фазе интенсивного роста (рис. 1б) финансирование науки и образования сократить вдвое, то имеем ситуацию на рис 1в, который не отличается от низко продуктивного режима на рис. 1а.

Насколько повлияли рекомендации российских ученых на принятие решения сказать трудно, но, так или иначе, от этого кредита Всемирного банка отказались. Однако негативный прогноз в отношении инерционного сценария развития российской науки и образования в полной мере не возымел действия и его последствия проявляются в виде снижения качества образования и «утечки мозгов».

Заключение.

Динамика самоорганизации эволюционирующей открытой системы в рамках уравнения Эйгена описывает самые разные явления природы и человеческого бытия. Поэтому исследование свойств данного уравнения открывает путь к познанию и пониманию различных явлений окружающего мира и, таким образом, появляется реальная возможность универсального управления, казалось бы, разными процессами, включая образовательные, что, несомненно, должно использоваться в процессе модернизации отечественной системы образования.

Библиографический список

1. *Пригожин, И.* Самоорганизация в неравновесных системах [Текст] / И. Пригожин, Г. Николис, / – М.: Мир, 1979. – 512 с.
2. *Эйген, М.* Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул [Текст] / М. Эйген / – М.: Мир, 1973. – 214 с.
3. *Фирстов, В.Е.* Кибернетическая концепция и математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в школе и вузе [Текст] / В.Е. Фирстов / – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2010. – 511 с.
4. *Малинецкий, Г. Г.* Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент [Текст] / Г. Г. Малинецкий /– М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 312 с.
5. *Зиман, Э.* Толерантные пространства и мозг // В кн.: На пути к теоретической биологии. Под ред. Б.Л. Астаурова [Текст] / Э. Зиман, О. Бьюнеман / – М.: Мир, 1970. – С. 134-144.
6. *Выготский, Л.С.* Педагогическая психология. Под ред. В.В. Давыдова [Текст] / Л.С. Выготский /– М.: АСТ: Астрель: Люкс, 2005. – 671 с.
7. *Нурминский, И.И.* Статистические закономерности формирования знаний и умений учащихся [Текст] / И.И. Нурминский, Н.К. Гладышева /– М.: Педагогика, 1991.– 224 с.
8. *Беспалько, В.П.* Слагаемые педагогической технологии [Текст] / В.П. Беспалько / – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
9. *Вольтера, В.* Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра /– М.:Наука,1976.–286 с.
10. *Малинецкий, Г. Г.* Синергетика, прогноз и управление риском [Текст] / Г.Г. Малинецкий, С.П. Курдюмов / Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. – М.: Прогресс-Традиция, 2002. – С. 378 - 405.
11. Россия: образование в переходный период [Текст] // Доклад Всемирного банка, 1995. – Всемирный банк: Управление Европы и Центральной Азии, департамент III. Отдел социальных ресурсов. 1995. – 250 с.
12. *Малинецкий, Г. Г.* Выбор стратегии [Текст] / Г. Г. Малинецкий / Компьютерра, №38 (513), 7 октября 2003 г. – С. 25-31.

Теория и классификация педагогических измерений в системе психологических принципов

В.М. Монахов, В.Е. Фирстов

Введение. Разработка теории педагогических измерений (ТПИ) является важным элементом концепции модернизации российского образования, который реализуется в логико-математическом формате, в котором педагогика оперирует передачей определенного вида структурированной информации (знаний). Информация, как основное понятие кибернетики, обладает метрической функцией и, таким образом, поиск оптимального управления образовательными процессами переводится в плоскость математического моделирования. Это означает, что в рамках ТПИ модернизация в системе образования призвана для реализации функции предсказания (прогноза) результатов образовательного процесса. В данной работе делается первый шаг на пути разработки ТПИ, связанный с построением классификации педагогических измерений.

Основные принципы классификации педагогических измерений (КПИ).

Построение КПИ опирается на следующие положения:

• *Антропологический принцип К.Д. Ушинского* [1], по которому психические процессы выступают не как некие «механизмы», а в виде человеческой деятельности, позволяющей характеризовать эти процессы в категории меры. Деятельность как категория в представлении Г.В.Ф. Гегеля – это процесс реализации цели, связанный с превращением идеального в материальное [2]. В диалектическом материализме деятельность понимается как целесообразное действие или система действий человека и, следуя Марксу [3;4], *«все, что приводит людей в движение, должно пройти через их голову…»* Положение о том, что все, что совершается в психической сфере человека, укоренено в его деятельности, в области педагогической психологии было развито А.Н, Леонтьевым [5], по которому *деятельность рассматривается в виде системы, складывающейся из действий субъекта, причем, с каждым действием связана некоторая цель или задача, которым предшествует определенный мотив для реализации этой деятельности.* Вопросы логического обоснования принципов деятельности в педагогике в современной России обстоятельно рассмотрены в недавней монографии А.В. Боровских и Н.Х. Розова [6]. На этой основе в настоящее время разработаны нейросетевые модели, реализующие ту или иную дидактическую деятельность в учебном процессе [7].

• *Принцип экономии мышления Э.Маха* (1885; [8]), характеризующий феноменальную способность человеческого мозга принимать быстрые и достаточно эффективные решения по неполной информации об объекте. Как сейчас установлено (Бьюнеман О., Зиман Э., 1970, [9]), формально это сводится к определению нормы в пространстве распознаваемых образов X, так, что, если существует определенное значение $\varepsilon>0$, для которого

$$|\vec{x}-\vec{x}_0|\le\varepsilon, \quad (1)$$

то представленный образ $\vec{x}\in X$ можно идентифицировать с эталонным образом $\vec{x}_0\in X$, хранящимся в памяти мозга. Можно видеть, что неравенство (1) в пространстве X определяет некоторое бинарное отношение $\tau\subset X\times X$, которое рефлексивно и симметрично, и называется отношением толерантности, а пара $(X;\tau)$ в этом случае образует толерантное пространство. Если же такой эталонный образец $\vec{x}_0\in X$ в памяти мозга отсутствует (анализируется новый объект), то включается механизм *саморганизованной критичности* (см. ниже).

• *Открытие функциональной специализации полушарий головного мозга человека* (Р. Сперри. Нобелевская премия, 1981, [10]) позволило установить фундаментальный результат, касающийся специфики механизмов мышления в полушариях мозга в процессе обработки информации: левое полушарие реализует логически последовательную обработку информации, создавая непротиворечивую формализованную модель объективной реальности, тогда как для правого полушария свойственно пространственно-образное восприятие объектов и их интуитивное распознавание. Симбиоз этих двух полушарных представлений в сознании порождает целостное представление об интересующем объекте. Поэтому можно полагать, что механизмы мышления следуют рамкам логики принципа дополнительности, когда разрешение противоречий в процессе мышления происходит не путем отрицания одной из противоположностей, а в более мягком варианте, при котором в формировании целостного представления, так или иначе, задействованы обе противоположности, дополняя друг друга. Здесь мы имеем дело с известным натурфилософским тезисом Аристотеля: «От менее явного по природе (а для нас более явного) к более явному и известному по природе» [11].

• ***Принцип самоорганизованной критичности.* Поведение мозга рассматривается в рамках открытой динамической нейросетевой модели, находящейся вблизи**

неустойчивого критического состояния, так, что ее фазовые траектории в экспериментах, обнаруживают фрактальные свойства [12] и мозг приобретает чрезвычайную чувствительность к изменению как внешних стимулов, так и внутренних психических процессов, переходя практически синхронно от одной формы поведения к другой.

Данная система психологических принципов реализует тринитарную методологию познания Гегеля «тезис-антитезис-синтез» [2], включая интуитивный вывод (инсайт).

Построение классификации педагогических измерений. **Основные принципы классификации педагогических измерений отражают вполне определенные свойства психологии человека, в которой выделяются** ***два типа логического мышления – формальное и интуитивное*****, определяющие классификацию по типу логики, реализуемой в процессе измерения рассматриваемого объекта.**

1. Посредством формального логического мышления в рамках определенной деятельности проще всего провести измерения, связанные с переналадкой или внутримодельным исследованием в дидактике, следуя тринитарной информационной концепции А.Н. Колмогорова, который в области квантитативной теории информации выделял три подхода [13]:

- *Количество информации по К. Шеннону на основе стохастическойой меры* [14]. В рамках такого подхода управление учебным процессом происходит по принципу минимизации информационной энтропии данного процесса. Такой подход успешно реализован в рамках ИКТ при оптимизации группового сотрудничества в процессе обучения, а также в модели развивающего обучения для эффективного формирования дидактического контента по шагам траектории обучения [15].
- *Алгоритмическое количество информации по А.Н. Колмогорову* [13], позволяющее моделировать сложность алгоритма обучения, например, при оптимизации логических доказательств [13].
- *Топологическое количество информации по Н. Рашевскому* [16], реализующее на языке покрытий оптимизацию тематических разделов при подготовке учебного контента или в рамках модульного обучения [15].

Как видим, если алгоритмическое и топологическое количества информации строятся по детерминированной мере (соответственно, по длине алгоритма или диаметру элементов покрытия), то количество информации по Шеннону определяется по стохастической мере, однако в рамках формально логического мышления, следуя аксиоматике теории вероятностей А.Н. Колмогорова (1936, [17]). При этом измеряемые объекты обладают универсальной мерой: в случае измерения количества информации по Шеннону – это биты (или байты); алгоритмическое или топологическое количества информации измеряются длиной алгоритма или диаметром покрытий.

2. Открытие объектов с неординарной метрикой.

На протяжении XIX – начале XX вв. обнаруживались объекты, измерения которых не укладывались в рамки стандартных метрических процедур, т.е. объект, либо обладал оригинальной мерой измерения, либо она отсутствовала вовсе. Поначалу, такие объекты обнаружились в математике в виде функций, не имеющих производной ни в одной точке области определения, и первый такой пример построен еще в 1830 г. замечательным чешским математиком Бернардом Больцано (1781-1848) [18]. Другой характерный пример связан с одним из основоположников теоретико-множественной концепции в математике выдающимся немецким математиком Г. Кантором (1845-1918), который в 1883 г. рассмотрел множество всех точек сегмента *[0;1]*, имеющих разложение в троичную систематическую дробь, состоящую только из *0* и *2* [19]. При этом обнаружился парадоксальный результат – из данного сегмента выделяется некоторое подмножество, которое нигде не плотно и, в то же время, имеет мощность континуума!

Природа парадоксов такого рода связана с замечательной теоремой, доказанной в 1930 г. С. Мазуркевичем и С. Банахом [20], которая, по сути, утверждает, что класс объектов, измерение которых укладывается в рамки универсальных стандартных метрических процедур, крайне мал, т.е. большинство объектов природы при измерении, так или иначе, требуют оригинальных метрических процедур.

3. Примеры объектов с неординарными метрическими свойствами.

Пример 1. Может ли замкнутая линия иметь бесконечную длину ?

Ответ утвердительный и связан с так называемой звездой Коха. Для этого сперва строится так называемая кривая Коха [21], представленная на рис. 1, где сначала на шаге $n=0$, берется единичный отрезок; на шаге $n=1$ посредине отрезка вырезается интервал длиной $1/3$, на котором строится правильный треугольник без основания; на шаге $n=2$ на каждом из четырех, полученных ранее отрезков, вырезается интервал длиной $(1/3)^2$ и проводится то же построение, что и на предыдущем шаге и т.д. Кривая Коха получается предельным переходом $n \to \infty$ в данной процедуре построений и, как легко убедиться,

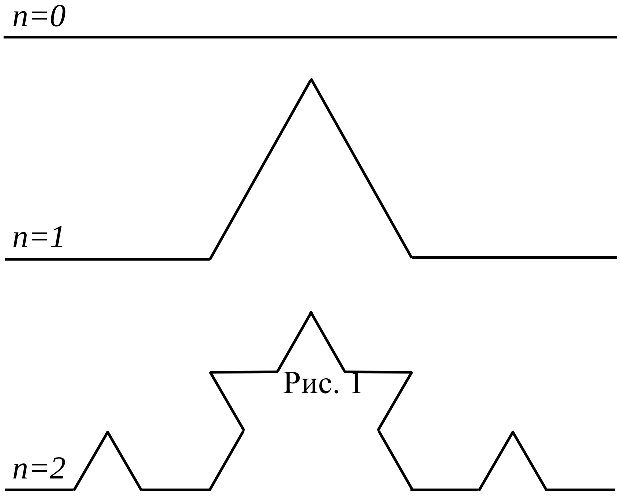


Рис. 1

непрерывна во всех точках, но ни в одной из них не имеет касательной, т.к. имеет излом в каждой точке. Представим теперь правильный треугольник, стороны которого последовательно преобразуются с помощью описанной процедуры (рис.1). Тогда элементарные вычисления показывают, что после n-го шага таких преобразований образуется замкнутая ломаная с периметром $3(4/3)^n$ и, как видим, это соотношение с ростом n неограниченно возрастает, так, что в пределе получается непрерывная замкнутая линия с бесконечным периметром, именуемая звездой Коха.

Пример 2. Процедура измерений объектов с неординарной метрикой оказывается гораздо сложнее, поскольку в этом случае размерность уже не укладывается в рамки традиционных топологических представлений и корректно может проводиться на основе меры Ф. Хаусдорфа, задающей нормировку для единиц измерения [22]. Игнорирование этого факта означает некорректное измерение и может служить источником межгосударственных противоречий, как это случилось, например, между Испанией и Португалией [21]. Так, по измерениям испанцев, длина общей границы между этими государствами составила 987 км, а у португальцев она получилась 1214 км. Как выяснилось, возникшая разница обусловлена различными мерами длины, используемыми сопредельными государствами при измерениях протяженности границы, линия которой не является спрямляемой кривой. В продолжение темы, экспериментальные измерения длины береговой линии Великобритании, побережье которой сильно изрезано, обнаружили замечательный факт – в таких измерениях всегда имеется определенный диапазон мер длины (~10 м.), при использовании которых длина измеряемой линии остается инвариантной, что означает корректность проведенного измерения. Таким образом, измерение фрактальных объектов в рамках концепции Хаусдорфа имеет прямое опытное обоснование.

Пример 3. Школьные методы контроля знаний и результаты ЕГЭ.

Мера неопределенности измерения в теории информации определяется информационной энтропией, которая является экстенсивной величиной [13;14]. Поэтому неопределенность (энтропия) в педагогическом измерении является возрастающей функцией объема проверяемого учебного материала и размера тестируемой аудитории. Следовательно, *если, например, речь идет о контроле знаний по предмету в некотором школьном классе, то минимальная неопределенность в оценках будет наблюдаться при текущем контроле знаний, которая возрастает при периодическом контроле и приобретает максимальную величину при итоговом испытании при переводе в следующий класс.* Важно подчеркнуть, что при такой организации в промежутках между контрольными мероприятиями, при необходимости, легко провести корректировку знаний. *Ситуация однако сильно меняется, если речь идет о выпускном классе полной общеобразовательной средней школы, когда в качестве итогового испытания используется ЕГЭ. В этом случае, по сравнению с обычной процедурой проведения школьных выпускных экзаменов, неопределенность результатов ЕГЭ колоссально возрастает, т.к. размер аудитории, тестируемой в рамках ЕГЭ, в современной России составляет около миллиона школьников.* В этом случае неоднородности по уровню знаний в российском образовании порождают неопределенности, связанные с решением проблемы оптимального выбора уровня трудности и сложности тестовых заданий ЕГЭ, который бы оказался универсальным для российских школ. Но в данном случае, в силу фрактальной специфики, выраженной психологическим компонентом образовательного пространства, такой универсальной меры не существует и, следовательно, основной постулат ЕГЭ, связанный с обеспечением равных возможностей абитуриентам при поступлении в любой вуз России, ставится под сомнение.

4. Посредством интуитивного логического мышления в педагогике происходит генерация творческой деятельности за счет чрезвычайной чувствительности на изменение внешних стимулов и внутренних психических процессов, реализуя сценарий *интуитивного логического вывода.*

Имеющиеся исследования механизмов интуитивных процессов [23;24] пока позволяют составить только самые общие представления о специфике таких процессов, выделяя следующие моменты:

1). Интуитивное мышление возникает только на основе знаний и опыта, а потому главную роль здесь играет эффективная организация оперативной памяти, например, в виде нейросетей, реализующих параллельные алгоритмы обработки информации. Фактически, за счет фрактальной организации нейросетевых структур (гештальтов), человеческий мозг обеспечивает исключительно эффективную деятельность при решении огромного количества задач [25].

2). Интуитивное постижение истины происходит на более высоком уровне интеллекта, чем это имеет место при формальном логическом мышлении, т.к. акт интуитивного озарения (инсайт) происходит намного быстрее формального вывода.

3). Интуитивный вывод не всегда является истинным и, следовательно, ход интуитивных процессов не описывается в рамках формальной логики.

Последнее связано с теоремой Геделя о неполноте и говорит о том, что *интуитивный вывод носит неалгоритмический характер.* Иными словами, постижение истины не обязательно происходит в рамках некоторой формальной системы, а может выражаться посредством некой разновидности общей процедуры принципа рефлексии.

Некоторые подходы по оптимизации творческой деятельности в процессе обучения обозначены в работе [26;27] в рамках стохастической модели формирования информационного пространства дедуктивной теории для реализации эффективного креативного поиска в области математики. Для этого разработана и апробирована так называемая GMP-стратегия (great main points – большие узловые точки), построенная на основе данных психологии о нейросетевой структуре мозга [28].

5. Процедуры педагогических измерений, построенные в рамках интуитивного логического мышления.

В примерах 1-3 рассмотрены объекты с неординарными метрическими свойствами, измерение которых в настоящее время, в основном, проводится следующими методами:

- *Методы, основанные на фрактальных представлениях*, опираются на концепцию размерности по Хаусдорфу, которая математически корректно изложена в работе [22], но для понимания требует довольно высокого уровня математической подготовки. Поэтому, без особого методического ущерба, следуя Б.Мандельброту[21], слегка упростим ситуацию, сохранив, однако, ее общий смысл.

Пусть измеряется длина L некоторой линии методом спрямления с шагом r. Тогда $L=N(r)r$, где $N(r)$ – количество шагов длины r, укладывающихся на данной линии. При $r \to 0$, очевидно, $N(r) \to \infty$, и тогда, если $N(r) \sim 1/r$, то $L \to L_0$, где $L_0 \in (0;\infty)$ и представляет искомую длину рассматриваемой линии в случае, когда эта линия спрямляема. Если же это условие не выполняется, то значение $N(r)$ растет быстрее, чем $1/r$, и в результате при $r \to 0$ получается $L \to \infty$, как это, например, имело место для ранее рассмотренной кривой Коха (пример 1). В реальности, как выяснилось [21], чаще наблюдается именно последний случай и, например, данные по измерениям береговой линии Великобритании хорошо аппроксимируются следующей зависимостью:

$$L = C\,r^{1-D}, \tag{2}$$

где постоянная $C > 0$ представляет форм-фактор данной линии; постоянная $D \geq 1$, по Мандельброту [21], является фрактальной размерностью этой линии. В случае $D=1$ из (2) получается $L=C$, что соответствует случаю спрямляемой кривой. Однако, реально, для береговых линий получалось $1< D < 2$, т.е. рассматриваемые линии не являлись спрямляемыми и. таким образом, относится к классу фрактальных кривых. Из соотношения (2) после логарифмирования и перехода к приделу получается следующее выражение для фрактальной (хаусдорфовой) размерности:

$$D = \lim_{r \to 0}\left(-\ln N(r)/\ln r\right), \tag{3}$$

где $N(r)=L/Cr$ и имеет смысл мощности минимального покрытия данного множества подмножествами с характерным размером r. В частности, для кривой Коха из примера 1, согласно (3), получается $D=\ln 4/\ln 3 \approx 1{,}262$, т.е. фрактальная размерность оказывается дробной величиной, большей топологической размерности этой линии, равной $d=1$.

Заметим, что в данном примере получается неравенство $d < D$, которое, по современным представлениям, является формальным определением фрактала. Также добавим, что сам термин "фрактал" (от лат. fractus – изломанный, дробный) ввел в употребление в 1975 г. американский математик Бенуа Мандельброт из Исследовательского центра имени Томаса Дж.Уотсона корпорации IBM. Под этим интуитивно понимается некая структура, части которой, в каком-то смысле, подобны целому [21], т.е. фрактал представляется в виде произвольной структурированной системы, обладающей определенной метрической инвариантностью (скейлингом), выражающей свойство самоподобия данной системы в том смысле, что ее части обладают теми же инвариантами, как и сама система. При этом неправильно думать, что фракталы – это объекты, обладающие только дробной размерностью, имея в виду, скажем, кривую Пеано, для которой $D = 2$, $d=1$ [19].

• *Методы на основе представлений нечеткой логики* возникли в 70-х гг. прошлого века в виде концепции лингвистической переменной у Л.Заде [29] и в эквивалентной форме нечетких множеств у А. Кофмана [30]. Данный подход, фактически, представляет некоторую разновидность управления в условиях неопределенности, т.к. управление образовательным процессом связано с передачей информации в виде знаний, которые не всегда могут быть описаны точно и, как следствие, результаты педагогических измерений обычно имеют некоторую долю неопределенности, которая в этом случае выражается в терминах меры нечеткого множества. Смысл термина «нечеткость» также нечеткий, но, обычно [31], под этим подразумевают недетерминированность выводов, многозначность, ненадежность, неполноту и нечеткость или неточность.

Согласно [29-31], нечеткое множество A определяется на некоторой числовой предметной области X в виде множества пар $(\mu_{\tilde{A}}(x); x \in \tilde{O})$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – степень принадлежности элемента $x \in X$, представляющая функцию $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0;1]$, которая задается графически, аналитически или таблично.

В рамках концепции нечетких множеств, формально, можно построить алгебру и логику, однако полностью корректно это сделать невозможно, поскольку логические и множественные операции с нечеткими объектами задаются с использованием экспертных оценок. Тем не менее, нечеткое моделирование в настоящее время применяется при решении задач классификации или управления, в частности, даже в банковском деле при отслеживании кредитоспособности клиентов [31].

6. Примеры реализации педагогических измерений на основе фрактальных и нечетких мер.

Пример 4. Ранговые корреляции профессиональной направленности ЕГЭ-респондентов в Саратовской области (2009-2011).

В табл.1 представлены данные о профессиональной направленности ЕГЭ-респондентов, полученные по результатам ЕГЭ в Саратовской области в 2009-2011 гг. [33] посредством ранжировки значимости предметов по числу респондентов, избравших данный профильный ЕГЭ (в скобках % от общего количества выпускников).

Анализ данных табл.1, проведенный в работе [33], показывает, что имеют место ранговые корреляции с количеством респондентов по профильным предметам. Результаты анализа в двойных логарифмических координатах представлены на рис.2, откуда видно,

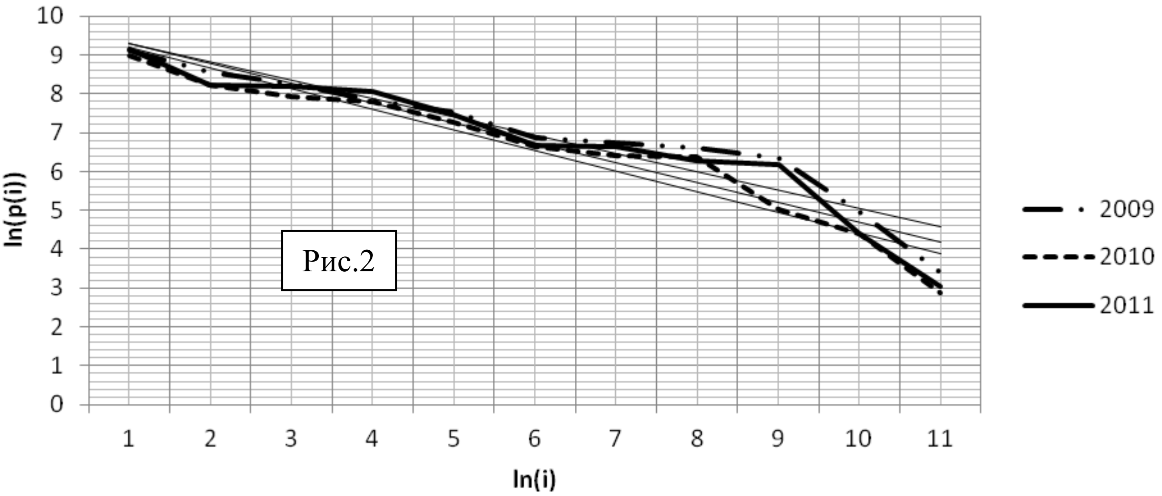
Таблица 1. Данные о профессиональной направленности ЕГЭ-респондентов в Саратовской области в 2009-2011 гг.

Ранг	Кол-во респонд.	Предмет 2009 г.	Ранг	Кол-во респонд.	Предмет 2010 г.	Ранг	Кол-во респонд.	Предмет 2011 г.
1	9041	Обществознание	1	8032	Обществознание	1	9313	Обществознание
2	5120	История	2	3757	История	2	3764	История
3	3869	Физика	3	2776	Физика	3	3631	Физика
4	2513	Биология	4	2462	Биология	4	3131	Биология
5	1834	Химия	5	1410	Химия	5	1735	Химия
6	968	Инф-ка и ИКТ	6	775	Инф-ка и ИКТ	7	785	Литература
7	850	Литература	7	612	Литература	6	763	Инф-ка и ИКТ
8	742	Англ. язык	8	589	Англ. язык	8	536	Англ. язык
9	564	География	9	151	География	9	486	География
10	144	Немецкий язык	10	80	Немецкий язык	10	80	Немецкий язык
11	30	Франц. язык	11	18	Франц. язык	11	21	Франц. язык

что измеренные результаты ЕГЭ аппроксимируются прямыми,

$$\ln p(i) = \ln K - \gamma \ln (B + i), \quad (4)$$

где i – ранг значимости предмета; $p(i)$ – частота выбора i-го предмета; постоянные B, K и γ находятся методом наименьших квадратов по данным табл.1.Для результатов ЕГЭ-2009 получается $K=11{,}07$, $\gamma=2{,}13$;для ЕГЭ-2010: $K=11{,}04$, $\gamma=2{,}20$ и во всех случаях $B=0$.



Соотношение (4) – это хорошо известный частотный закон Ципфа-Мандельброта (Ц-М) [21], откуда получается:

$$\gamma = (\ln K/p(i))/\ln(B+i), \qquad (5)$$

т.е. величина γ в данном случае представляет фрактальную размерность по Хаусдорфу для измеряемого объекта, как это можно видеть, сравнивая (5) с формулой (3) п.5 .

Анализ данных табл.1 и рис.2 говорит о том, что при проведении ЕГЭ в Саратовской области в 2009-2011 гг. наблюдались ранговые корреляции профессиональной направленности ЕГЭ-респондентов, аппроксимируемые законом Ц-М. Видно, что коэффициенты $B;K;\gamma$ за данный период изменились слабо, и «лидируюшая» группа предметов *обществознание--история--физика--биология—химия* сохранилась. Относительно первенства обществознания более тонкие соображения говорят о том, что для многих выбор этого предмета руководствовался не профессиональным выбором, а соображениями прагматического характера (приема в вуз, возможности реализации на рынке труда, величины зарплаты, карьерного роста и т.п.) [33]. Косвенно, это также подтверждается результатами ЕГЭ-2012 [34], по которым «лидирующая» группа изменилась и приняла следующую конфигурацию: *обществознание--физика--биология—история--химия.* Таким образом, профессиональные предпочтения ЕГЭ-респондентов перемещаются в область естественных наук.

Пример 5. Нечеткие измерения в процессе обучения.

Традиционно процедура педагогической диагностики включает текущий, периодический и итоговый контроль знаний учащихся или студентов, результаты которых определенным образом оцениваются по некоторой шкале. Эти оценки несут некоторую долю субъективизма, тем не менее, *у достаточно опытного педагога по этим данным обучаемый контингент довольно быстро ранжируется по уровню знаний и успеваемости, например, на «сильных», «средних», «слабых» и «очень слабых» учащихся, причем, такая ранжировка часто дает довольно устойчивую объективную картину.*

Пример 6. Различие между нечеткими и стохастическими мерами.

Т.к., по определению (п.5), $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0;1]$, то, резонно звучит вопрос, о различии между нечеткостью и вероятностью. Эта разница особенно хорошо видна из следующих соображений [32]:

Пусть X – множество всех жидкостей, $A; \bar{A}$ – множества жидкостей, соответственно, пригодных и не пригодных для питья, Степень принадлежности ключевой воды множеству A равна *1*, множеству $\bar{A}$ равна *0*. Тогда степень принадлежности соляной кислоты множеству

A равна 0, а степень принадлежности множеству $\bar{A}$ равна 1. Речную воду можно отнести к питьевой со степенью $0{,}6$, а к не питьевой – со степенью $0{,}4$ и пусть сосуд C наполнен этой водой.

Пусть мы извлекли сосуд $Д$ из корзины, содержащей 10 сосудов, 6 из которых наполнены ключевой водой, а остальные 4 – соляной кислотой. Вероятность извлечь сосуд с ключевой водой, очевидно, равна $0{,}6$. Если предстоит выбрать один из следующих сосудов: _сосуд С:_ $\mu_{A}(C) = 0{,}6$ или _сосуд Д:_ $P_{A}(C) = 0{,}6$. Что бы Вы выбрали, если $\mu_{A}(C)$ – степень принадлежности содержимого сосуда C множеству A, $P_{A}(C)$ – вероятность извлечения сосуда с питьевой водой? Вопрос, как говорится, риторический!

Заключение.

Большинство педагогических измерений обладают достаточно высоким уровнем субъективизма, т.е. это дидактические объекты, обладающие оригинальной мерой. Таким объектом, например, может быть творчество учителя или некоторый обучаемый контингент, которые, практически всегда, представляют уникальные объекты, хотя могут иметь и некоторые сходства. В процессе модернизации системы образования РФ создание надежной системы педагогических измерений является одним из приоритетов, обеспечивающих реализацию оптимального управления этим процессом. Поэтому в области педагогической метрологии различными подразделениями Минобрнауки РФ (ФИПИ, Рособрнадзор, ряд институтов РАО) проводятся определенные мероприятия, однако существенных продвижений в данном направлении не происходит и, например, разработка Общероссийской системы оценки качества образования (ОСОКО) находится в подвешенном состоянии.

Более того, за период новой России принято три поколения ФГОС в области ВПО и два поколения ФГОС в среднем образовании, однако каких-либо ощутимых положительных общественных результатов это не дало. А причина этого кроется в гениальной фразе А.С. Пушкина: «Служенье муз не терпит суеты». В этой фразе лежит глубокий *синергетический смысл* – чрезмерное увлечение реформами привело к тому, что система образования, после очередного эксперимента, пребывает в некотором неравновесном состоянии, когда процессы самоорганизации в данной открытой системе полностью пройти не успевают, а вновь накатывающаяся реформа, попросту, смывает значительную часть ранее полученного положительного опыта.

На наш взгляд, выход из этого положения требует расширения методологического арсенала педагогической науки до уровня, отвечающего реалиям развития современной России. Поскольку система образования является открытой системой, то в качестве такой методологии выступают принципы синергетики [35], что позволяет реализовать теорию педагогических измерений (ТПИ) в логико-математическом формате так, что решение этого вопроса происходит в рамках концепции морфизма. С другой стороны, качество системы образования имеет внешние измерения, обусловленные аксиологическим (ценностным) аспектом образования. Этот показатель имеет два измерения:

- Востребованность продукта образования на рынке труда РФ, обеспечивающая достойный уровень жизни подрастающего поколения.
- Достойный уровень жизни педагогического корпуса системы образования РФ, обеспечивающего необходимую подготовку этого продукта.

Согласованное оптимальное управление внешними и внутренними параметрами системы образования обеспечивает поступательное развитие России и должно быть государственным приоритетом [35].

Библиографический список

1. *Ушинский, К.Д.* Человек как предмет воспитания [Текст] / К.Д. Ушинский / Собрание сочинений. Т.8. – М.-Л.: Изд-во АПН, 1950. – 776 с.
2. *Гегель, Г.В.Ф.* Наука логики. Т.1. Раздел второй. Учение о сущности. Часть С. Действительность. §§ 142-148. [Текст] / Г.В.Ф. Гегель / Энциклопедия философских наук. Т.1. М.: Мысль, 1975. – С. 312-327.
3. *Маркс, К.* Тезисы о Фейербахе. [Текст] / К. Маркс / Приложение в кн.: Ф. Энгельс. Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии. – М.: Политиздат, 1972. – С. 56-59.
4. *Энгельс, Ф.* Роль труда в процессе превращения обезъяны в человека. [Текст] / Ф. Энгельс / В кн.: Ф. Энгельс. Диалектика природы. – М.: М.: Политиздат, 1975. – С. 144-156.
5. *Леонтьев, А.Н.* Проблемы развития психики [Текст] / А.Н. Леонтьев /– М.: Мысль,1965. – 572 с.
6. *Боровских, А.В.* Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика [Текст] / А.В. Боровских, Н.Х. Розов / – М.: МАКС Пресс, 2010. – 80 с.
7. *Фирстов, В.Е.* Семантические сети и эффективное формирование математического знания [Текст] / В.Е. Фирстов / Труды V-х Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 172-182.
8. *Мах, Э.* Анализ ощущений и отношение физического к психическому [Текст] / Э. Мах /– М.: Издательский дом «Территория будущего», 2005. – 304 с.
9. *Зиман, Э.* Толерантные пространства и мозг [Текст] / Э. Зиман, О. Бьюнеман / В кн.: На пути к теоретической биологии. Под ред. Б.Л. Астаурова. – М.: Мир, 1970. – С. 134-144.
10. *Чолаков, В.* Нобелевские премии.Ученые и открытия [Текст] / В. Чолаков /– М.:Мир,1987.–368 с.
11. Аристотель. Физика [Текст] – М.: ГСЭИ, 1937, с. 3.
12. Пер, Бак Самоорганизованная критичность [Текст] / Пер Бак, Кан Чен. / В мире науки, 1991, №3. – С.16-24.
13. *Колмогоров, А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» [Текст] / А.Н. Колмогоров / Проблемы передачи информации, 1965, т.1, №1. – С. 3-11.
14. *Шеннон, К.* Работы по теории информации и кибернетике [Текст] / К. Шеннон / – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.
15. *Фирстов, В.Е.* Кибернетическая концепция и математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в школе и вузе [Текст] / В.Е. Фирстов / – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2010. – 511 с.
16. *Rashevsky, N.* Live, Information Theory and Topology [Текст] / N. Rashevsky / The Bulletin of Mathematical Biophysics. – Chicago, 1955, V.17, №3. – P. 25-78.
17. *Колмогоров, А.Н.* Основные понятия теории вероятностей [Текст] / А.Н. Колмогоров / – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 80 с.
18. *Больцано, Б.* Учение о функциях (отрывок) [Текст] / Б. Больцано / В кн.: Кольман Э.: Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – с. 205-211.
19. *Александров, П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию [Текст] / П.С. Александров / – М.: Наука, 1977. – 368 с.
20. *Медведев, Ф.А.* Очерки истории теории функций действительного переменного [Текст] / Ф.А. Медведев / – М.: Наука, 1975. – с. 219.
21. *Мандельброт, Б.Б.* Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б.Б. Мандельброт / – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 666 с.
22. *Hausdorff, F.* Dimension und ausseres Mass [Текст] / F. Hausdorff / Matematische Annalen, 1919, Bd. 79. – SS. 151-179.

23. *Бруннер, Дж.* Процесс обучения [Текст] / Дж. Бруннер / – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – С. 53-64.
24. *Пенроуз, Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики [Текст] / Р. Пенроуз / – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 400 с.
25. *Малинецкий, Г. Г.* Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент [Текст] / Г. Г. Малинецкий / – М.:Издательство ЛКИ, 2007.–312 с.
26. *Фирстов, В.Е.* Стохастическая модель построения информационного пространства дедуктивной теории и оптимизация исследовательской работы в области математики [Текст] / В.Е. Фирстов / Вестник Саратовского госуд. техн. ун-та,2006, №4 (17),вып.2.– С. 13-21.
27. *Фирстов, В.Е.* Семантические сети и эффективное формирование математического знания [Текст] / В.Е. Фирстов / Труды V-х Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 172-182.
28. *Glaser, R.* Education and thinking: The role of knowledge [Текст] / R. Glaser / Amer. Psychologist., 1984,V.39, №2. – P. 93-104.
29. *Заде, Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. Заде / – М.:Мир,1976.–165 с.
30. *Кофман, А.* Введение в теорию нечетких множеств [Текст] / А. Кофман / – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
31. Представление и использование знаний: Пер. с япон. / Под ред. Х. Уэно, М. Исидзука [Текст] – М.: Мир, 1989. – 220 с.
32. *Пегат, А.* Нечеткое моделирование и управление [Текст] / А. Пегат / – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.
33. *Фирстов, В.Е.* Ранговые корреляции профессиональной направленности результатов ЕГЭ в Саратовской области (2009-2011 гг.) [Текст] / В.Е. Фирстов, Р.А. Иванов / Материалы Междунар. науч. конф.: Компьютерные науки и информационные технологии. 1-4 июля 2012 г. (Саратов, Россия) – Саратов: ИЦ «Наука», 2012. – С. 123-129.
34. Оценка качества образования в Саратовской области (по результатам сдачи ЕГЭ в 2012 году) [Текст] : Сборник аналитических материалов. (1 этап). Часть 1. / Отв. редактор – Гончарова Г.А. – Саратов: ГКУ СО «РЦОКО», 2012. – 95 с.
35. *Монахов, В.М.* Дидактический потенциал синергетического подхода к формированию общенаучного методологического основания модернизации образования [Текст] / В.М. Монахов, В.Е. Фирстов / Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование. – МГУ им.М.В. Ломоносова, 8-10 ноября 2013. – С. 108-123.

Основные направления реализации концепции развития математического образования

В.А. Тестов

Как известно, роль математического образования в обществе исключительно велика. Эта роль определяется значением математики и как элемента современной культуры и как средства развития интеллектуальных качеств подрастающего поколения и как основы конкурентоспособности России в XXI веке, необходимого элемента безопасности страны. Математическое образование является одной из немногих стержневых составляющих воспитания, является рычагом, который в добрых и умных руках педагога многое «переворачивает» и формирует в юном сознании, позволяя лучше ориентироваться в современном нестабильном мире.

Эта роль математического образования осознана руководством России и поэтому правительством принята концепция развития математического образования. Согласно этой концепции для каждого ребенка должен индивидуально проектироваться его «коридор ближайшего развития». Понятие «ребенок, не способный к математике» должно исчезнуть из лексикона учителей, родителей, школьников и общества.

Авторы концепции выделили в качестве основной проблемы математического образования низкую мотивацию школьников и студентов, что связано с недооценкой математического образования и перегруженностью программ техническими элементами и устаревшим содержанием.

Исследования показывают, что основными факторами, оказывающими отрицательное воздействие на отношение учащихся к изучению математики, являются следующие: необходимость решения большого количества задач со сложными выкладками (70% учеников); скучность, не эмоциональность предмета (65%); необходимость постоянной опоры на прошлый опыт (60%); большое количество непонятных терминов, символов, определений, которые необходимо запомнить (65%). Наиболее часто нелюбовь к математике проявляется при изучении ее некоторых разделов, в частности такого раздела, как тригонометрия, особенно при изучении обратных тригонометрических функций. Это еще раз подчеркивает тесную связь проблемы мотивации с проблемой содержания математического образования, которое продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни.

Психологические исследования В.А. Крутецкого выявили феномен предметной избирательности мотивации по отношению к математической деятельности. Необходимость учета специфики предметного содержания при внедрении тех или иных педагогических технологий подчеркивалась многими известными методистами. В частности, А.А. Столяр указывал, что вызвать интерес к предмету, очевидно, нельзя без учета специфики предмета, и эта педагогическая проблема решается по-разному для различных учебных предметов.

Таким образом, основной педагогической проблемой при изучении математики в общеобразовательной школе становится развитие учебной мотивации. К числу факторов, определяющих положительное отношение учащихся к математике, как отмечает М.А. Родионов [1], относятся: возможность подумать при решении нестандартных задач (50% учащихся); решение занимательных задач, исторические экскурсы, научно-популярная информация (60% учащихся); математика необходима для продолжения образования (48% учащихся средних классов и 79% старшеклассников); объективность, доказательность, точность и универсальность математики (40% учащихся средних классов и 55% старшеклассников).

Была также выявлена как у школьников, так и у студентов-математиков, предпочитаемость символических и графических форм предъявления информации по сравнению с вербальной формой. Эта закономерность лежит в основе такого способа развития познавательного интереса как обеспечение наглядности обучения математике. Поэтому важную роль в развитии познавательного интереса может сыграть теория наглядного моделирования в обучении математике, созданная ярославским ученым Е.И. Смирновым на основе различных теорий наглядного обучения [2].

Для развития познавательного интереса могут использоваться и другие известные приемы: занимательность; стимулирование творческого подхода, инициативы и самостоятельности в познании; создание позитивной психологической атмосферы, ситуации успеха в познавательной деятельности. Однако этих, вполне обоснованных и проверенных практикой классических приемов, недостаточно при организации изучения математики. В современных условиях, как отмечено в концепции, в основной школе интерес к математике должен поддерживаться многообразием ее приложений, а также компьютерными инструментами и моделями. Тем самым проблема развития интереса к изучению математики также тесно увязывается с оптимальным решением проблемы содержания образования.

Целостность содержания бучения достигается лишь при динамическом балансе всех компонент триады: фундаментальности, гуманистической ориентации и практической (прикладной, профессиональной) направленности. В истории образования имелись попытки нарушения баланса между этими тремя компонентами, в частности попытки положить в основу обучения практику. Однако все они заканчивались неудачей, ибо становилось очевидным разрушение в этом случае фундаментальности обучения.

Фундаментализация образования и коррекция его содержания в сторону более тесной связи с современной наукой в первую очередь необходима потому, что фундаментальное образование имеет стратегический характер, генерирует отложенные знания. Как раз освоение фундаментальной, принципиальной стороны дела было сильной стороной российского образования. Эта традиция сложилась еще до революции и, к счастью, не была утрачена, хотя сейчас делаются попытки ее разрушить в угоду утилитарному образованию.

Содержательная сторона математического образования должна быть ориентирована не столько на узко понимаемые сегодняшние потребности, сколько на стратегические перспективы, на видение многообразия ее приложений, широкого применения в современном обществе математических моделей. Тем самым ставится задача приближения содержания обучения математике к современной науке. В математике возникли новые важные разделы, требующие своего внедрения, как в вузовскую, так и в школьную программу по математике (теория графов, теория кодирования, фрактальная геометрия, теория хаоса и др.). Эти новые направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом. Однако высказанные в печати целым рядом крупных математиков современности пожелания об обновлении школьного курса математики, включения в него новых важных математических идей и освобождении его от некоторых технических и архаичных вопросов вызывают эмоциональные возражения со стороны представителей так называемой «абитуриентской математики» и обвинения в попытке нарушить традиции отечественного математического образования [3].

В истории образования содержание школьного курса математики неоднократно менялось. Любое изменение всегда было предметом острых дискуссий. Содержание курса математики – очень болезненный и неоднозначный вопрос, взгляды на который у разных ученых, педагогов, учителей могут сильно различаться.

Так высказывается мнение, что школьная математика – это культурно-историческая традиция, она передается из поколения в поколение (классический пример – евклидова геометрия). Традиция – вещь устойчивая, и школа все равно не примет радикальных новшеств. Рано или поздно она вернется к испытанным способам трансляции культурных образцов прошлого. Поэтому, по его мнению, целесообразно никаких реформ не проводить.

С такой точкой зрения нельзя согласиться. Математическая культура, как часть общечеловеческой культуры, все время развивается и накапливается. Разумеется, это необходимо учитывать и в содержании обучения.

Разумеется, надо бережно относиться к традициям. Однако в образовании помимо традиций всегда были, есть и будут инновации и необходимо правильно решить вопрос об их соотношении. Необходимость и неизбежность взаимосвязи инноваций и традиций в развитии педагогических систем вроде бы ни у кого не вызывают сомнений. Но на практике, как правило, сбалансированность этой связи нарушается то в одну, то в другую сторону. Инновации и традиции – это два полюса мира образования. Они оба должны служить ориентирами в развитии педагогической науки и практики.

В настоящее время наметился определенный разрыв между математикой – наукой и математикой – учебным предметом. Математические методы за последние полстолетия стали более общими и разнообразными. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту. Математические модели природных и общественных явлений, технических процессов стали точнее и надежнее отображать существо дела. Повысилось прикладное значение математики.

Поэтому вновь появилась необходимость пересмотра программы школьного курса математики.

В последнее время наблюдается бурный рост дискретной математики и ее приложений. Это вызвано тем, что на языке структур дискретной математики возможно описание моделей самых разнообразных явлений и процессов. Но главная причина бурного развития дискретной математики лежит в методологии. Мыслящий субъект воспринимает и познает мир дискретно, порционно. Познаваемый объект всегда предстает в обозримом виде, ограниченном во времени и в пространстве. Поэтому весьма важно гармоничное сочетание дискретного и непрерывного в изучении математики и в понимании ее характера. Изучение дискретной математики включено в вузовские стандарты по многим специальностям. Однако изучение дискретной математики должно стать обязательным и при обучении математике в школе.

Другим новым важным разделом математики, требующем своего внедрения как в вузовскую, так и в школьную программу по математике, является фрактальная геометрия. Фрактал – это удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отражения природных явлений. Открытие фракталов было открытием новой эстетики искусства, программирования и математики, а также революцией в человеческом восприятии мира. Фрактальные образы с успехом используются при описании хаотического поведения нелинейных динамических и диссипативных систем, турбулентного течения жидкости, при изучении роста кристаллов и т.д. Большой и не ослабевающий интерес к фрактальной геометрии объясняется принципиально новыми возможностями, которые фрактальность открывает перед современными науками о природе и обществе. Только сейчас, благодаря фрактальной геометрии, человечество научилось замечать и ценить непосредственную природную красоту, такую необычную и такую простую в своем проявлении.

Познакомить учащихся с фракталами стоит еще и для того, чтобы помочь проникнуть в новый «нелинейный мир», постичь красоту хаоса, продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики науки. А понимание процесса научного познания мира – одна из важных характеристик образованного и культурного человека.

Отбор содержания должен основываться как на высокой математической культуре, так и на методически обоснованной стратегии, на определенных принципах построения содержания в соответствии с возрастными особенностями учащихся, с потребностями практики и с потребностями развития самой личности.

Проблема обновления содержания обучения математики всегда была тесно связанной с проблемой школьных учебников. Выступая на 1-м съезде преподавателей математике В.Ф. Каган, в целом поддерживая необходимость реформы содержания школьного образования, призывал делать это с крайней осторожностью, что легче их широкое значение провозглашать, чем действительно осуществлять, поскольку при такой реформе возникает проблема новых учебников.

Как отмечает один из учеников Колмогорова профессор МГУ В.М. Тихомиров, важнейшая задача математического просвещения – возбудить в человеке интерес к самому себе, как к мыслящей личности. Каждый человек должен научиться рассуждать и решать задачи. «Всех» надо обучать на общедоступном и осмысленном материале, чтобы не закрадывалась мысль о заумности и бессодержательности нашего предмета.

К сожалению, такие мысли возникают у многих школьников. Например, они никак не могут понять, почему в век информационных технологий надо строить геометрические фигуры так же, как это делали древние греки, с помощью циркуля и линейки. Гораздо более интересными для них являются задачи из теории графов или из теории кодирования, которые не включены в школьную программу. Поэтому представляется, что целый рад традиционных разделов школьной математики следует оставить только для учащихся уже имеющих устойчивый интерес к математике и склонных к творчеству и размышлениям.

Одной из самых сложных проблем современного математического образования остается проблема обучения геометрии. Стиль мышления молодежи сегодня за счет постоянного общения в интернете и с масс-медиа – образно- эмоциональный. Мышление школьников и студентов все меньше тяготеет к абстрактным построениям. Традиционные учебники этого не учитывают и только усугубляют проблему с геометрией. В этих условиях особую актуальность приобретают новые подходы к построению школьного курса геометрии, призванные повысить интерес к этому предмету и помогающие сформировать у учащихся пространственное мышление. В частности, особое значение приобретают подход и учебники по геометрии, разрабатываемые В.А. Гусевым на основе концепции «Я в пространстве».

Новые подходы к определению общепредметного содержания и ключевых компетенций также предполагают, что ученик должен обладать познаниями и опытом деятельности, относящимися к особенностям национальной и общечеловеческой культуры. Внимание должно быть уделено духовно-нравственным основам жизни человека и отдельных народов, культурологическим основам семейных, общественных явлений и традиций, роли науки и религии в жизни человека, их влияния на мир. Использование культуры народов России при изучении каждого школьного предмета, в том числе, математики является одним из средств усиления учебной мотивации.

При работе с одаренными к математике учащимися необходимы совсем другие подходы в подборе содержания обучения. Для таких учащихся надо подбирать темы исследовательского характера, темы научных рефератов, циклов задач, математических проектов и экспериментов и пр. Здесь многое зависит от учителя, от уровня его профессиональной подготовки, от его умения создания атмосферы творчества, видеть, искать, находить и ставить задачи.

Однако учителей, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы обучающихся, как отмечено в концепции, в России не хватает. Данные о трудоустройстве выпускников педвузов свидетельствуют о том, что учителями становятся не самые «лучшие» выпускники.

Проблема обновления содержания обучения математике в школе не может быть решена без решения этой проблемы при подготовке учителей. Как показано проф. Е.И. Смирновым, в определении содержания учебных планов подготовки учителя математики определяющую роль должны играть интегративность и фундирование. Концепция фундирования опыта и личностных качеств будущего педагога предполагает развертывание в процессе предметной подготовки студентов таких компонентов, как определение, анализ и механизмы реализации обобщенного содержания уровней базовых школьных учебных элементов и видов деятельности (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры, содержательные линии, характеристики личностного опыта); определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней и этапов (профессионального, фундаментального и технологического) развертывания базовых вузовских учебных элементов и видов деятельности в направлении «школа-вуз-школа».

На основе этой концепции предлагается углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования будущего учителя, изменив содержание и структуру естественнонаучной и методической подготовки в направлении усиления школьного компонента естественнонаучного образования с последующим фундированием знаний и опыта личности на разных уровнях. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из предметной области более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания.

Проблема подготовки квалифицированных учителей математики хотя и обозначена в концепции, однако не указаны пути ее решения, за исключением одного направления – студентам необходимо решать задачи элементарной математики в зоне своего ближайшего развития, в существенно большем объеме, чем сегодня. Разумеется, это важное направление, но это необходимо делать не в ущерб фундаментальной математической подготовке. А такая опасность вполне реальна, поскольку Министерство образования в проекте концепции реформирования педагогического образования предлагает в качестве основной модели подготовки педагогических кадров прикладной педагогический бакалавриат, программа которого предполагает замену значительного объема теоретических курсов на практический компонент. Такая замена может только усилить «рецептурность» знаний студентов, не будет способствовать вовлечению их в научно-исследовательскую деятельность, а значит, не будет способствовать повышению качества подготовки учителей математики.

Библиографический список

1. *Родионов, М.А.* Мотивация учения математике и пути ее формирования: Монография [Текст] / М.А. Родионов / – Саранск: Изд-во МГПИ им. М.Е. Евсевьева, 2001. – 252 с.
2. *Смирнов, Е.И.* Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика. Учебное пособие [Текст] / Е.И. Смирнов / – Ярославль: ИПК “Индиго”, 2007. – 454 с.
3. *Тестов, В.А.* Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты: монография [Текст] / В.А. Тестов / – Вологда, ВГПУ, 2012. – 176 с.

Исследовательская деятельность студентов-экономистов при изучении математического программирования

Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец

Современный специалист в области экономики должен уметь анализировать текущие экономические процессы, быть способным к решению производственных и организационно-управленческих задач, понимать роль и место математики и математического моделирования в экономической сфере. Отсюда одной из основных целей математического образования является формирование прикладной экономико-математической компетентности выпускника как профессионального качества, которое характеризует овладение компетенциями, необходимыми в их профессиональной деятельности и связанными с экономико-математическим моделированием.

Одной из наиболее важных целей курса обучения математики является побуждение студентов к активной исследовательской деятельности.

Придерживаясь мнения В.Н. Кеспикова, можно дать развернутое определение исследовательской деятельности через систему признаков. Исследовательская деятельность [1]:

- направлена на решение задач, для которых характерно отсутствие у субъекта способа решения задачи;
- связана с субъектом на осознаваемом или неосознаваемом уровнях новых для него знаний в качестве ориентировочной основы для последующей разработки способа решения задачи;
- характеризуется для субъекта неопределенной возможностью разработки новых знаний и на основе их способа решения задачи; неопределенность обусловлена отсутствием каких-либо других знаний, строго детерминирующих указанную разработку.

Несмотря на значительное количество педагогических разработок по исследовательской деятельности студентов, они недостаточно внедряются в практику обучения, т.к.:

- наряду с большими достоинствами, применение исследовательского метода связано с определенными трудностями (дефицит учебного времени, неоднородность обучающихся в группе и т.п.);
- исследовательский метод применяется в массовом порядке эпизодически, без системы в организации учебно-исследовательской деятельности обучающихся.

Структуру учебно-исследовательской деятельности, по мнению А.Г. Гостева, определяют следующие компоненты: учебно-исследовательская задача, учебно-исследовательские действия и операции, действия контроля и оценки [2].

Исследовательская деятельность базируется на умении анализировать текущее и прогнозировать будущее состояние экономических объектов и процессов, мыслить и действовать в изменяющихся условиях, моделировать и находить оптимальные решения, основанные на применении современных математических моделей и методов. Наиболее известными являются оптимизационные модели и методы, которые широко применяются при изучении математического программирования. Оптимизационные задачи, рассмотренные в пособии В.М. Монахова, В.Ф. Любичевой, Т.В. Малковой «Преподавание математики и экономическая подготовка учащихся профтехучилищ» [3] наиболее актуальны при подготовки бакалавров:

- задача оптимального использования станков (задача «фанерного треста» Л.В. Канторовича);
- задача о раскрое (распиле) материала;
- задачи об оптимальном распределении ресурсов;
- транспортная задача;
- задача о назначениях.

Формирование исследовательских умений студентов-экономистов является обязательным составным элементом профессиональной подготовки будущих специалистов.

К факторам формирования учебно-исследовательской деятельности студентов-экономистов, можно отнести следующие:

- проблемное обучение как инструмент развития опыта творческой деятельности;
- креативная организация учебного процесса, максимальное насыщение его творческими ситуациями;
- личностно-ориентированный подход к обучению;
- ориентация на продуктивное достижение результата;
- создание оптимальных условий для творческой деятельности.

В качестве примера рассмотрим исследовательскую деятельность студентов-экономистов при изучении математического программирования на занятиях по решению экономических задач транспортного типа (из сферы логистики) с рассмотрением их различных вариаций (сбалансированные и несбалансированные (с дефицитом и избытком распределяемых средств), с блокированием перевозок, с выполнением договорных обязательств, организация схемы «справедливой» недопоставки и др.).

Такие модели используются для составления наиболее экономичных планов перевозки продукции из нескольких пунктов отправления (например, складов) в несколько пунктов назначения (например, магазины). Транспортную модель можно также применять и при рассмотрении ряда других практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением исполнителей по рабочим местам и др. Кроме того, транспортную модель можно видоизменять, с тем, чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции. Не будем подробно останавливаться на теоретических аспектах решения транспортной задачи, а сфокусируем свое внимание на вопросах разработки её компьютерной модели и последующего анализа различных практических ситуаций в MS Excel [4].

Рассмотренные модели, безусловно, не перекрывают разнообразие всех тех многочисленных ситуаций, которые встречаются в практической деятельности. Тем не менее, их можно рекомендовать в качестве отправных точек для дальнейшего исследования. Направлениями таких исследований могут быть многопродуктовые перевозки, перевозки с промежуточными пунктами, перевозки с учетом грузоподъемности транспортных средств и многие другие.

Библиографический список

1. *Кеспиков, В.Н.* Управление исследовательской подготовкой руководителя образовательного учреждения: автореф. дис. … д-ра пед. наук [Текст] / В.Н. Кеспиков / – УралГАФК. – Челябинск, 2004.
2. *Гостев, А.Г.* Исследовательский подход к профессионально-педагогической деятельности [Текст] / А.Г. Гостев / – Челябинск: ЧелГУ, 1996.
3. *Монахов, В.М.* Преподавание математики и экономическая подготовка учащихся профтехучилищ [Текст] / В.М. Монахов, В.Ф. Любичева, Т.В. Малкова / – Москва: «Высшая школа», 1989.
4. *Трофимец, Е. Н.* Оптимизация в Excel: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов [Текст] / Е. Н. Трофимец, В. Я. Трофимец / – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008.

Исследовательские задания как средство совершенствования математической подготовки студентов

Г.Г.Хамов, Л.Н. Тимофеева

В условиях, когда подготовка учителя в настоящее время строится на основе компетентностного подхода, актуальной проблемой становится организация обучения, при которой обеспечивается формирование основных компетенций, позволяющих будущим педагогам не только успешно работать в профессиональной сфере, но и действовать в ней самостоятельно, творчески [1], [2]. Поэтому возникает необходимость совершенствования математической подготовки будущего учителя математики, что возможно с использованием исследовательского метода в обучении, который выполняет весьма важные функции:

- способствует овладению методами научного познания;
- формирует многие черты творческой деятельности;
- является условием формирования интереса, потребности в такого рода деятельности;
- дает полные, хорошо осознанные, оперативно и гибко используемые знания.

Студенты должны постепенно овладевать этапами научного познания, научиться решать проблемы и, таким образом, приобрести навыки творческой деятельности. Однако широкое применение исследовательского метода связано с рядом трудностей не только из-за дефицита учебного времени, но и из-за неоднородности состава обучаемых: многим задания творческого характера оказываются не под силу. Особенно это характерно для творческих математических задач. Таким образом, необходима целесообразно организованная деятельность под руководством преподавателя, характеризуемая проявлением интуитивного и логического компонентов мышления, способствующая повышению уровня математического образования студентов.

Одним из средств, способствующих реализации исследовательского метода являются творческие задания, содержащие теоретические вопросы; задачи, решение которых предполагает нестандартные подходы, рассуждения, выводы; задания по составлению задач и примеров. Приведем возможные варианты таких заданий на примере теоретико-числового материала.

Тема. Делимость в кольце целых чисел.

1. Пусть a, b– целые, не равные одновременно нулю числа, $d = ax_0 + by_0$ – наименьшее положительное число вида $ax + by$, $x, y \in Z$. Докажите, что $d = НОД(a,b)$. Обобщите этот вывод, рассматривая числа вида $ax + by + cz + ... + et$.

2. Докажите, что подходящая дробь $\delta_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ числа α является более лучшим приближением к этому числу, чем любая несократимая дробь $\dfrac{k}{l}$ с условием $0 < l < Q_n$.
3. Докажите бесконечность множества простых чисел вида $6t+5$.
4. Пусть k – целое положительное число. Докажите, что в ряде натуральных чисел имеется бесконечное множество последовательностей m, $m+1$, …, $m+k+1$ не содержащих простых чисел.
5. Докажите, что среди чисел, представляемых многочленом $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, где $n > 0$, $a_0, a_1, ..., a_n$ – целые, $a_0 > 0$ имеется бесконечное множество составных.
6. Докажите, что число $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}$, $n>1$, не является целым.
7. Докажите, что решением диофантова уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, ÍÎÄ $(x, y, z)=1$ являются те и только те системы чисел x, y, z, где одно из чисел x, y имеет вид $2uv$, а другое $u^2 - v^2$, а $z = u^2 + v^2$, при этом $u > v > 0$, ÍÎÄ $(u,v)=1$, uv – четное.
8. Исследуйте уравнения методом нахождения остатков от деления его левой и правой частей на число 5 или 7. В случае разрешимости уравнения в целых числах найдите решения.
   - ✓ $x^2 - 5y = 2014$.
   - ✓ $x^2 \pm 2015y^n = 5z + r$, $r = 2, 3$.
   - ✓ $2014x^2 - 5y^n = 5z + r$, $r = 2, 3$.
   - ✓ $x^3 \pm 7y^n = 2014$.
   - ✓ $3x^2 - 7y = 2014$.
   - ✓ $2014x^3 \pm 7y^n = 7z + r$, $r = 1, 3, 4, 6$.
9. Составьте неопределенные уравнения третьей степени, решаемые методом исследования остатков от деления на число 9 и содержащие число 2014 или 2015.

Процесс составления возможных вариантов таких уравнений следующий: в формуле, вытекающей из теоремы о делении с остатком $a = dg + r$, где a – делимое, d – делитель, g – частное, r – остаток, производим замену, полагая $a = x^3$, $d = 9$, $g = y$, число r заменяем числом 2015. Получаем уравнение $x^3 - 9y = 2015$, которое имеет бесконечное множество решений, так как куб целого числа x^3 при делении на 9 дает остаток 8 при $x = 9t+2$, $x = 9t+5$, $x = 9t+8$, t – целое.

Исследуя возможные остатки от деления числа $2015\,x^3$ на 9 получаем, что уравнения вида $2015x^3 \pm 9y = 9z + r$, $r = 0, 1, 8$ в целых числах разрешимы. А уравнения $2015x^3 \pm 9y = 9z + r$, $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ целочисленных решений не имеют.

Тема. Сравнения с одной переменной.

1. Пусть p – простое, $0<a<p$. Докажите, что сравнение $ax \equiv b \pmod{p}$ имеет решение $x \equiv b(-1)^{a-1} \dfrac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a} \pmod{p}$.
2. Пусть ÍÎÄ $(a_0, m)=1$. Найдите сравнение n-ой степени со старшим коэффициентом 1, равносильное сравнению $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{m}$.
3. Пусть n – целое, $n>0$, ÍÎÄ $(a,m)=1$; известно одно решение $x \equiv x_0 \pmod{m}$ сравнения $x^n \equiv a \pmod{m}$. Докажите, что все решения этого сравнения представляются произведением x_0 на вычеты решений сравнения $y^n \equiv 1 \pmod{m}$.
4. Решите сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$, $p=4m+3$, p – простое.
5. Укажите способ отыскания решений сравнения $x^2 \equiv a \pmod{p}$, $p=8m+5$, p – простое.
6. Пользуясь теоремой Вильсона, докажите, что решениями сравнения $x^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$, $p=4m+1$, p – простое, будут $x \equiv \pm 2m! \pmod{p}$.
7. Решите в целых числах уравнения:
   - ✓ $5x+2014y-z=12$.
   - ✓ $x^2+x+2014=5y$.
   - ✓ $x^3+24x^2+17x+2014=7y^n$.
8. Составьте неопределенные уравнения второй степени, решаемые с использованием свойств сравнений по модулю 11, содержащие конкретное число (например, 2014).

Возможный вариант процесса составления таких уравнений: рассмотрим уравнение вида $x^2+2ax=11y+2014$, число a будем подбирать таким образом, чтобы выполнялось сравнение $a^2+2014 \equiv b \pmod{11}$, число b для разрешимости уравнений может принимать значения $0, 1, 3, 4, 5, 9$, для неразрешимости $2, 6, 7, 8, 10, 11$. Например, при $b=5$, $a=2$ получаем разрешимое уравнение $x^2+4x-11y=2014$, при $b=2$, $a=1$: $x^2+2x-11y=2014$ – неразрешимое. В полученных уравнениях коэффициент при x можно заменить другим числом сравнимым с данным по модулю 11. Например, разрешимые уравнения $x^2-7x \pm 11y=2014$, $x^2+37x \pm 11y=2014$; неразрешимые $x^2+13x \pm 11y=2014$. Кроме того, в случае неразрешимого уравнения число 11 можно заменить любым числом, делящимся на 11, например, уравнения $x^2+2x \pm 2013y=2014$ неразрешимы.

Тема. Первообразные корни и индексы.

1. Пусть a – целое, $a>1$, n – целое, $n>0$ Докажите, что $\varphi(a^n-1)$, $\varphi(m)$ – функция Эйлера, делится на n.
2. Докажите, что первообразный корень по модулю простого числа вида 2^n+1, $n>1$, есть 3.
3. Докажите, что первообразный корень по модулю простого числа вида $2p+1$ при $p=4n+1$, p – простое, есть 2, а при $p=4n+3$, есть -2.

4. Обобщите критерий Эйлера на случай сравнения $x^n \equiv a \pmod p$, $p > 2$, p – простое, $a \not\equiv 0 \pmod p$: число a – вычет степени n по модулю p тогда и только тогда, когда $a^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod p$, $m = \text{ÍÎÄ}\ (n, p-1)$.
5. Выведите формулу перехода от одной системы индексов к другой по данному модулю.
6. Докажите, что:

a). первообразный корень простого модуля $p > 2$ является квадратичным вычетом по этому модулю;

b). среди первообразных корней простого модуля не может быть квадратов;

c). a^{2n+1} $(n = 0, 1, 2, ...)$ является квадратичным вычетом по простому модулю $p > 2$, если a – первообразный корень по модулю p;

d). произведение двух первообразных корней по простому модулю $p > 2$ не может быть первообразным корнем по этому модулю.

e). модуль 2^n $(n = 3, 4, 5, ...)$ не имеет первообразных корней.

7. Докажите, что сравнение $a^x \equiv b \pmod p$, p – простое, x – натуральное, имеет решения, если $\text{ÍÎÄ}\ (ind_p a, p-1)$ делит $ind_p b$. Примените данное свойство к составлению неопределенных уравнений для простого числа $p = 17$.

Процесс составления уравнений: из данного сравнения следует, по определению, что разность $a^x - b$ делится на число $p = 17$, то есть $a^x - b = 17y$. Если сравнение разрешимо, то и составленное уравнение будет иметь решения. Согласно свойству 7 сравнение разрешимо, если $\text{ÍÎÄ}\ (ind_{17} a, 16)$ делит число $ind_{17} b$. Это условие выполняется для всех чисел a, индекс которых нечетное число, так как в этом случае $\text{ÍÎÄ}\ (ind_{17} a, 16) = 1$. Например, при $ind_{17} 11 = 7$ получаем разрешимое уравнение $11^x - 2014 = 17y$. Если $ind_{17} a$ – четное, $ind_{17} b$ – нечетное, то уравнение $a^x - 17y = b$ неразрешимо, например, при $a = 9$, $b = 7$ (можно взять $a = 2015$).

8. Докажите, что сравнение $ax^n \equiv b \pmod p$, p – простое, n – натуральное, имеет решения, если $\text{ÍÎÄ}\ (n, p-1)$ является делителем числа $ind_p b - ind_p a$. Примените данное свойство к составлению неопределенных уравнений для простого числа 19.

Составляемые уравнения имеют вид $ax^n - 19y = b$. Например, при $n = 5$: $\text{ÍÎÄ}\ (5, 18) = 1$, по свойству 8 сравнение $ax^5 \equiv b \pmod{19}$ и соответствующее уравнение $ax^5 - 19y = b$ разрешимо; при $n = 3$: $\text{ÍÎÄ}\ (3, 18) = 3$ не делит число $ind_{19} 3 - ind_{19} 7 = 7$ и соответствующие уравнения $7x^3 - 19y = 3$ и $7x^3 - 2014y^n = 3$ неразрешимы.

Библиографический список

1. *Смирнов, Е.И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Монография [Текст] / Е.И. Смирнов / Ярославль, 2012, 646 с.
2. *Хамов, Г.Г.* Формирование исследовательских компетенций будущих учителей математики при изучении теоретико-числового материала [Текст] / Г.Г. Хамов, Л.Н. Тимофеева / Ярославский педагогический вестник. Научный журнал. Ярославль: Изд-

во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2013. Том II. Психолого-педагогические науки, №3, с. 141-146.

Численное моделирование бифуркаций и предельных циклов при помощи продукта Maple 15 при изучении динамических систем

В.В. Чистяков

Универсальность понятия *динамической системы* как эволюционирующего цельного математического объекта с разнообразными причинно-следственными связями объясняет применимость соответствующей теории и выводов ее в широком спектре приложений от классической механики до химии и биологии, и даже на самом высоком организационно-научном уровне —математических моделей социальной динамики (т.н. *эконофизики*, см. например [1]).

Изучение и анализ общих свойств динамических систем с привлечением соответствующих понятий, таких как *предельный цикл, аттрактор, бифуркация* и пр., приобретает сугубо практическое значение в наше непростое время экономических и политических циклов, кризисов и — увы!— войн.

Оставляя за рамками данной статьи насчитывающую столетия дискуссию о применимости математических методов описания неживой, а зачастую и синтезированной физической системы для моделирования живой природы и общества, можно утверждать, что наступивший XXI век — эра сквозного моделирования во всех отраслях деятельности, эра создания параллельной виртуально-модельной реальности. И, подобно тому, как, по словам К. Маркса, человек отличается от пчелы тем, что «свой дом создает прежде в своем сознании», так и в наше время профессионал отличается от непрофессионала тем, что прежде создает адекватную модель изучаемой реальности и четко знает границы ее применимости и точность.

Также он представляет, где возможно циклическое поведение с повторяющимися периодами, где даже небольшие количественные изменения могут привести к катастрофическим качественным и пр. Другими словами, владеет языком и методами теории динамических систем на практическом, а не только умозрительном теоретическом уровне.

Настоящая работа посвящена численному изучению при помощи программного продукта Maple15 общих свойств динамических систем на примере уравнений 2-го порядка с иррациональной или разрывной правой частью, зависящей от одного либо нескольких параметров.

Исходный прототип

В качестве таковоого послужил т.н. *астатичный ротатор* с неглавной осью вращения, т. е. твердое тело, насаженное на неподвижную ось с двумя опорами, проходящую через центр его масс *C*, но не являющуюся *осью свободного вращения* [2]. Например, это может быть однородный эллипсоид с просверленным через центр масс каналом (Рис. 1).

При вращении из-за динамической неуравновешенности в вертикальных плоскостях возникают инерционные пары сил M_x и M_y, приводящие к поперечным силам реакции и как следствие к осевому моменту сил сухого трения M_{fr}, уменьшающим угловую скорость $\omega = \dot{\varphi}$ наряду с квадратичным аэродинамическим сопротивлением.

Изучалось колебательное поведение ротатора под действием упругого возвращающего $M_{el} = -\kappa\varphi$ и гармонического вынуждающего $M(t) = A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right)$ моментов

Динамическое уравнение выглядит как

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - \kappa\varphi + A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) \quad (1),$$

где $J_{zz}, \alpha, c, \kappa$ — параметры инерции, сопротивления и упругости.

Разрешенное относительно старшей производной уравнение имеет иррациональный вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_{zz}\left(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t\right) - sign\left(\dot{\varphi}\right)\alpha\sqrt{-2\kappa A_0 \varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4\left(J_{zz}^2 - \alpha^2\right) + \kappa^2 \varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \quad (2).$$

$J_{zz}^2 - \alpha^2 > 0$

Примечательно, что при выполнении условия $J_{zz} = \alpha = c$ иррациональность (2) исчезает, но появляется потенциальная разрывность из-за обращающегося в нуль знаменателя

$$\ddot{\varphi} = \frac{2J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} \cdot A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) + 2\kappa\varphi A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) - 2\kappa\varphi \cdot J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - \kappa^2\varphi^2 - A_0^2 \sin^2\left(\Omega t + \gamma\right)}{2J\left(\kappa\varphi + J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right)\right)} \quad (3).$$

Оба уравнения не интегрируются аналитически, но хорошо, хотя и не без проблем, решаются численно [3], причем различные разностные схемы (*rk45, gear* и др.) дают совпадающие результаты.

Отличие правых частей проявляется в качественно различных угловых кинетиках, одна из которых характеризуется быстрым выходом на периодический режим с наличием изломов на кривой ω(t), другая же наоборот— гладкостью, апериодичностью, и сильной модулированностью амплитуды колебаний. Вследствие этого в первом случае имеет место быстрый выход на «угловатый» предельный цикл в фазовой плоскости, тогда как во втором — траектория, вероятно, заполняет всюду плотно эллипс с центром в начале координат (Рис. 2,3).

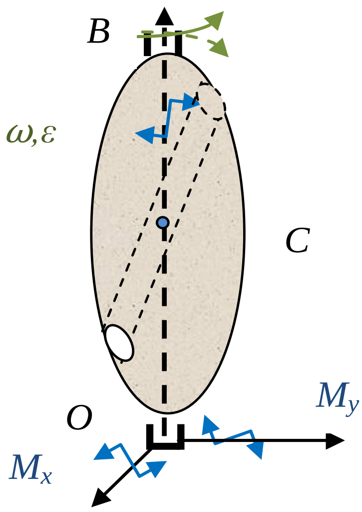


Рис. 1.

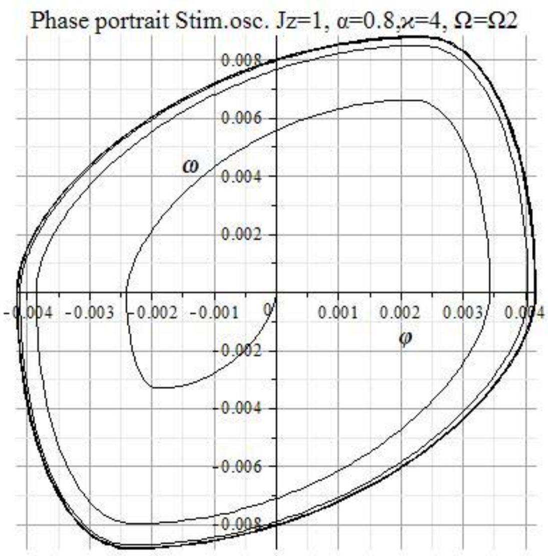
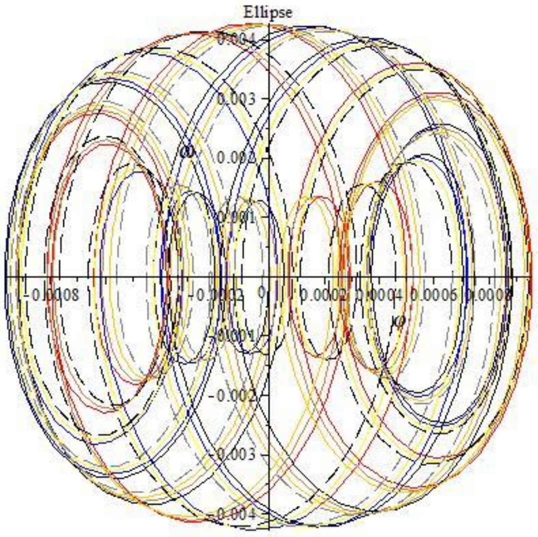


Рис. 2.



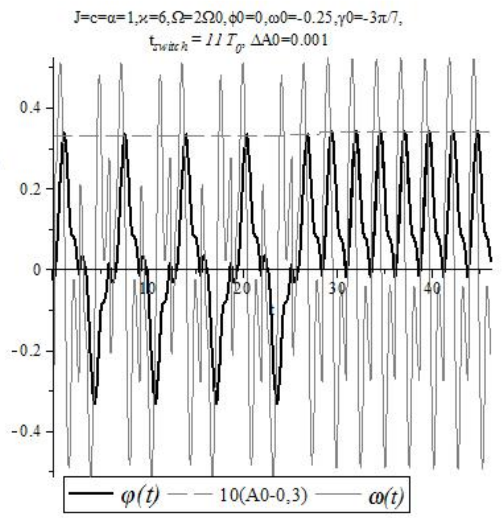


Рис. 3. Рис. 4.

Таким образом, выполнение условия $J_{zz} = \alpha = c$ на параметры динамики резко меняет картину кинетики, делая ее стохастической.

Гомотопия частного случая.

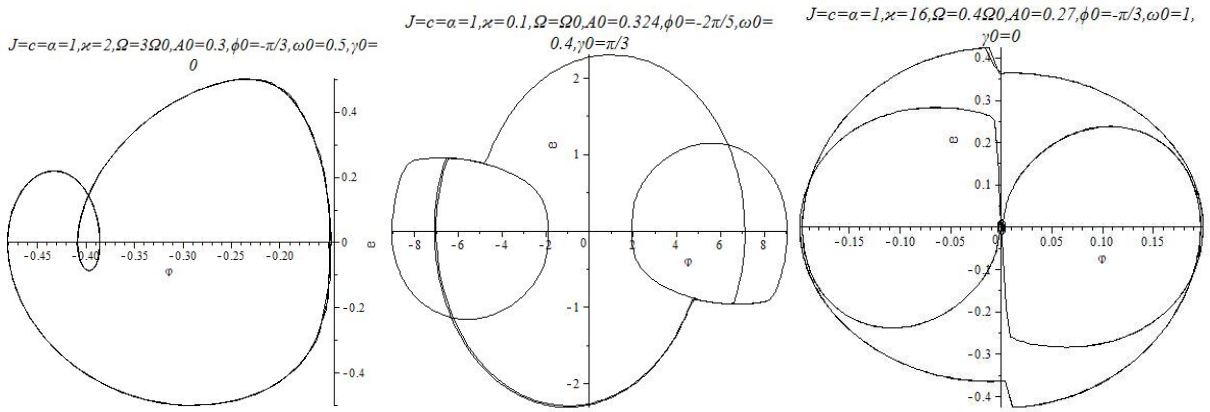
Если слегка изменить числитель правой части (3) как

$$\ddot{\varphi} = \frac{2J\,|\dot{\varphi}|\dot{\varphi}\cdot A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right) + 2\kappa\varphi A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right) - 2\kappa\varphi\cdot J\,|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - \kappa^2\varphi^2 - \sin^2\left(\Omega t+\gamma\right)}{2J\left(\kappa\varphi + J\,|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right)\right)} \quad (4),$$

убрав амплитудный множитель A_0^2, то решения $\varphi(t)$ получающегося уже нефизического уравнения приобретают необычное поведение.

Прежде всего, они приобретают свойства смещенности от нулевого положения при определенных значениях параметров (Рис. 4).

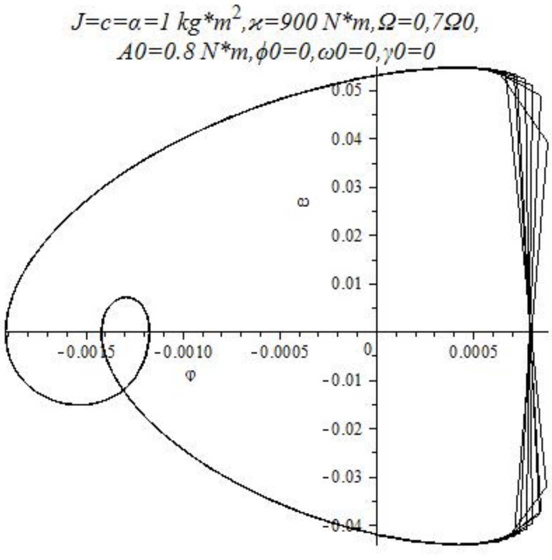
Вместе с решениями качественно меняются и фазовые портреты, демонстрируя предельные циклы множественных причудливых форм и с самопересечениями (Рис. 5,а—в).



а) б) в)

Рис. 5.

Необычным моментом также представляется возможность реализации *частичных* предельных циклов, замыкание которых до полного «подпорчено» стохастической модуляционной компонентой (Рис. 6).



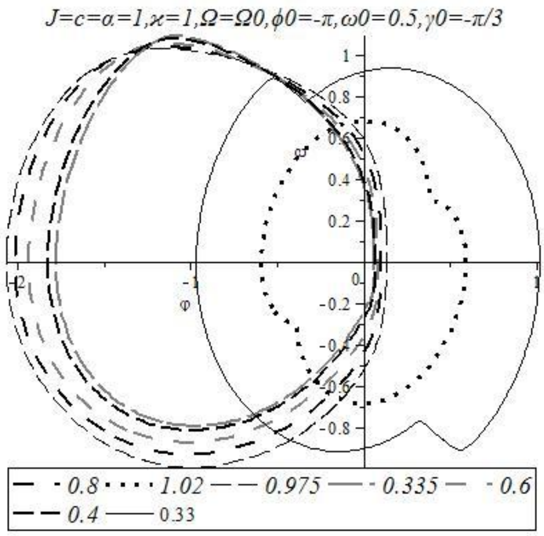


Рис. 6. Рис. 7.

Изменение амплитудного параметра A_0 от малых значений к большим приводит к множественным бифуркациям, неоднократно меняющим форму, размер и смещенность от начала координат предельного цикла (Рис. 7). Из картины кинетики видно (Рис. 4), как антипериодическое, а потому несмещенное решение всего лишь при микроскопическом изменении параметра ΔA_0=0.001 переходит в смещенное в верхнюю полуплоскость, но просто периодическое. В общем случае направление смещения зависит от начальной фазы γ.

Достойно внимание бифуркационное уменьшение периода решения в целое либо рациональное (5/2, 3/2) число раз, либо в частном случае его неизменность. Такого рода дискретность всегда представляет повышенный интерес, особенно для исследователей нелинейных колебательных систем и явления резонанса в них, а также тех, кто практикует симметрийный и алгебраический подходы в изучении дифференциальных уравнений.

Выводы.

Исчерпывающее и более детальное описание всего наблюдаемого разнообразия решений и фазовых портретов, попытка проанализировать и систематизировать все возможные случаи в многомерном пространстве параметров требуют качественно иного формата публикации.

Но целью данной работы не может являться столь глубокое исследование нефизического разрывного уравнения. Прежде всего, ставилась задача дать конкретные примеры заявленных эффектов и явлений, свойственных если не всем, то многим динамическим системам. Продемонстрировать в деталях, чем сопровождаются или могут сопровождаться эти явления, и мотивировать читателя на нахождение причин наблюдаемой необычности.

Стоит также отметить, что дифференциальные уравнения с разрывностями привлекают все большее внимание математиков в связи с практической их применимостью и в динамике сухого трения, и в теории управления, и в вариационном исчисленн, а также в других областях, включая упомянутую эконофизику и теорию катастроф.

Потому, не исключено, что представленные выше бифуркации, циклы и дробное изменение периода могут иметь место в реальных ситуациях. А изучающий динамические системы студент должен быть готов их численно исследовать при помощи таких продуктов, как Maple, Wolfram Mathematica и др., которые уже внедрены в передовых российских ВУЗах, таких как МФТИ, МГУ, СПбГУ и другие университеты и академии, входящие в программу 5top100.

Библиографический список

1. Эконофизика и эволюционная экономика (Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, 2 ноября 2010 г.) [Текст] / Успехи Физических Наук. — Т. 181. — 2011. — С. 753-786.
2. *Маркеев, А.П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов [Текст] / А. П. Маркеев / — Москва: ЧеРо, 1999. - 572 с.
3. *Чистяков, В.В.* О частных случаях динамики вращения твердого тела вокруг неглавной центральной оси инерции при сухом трением в опорах [Текст] / В.В. Чистяков / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.— № 2.— 2014. — С. 153-163.

Задачи с р-адическими числами. Из опыта преподавания в интернате Колмогорова при МГУ

Е.Т. Шавгулидзе

При прохождении темы геометрические прогрессии со школьниками в классах с углубленным изучением математики полезно разобрать задачи на суммирование геометрических прогрессий по р-адическим нормам и познакомить учащихся с р-адическими числами. Задачи такого типа позволяют школьникам взглянуть на эту тему с неожиданной для них стороны, расширяют их кругозор и вызывают заметный интерес школьников. При этом для их не требуется большого нового материала.

Приведем дополнительные сведения для решения такого типа задач. Напомним определение p-адической нормы рационального числа. Пусть p - простое число.

Определение.

Если рациональное число $r \neq 0$, *то представим его в виде* $r = \frac{n}{m} p^k$, *где* n, k *- целые числа,* m *- натуральное число, причем числа* n, m *не делятся нацело на* p. *Тогда* p*-адической нормой числа* r *называется число* $|r|_p = p^{-k}$. *Если же* $r = 0$, *то* $|r|_p = |0|_p = 0$.

1. Примеры задач на нахождение p-адической нормы.

Разберем несколько примеров p-адических норм рациональных чисел:

$$\left|\frac{24}{11}\right|_2 = \left|\frac{3}{11} 2^3\right|_2 = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

$$\left|\frac{24}{11}\right|_{11} = \left|\frac{24}{1}(11)^{-1}\right|_2 = (11)^1 = 11,$$

$$\left|-\frac{35}{18}\right|_2 = \left|\frac{35}{9} 2^{-1}\right|_2 = 2^1 = 2,$$

$$\left|-\frac{35}{18}\right|_{11} = \left|\frac{35}{18}(11)^0\right|_{11} = (11)^0 = 1,$$

$$\left|-\frac{35}{18}\right|_3 = \left|\frac{35}{2} 3^{-2}\right|_2 = 3^2 = 9,$$

$$\left|-\frac{35}{18}\right|_5 = \left|\frac{7}{18} 5^1\right|_5 = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

2. Примеры задач на суммирование геометрических прогрессий по p-адическим нормам.

Приведем определение сходимости ряда в поле рациональных чисел по p-адической норме.

Определение.

Суммой ряда $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ *по* p*-адической норме называется рациональное число* S, *если последовательность* $|S - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)|_p$ *является бесконечно малой, т.е. стремится к нулю.*

Разберем несколько примеров суммирования рядов по p-адическим нормам в поле рациональных чисел:

Пример 1.

Найти сумму ряда $6 + 18 + 24 + ... + 2 \cdot 3^n + ...$ *по* p*-адической норме при* $p = 3$.

Решение. Найдем частичную сумму ряда, т.е. сумму n первых членов ряда $s_n = 6+18+24+...+2\cdot 3^n$. Так как s_n является суммой первых n членов геометрической прогрессии, то по формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии находим

$$s_n = 6\frac{1-3^n}{1-3} = -3(1-3^n) = -3+3\cdot 3^n.$$

Положим $S=-3$. Тогда последовательность

$$|S-s_n|_3 = |-3-(-3-3\cdot 3^n)|_3 = |3\cdot 3^n|_3 = 3^{-(n+1)}$$

является бесконечно малой, следовательно сумма ряда равна $S=-3$, т.е. $-3 = 6+18+24+...+2\cdot 3^n+...$ по p-адической норме при $p=3$.

Пример 2.

Найти сумму ряда $1+2+4+8+...+2^n+...$ *по* p*-адической норме при* $p=2$.

Решение. Так как этот ряд является суммой геометрической прогрессии, то находим частичную сумму ряда по формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$s_n = \frac{1-2^n}{1-2} = -(1-2^n) = -1+2^n.$$

Положим $S=-1$. Последовательность

$$|S-s_n|_2 = |-1-(-1+2^n)|_2 = |-2^n|_2 = 2^{-n}$$

является бесконечно малой, следовательно сумма ряда равна $S=-1$, т.е. $-1 = 1+2+4+8+...+2^n+...$ по p-адической норме при $p=2$.

Пример 3.

Найти сумму ряда $3-15+75-375+...+3\cdot(-5)^n+...$ *по* p*-адической норме при* $p=5$.

Решение. По формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии получим

$$s_n = 3\frac{1-(-5)^n}{1-(-5)} = \frac{1}{2}(1-(-5)^n) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(-5)^n.$$

Положим $S=\frac{1}{2}$. Тогда последовательность

$$|S-s_n|_5 = |\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(-5)^n)|_3 = |(-1)^n\frac{1}{2}\cdot 5^n|_5 = 5^{-n}$$

является бесконечно малой, следовательно сумма ряда равна $S=\frac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{1}{2} = 3-15+75-375+...+3\cdot(-5)^n+...$$

по p-адической норме при $p=5$.

Пример 4.

Найти сумму ряда $2+\frac{10}{11}+\frac{50}{121}+...+2\cdot(\frac{5}{11})^n+...$ *по* p*-адической норме при* $p=5$.

Решение. По формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии найдем частичную сумму ряда

$$s_n = 2+\frac{10}{11}+\frac{50}{121}+...+2\cdot(\frac{5}{11})^n =$$

$$=2\frac{1-(\frac{5}{11})^n}{1-(\frac{5}{11})}=\frac{11}{3}(1-(\frac{5}{11})^n)=\frac{11}{3}-\frac{11}{3}\cdot(\frac{5}{11})^n.$$

Положим $S=\frac{11}{3}$. Тогда последовательность

$$|S-s_n|_5=|\frac{11}{3}-(\frac{11}{3}-\frac{11}{3}\cdot(\frac{5}{11})^n)|_3=|\frac{1}{3\cdot(11)^{(n-1)}}\cdot 5^n|_5=5^{-n}$$

является бесконечно малой, следовательно сумма ряда равна $S=\frac{11}{3}$, т.е.

$$\frac{11}{3}=2+\frac{10}{11}+\frac{50}{121}+...+2\cdot(\frac{10}{11})^n+...$$

по p-адической норме при $p=5$. Отметим, что сумма совпадает со обычной суммой геометрической прогрессии.

Приведем примеры задач:

1. Найти сумму ряда $2-6+18-24+...+2\cdot(-3)^n+...$ по p-адической норме при $p=3$.
2. Найти сумму ряда $5+10+20+40+...+5\cdot 2^n+...$ по p-адической норме при $p=2$.
3. Найти сумму ряда $1-2+4-8+...+(-2)^n+...$ по p-адической норме при $p=2$.
4. Найти сумму ряда $3+\frac{33}{7}+\frac{363}{49}+...+3\cdot(\frac{11}{7})^n+...$ по p-адической норме при $p=11$.
5. Найти сумму ряда $5-\frac{10}{7}+\frac{20}{49}+...+5\cdot(-\frac{2}{7})^n+...$ по p-адической норме при $p=2$.

3. Примеры задач на представление рациональных чисел в p-адическом исчислении.

Приведем определение записи числа в p-адическом исчислении.

Определение.

Запись числа вида $...a_n...a_3a_2a_1a_0,b_1b_2b_3...b_k$ *в p-адическом исчислении обозначает сумму ряда* $b_kp^{-k}+...+b_3p^{-3}+b_2p^{-2}+b_1p^{-1}+a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3+...+a_np^n+...$ *по p-адической норме, где* $b_1,b_2,b_3,...,b_k,a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$ *- цифры* $0,1,2,...,p-1$.

Разберем несколько примеров на представление рациональных чисел в p-адическом исчислении:

Пример 1.

Представить число -1 *в* p*-адическом исчислении при* $p=2$.

Решение. Так как $-1=1+2+4+8+...+2^n+...$ по p-адической норме при $p=2$, т.е. $-1=1+2+2^2+2^3+...+2^n+...$, то $-1=...1...11111$

Пример 2.

Представить число $-\frac{1}{2}$ *в* p- *адическом исчислении при* $p=3$.

Решение. Так как $-\frac{1}{2}=1+3+9+27+...+3^n+...$ по p-адической норме при $p=3$, т.е. $-\frac{1}{2}=1+3+3^2+3^3+...+3^n+...$, то $-\frac{1}{2}=...1...11111$

Пример 3.

Представить число $-\frac{1}{2}$ *в* p*-адическом исчислении при* $p=5$.

Решение. Так как $-\frac{1}{2}=2+2\times5+2\times25+2\times125+...+2\times5^n+...$ по p-адической норме при $p=3$, т.е.

$$-\frac{1}{2}=2+2\times5+2\times5^2+2\times5^3+...+2\times5^n+...,$$

то

$$-\frac{1}{2}=...2...22222$$

Библиографический список

1. *Коблиц* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функция [Текст] / Коблиц / изд. "Мир", Москва 1982.
2. *Семенова, Т.Г.* Задачи на суммирование геометрических прогрессий по p-адическим нормам [Текст]/Т.Г.Семенова, Г.И.Сыркин, Е.Т.Шавгулидзе/ Сб. ст.Математика в Колмогоровской школе, МАКС Пресс, 2009. - С.133-136.
3. *Шавгулидзе, Е.Т.* Задачи на суммирование по p-адическим нормам, p-адические числа [Текст] /Е.Т.Шавгулидзе, Н.Е.Шавгулидзе / Труды XI международных Колмогоровских чтений, сб. статей - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013. - С.108-113.

Особенности преподавания математики в медицинском вузе

М.А. Шмонова

Обучение математике, как фундаментальной дисциплине, в медицинском вузе имеет ряд особенностей:

1. Небольшое количество аудиторных часов, отводимых для изучения дисциплины (в среднем это – 10 лекционных и 26 практических);
2. Большой объём изучаемого материала;
3. Включение математики как отдельного блока в дисциплину "Физика, математика";
4. Слабая мотивационная составляющая к изучению дисциплины;
5. Разный уровень математических знаний студентов (как внутри отдельной группы, так и на всём потоке в целом).

Таким образом, возникает вопрос: Как в указанных условиях организовать процесс преподавания математики наиболее эффективным способом? Постараемся ответить на этот вопрос, последовательно разбирая факторы, влияющие на преподавание математики в медицинском вузе.

Итак, в рамках изучения математики студенты знакомятся с такими разделами как: дифференциальное и интегральное исчисление, функции многих переменных, дифференциальные уравнения, основы теории вероятностей и математической статистики. Однако, малое количество учебных часов не позволяет достаточно глубоко (и теоретически и практически) представить весь изучаемый материал. Отсюда и вытекает, что преподавание математики в медицинском вузе должно быть направлено на обучение основам в каждом из указанных разделов, (т.е. изучение математики может быть организованно только на базовом уровне).

В указанных условиях большое внимание следует уделять организации самостоятельной деятельности студентов (СДС). Подчеркнём, что СДС должна проводиться таким образом, чтобы каждый студент мог реализовать свои способности и интересы. Учёт этого обстоятельства предполагает разработку практикумов, методических пособий, сборников контрольных работ и др. (как в печатном, так и в электронном виде), адекватных содержанию дисциплины и ориентированных на медицинскую специфику.

Согласно ФГОС ВПО третьего поколения математика стала частью дисциплины под названием «Физика, математика». В связи с этим, при изучении математики предполагается целесообразным разъяснять физический смысл математических понятий и включать задачи, имеющие физическое содержание. Например, при рассмотрении темы "Функции многих переменных" можно предложить учащимся решить следующую задачу: Найдите относительную погрешность в определении силы света лампочки накаливания при помощи люксметра ($I = Er^2$), если на расстоянии *50 см* от нее стрелка люксметра отклоняется на *25* делений шкалы. Расстояние r измеряется с абсолютной погрешностью $\Delta r = 0{,}005$ *м.* Отметим, что учёт указанного обстоятельства влияет также и на формирование положительной мотивации у студентов.

Низкая мотивация при изучении математики студентами медицинских вузов связана со следующими обстоятельствами:

1) как правило, довольно низкий уровень математических знаний (школьная оценка по предмету у студентов-медиков, в основном, "хорошо" или даже "удовлетворительно");

2) низкий уровень интереса к предмету (студенты считают, что математические знания не будут использоваться ими ни при изучении других дисциплин, ни в повседневной жизни, ни в будущей профессиональной деятельности).

Для создания позитивного отношения к изучаемой дисциплине особую роль должен играть подбор заданий практической направленности, содержание которых связанно с будущей профессией. На семинарах по математике важно показать студентам, что математика – это не оторванные от жизни абстрактные теоретические знания, а широчайший набор средств и методов для решения большого класса прикладных задач. Будущие медики должны усвоить, что математика – это один из методов решения медицинских проблем. И основным путем применения этого метода является изучение математических моделей медико-биологических явлений и процессов реального мира. Изучая какие-либо физические, химические, биологические, медицинские явления, исследователь прежде всего создает математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Отметим, что в настоящее время в школе большое внимание уделяется обучению работе с математическими моделями, и в вузе также необходимо продолжать формировать соответствующие навыки.

Для хорошего усвоения основ математического моделирования целесообразно начинать изучение новых тем с задач, приводящих к исследуемому понятию, с физическим, химическим, биологическим или медицинским содержанием. В таком случае у студентов уже не возникает вопроса: «Зачем нам это нужно?» (мотивационная составляющая), они с большим интересом переходят к изучению нового математического понятия и его свойств (когнитивная составляющая). Например, начать изучение раздела "Дифференциальное исчисление" можно не только с задачи о скорости движущейся точки, задачи о касательной к данной кривой, но и с задачи о скорости химической реакции, задачи о скорости роста популяции и т.д. [1].

Рассмотрение в рамках темы задач профессиональной направленности позволяет обучить студентов навыкам перевода содержания задачи с естественного языка на математический, умению построения математических моделей, навыкам их изучения и интерпретации полученных результатов исследования. Подобные навыки формируют алгоритмически-логический стиль мышления, что является важным качеством для будущего врача, так как существенно помогает ему в профессиональной деятельности.

Отметим также, что решение типовых заданий, по предметному содержанию близких к будущей профессии, способствует установлению межпредметных связей, а как следствие – и повышению мотивации студентов. Далее в качестве примера приведем несколько профессионально-ориентированных задач по теме "Дифференциальные уравнения":

1. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 *мг* препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после двух часов?
2. Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.
3. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = B(x_0 - x)$, где x_0 – полное укорочение мышцы; B – постоянная зависящая от нагрузки; x – укорочение мышцы в данный момент. Найти закон сокращения мышцы, если в момент времени $t=0$ величина укорочения мышцы была равной 0.
4. Если первоначально количество фермента равно 1 г., а через 1 час становится равным 1,2 г., то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения? Скорость прироста фермента считать пропорциональной его наличному количеству.
5. Скорость распада некоторого лекарственного вещества пропорциональна наличному количеству лекарства. Известно, что по истечении 1 часа в организме осталось 31,4 г. лекарственного вещества, а по истечении 3 часов – 9,7 г. Определить: 1) сколько лекарственного вещества было введено в организм; 2) через сколько времени после введения в организме останется 1% первоначального количества?

Однако при использовании профессионально-ориентированных задач могут возникнуть сложности в понимании текста задачи как у преподавателя (из-за отсутствия медицинского образования), так и у студентов (т.к. математика изучается на первом курсе и многие специальные термины учащимся ещё не знакомы). Поэтому нужно подбирать задачи, доступные для понимания каждого.

Кроме того, для повышения интереса к предмету можно использовать современные системы компьютерной математики. В настоящее время специализированные математические пакеты имеют весьма простой пользовательский интерфейс и широкий набор средств для проведения вычислений и построения графических объектов различной степени сложности. Выполняя подробные, четкие инструкции студенты могут самостоятельно легко и быстро получить достаточно точный результат.

Рассмотрим простой пример решения дифференциального уравнения с помощью системы компьютерной математики MathCAD.

Задача: Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину $\frac{1}{1+2t}$. Допустим, что начальной популяции соответствует $x(0)=1000$. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

Решение: Пусть $x(t)$ – размер популяции в момент времени t. Скорость роста $\frac{dx}{dt}$ по условию в момент времени t равна $\frac{x}{1+2t}$. Отсюда, получаем дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{1+2t}$, общее решение которого имеет вид: $x=C\sqrt{1+2t}$, а частное решение, удовлетворяющее условиям задачи: $x=1000\sqrt{1+2t}$. И теперь легко можем найти, что после 4 часов роста размер популяции становится равным: $x(4)=1000\sqrt{1+2\cdot 4}=3000$, а после 12 часов – $x(12)=1000\sqrt{1+2\cdot 12}=5000$.

Проверим наш результат. Для численного решения одиночного дифференциального уравнения в MathCAD имеется функция Odesolve, с помощью которой может быть решена как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, так и граничная задача. Эта функция входит в состав блока решения и является его заключительным ключевым словом. Синтаксис следующий: *Odesolve(x,b,[step])*, где *x* – переменная интегрирования, действительное число; *b* – конечная точка отрезка интегрирования; *step* – величина шага по переменной интегрирования (необязательный аргумент). *Odesolve* – возвращает функцию, которая является решением дифференциального уравнения. Используется в блоке с оператором Given.

Ниже представлено решение рассматриваемого дифференциального уравнения в среде MathCAD (рисунок 1), а также интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{1+2t}$, проходящий через точку $(0;1000)$ (рисунок 2).

Given

$$\frac{d}{dt}x(t)-\frac{x(t)}{1+2t}=0$$

$$x(0)=1000$$

$$x:=\mathrm{Odesolve}(t,15)$$

$$x(4)=3000$$

$$x(12)=5000$$

Рисунок 1. Решение дифференциального уравнения в среде MathCAD

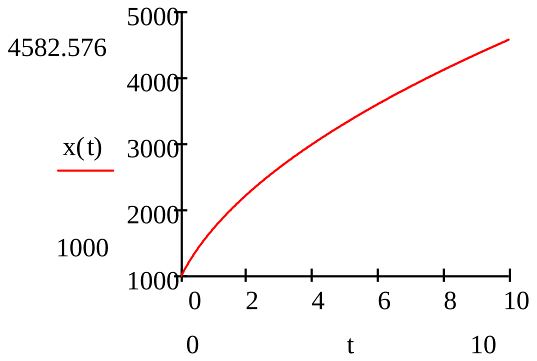


Рисунок 2. Интегральная кривая уравнения $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{1+2t}$, с начальными условиями $x(0)=1000$

Приведенный пример показывает, что использование на практических занятиях по математике MathCAD позволяет проверять и корректировать решения различных задач математического анализа, а кроме того визуализировать полученный результат.

Итак, ориентация на задачи профессионального содержания и применение современных прикладных программ способствует повышению мотивации студентов к изучению математики, установлению наглядных межпредметных связей, развивает умение работать с программными средствами, а главное – формирует творческую личность, способную применить различные математические методы и информационные технологии для решения практических задач [1, 2].

Усиливают мотивацию к изучению математики и задания, связанные со студенческими тематиками. Например, большой интерес у студентов вызывают следующие задачи:

1. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

2. Студент изучает биологию, химию и физику. Он оценивает, что вероятность получить "пятерку" по этим предметам равна соответственно: Р(Б) = $\frac{1}{2}$; Р(Х) = $\frac{1}{3}$; Р(Ф) = $\frac{1}{4}$. Предположим, что оценки студента по трем предметам независимы. Какова вероятность, что он: 1) Не получит ни одной "пятерки"? 2) Получит "пятерку" только по биологии?
3. На лекции по биофизике во втором семестре присутствуют 124 студента. Из них на экзамене по высшей математике в зимнюю сессию получили оценку "отлично" 19 человек, "хорошо" – 50 человек, "удовлетворительно" – 24 и не сдали экзамен 31 человек. Какова вероятность того, что вызванные наугад один за другим два студента из числа присутствующих на лекции не имеют задолженности по высшей математике?

Также для формирования положительной мотивации можно использовать в процессе обучения кейс-задачи и творческие задания состоящие, например, в подготовке небольшого информационного сообщения и т.п.

Разный уровень математических знаний студентов обязывает использовать дифференцированный подход к обучению, что достаточно легко реализовать, если использовать балльно-рейтинговую систему оценки знаний учащихся. При таком подходе предполагается наличие нескольких контрольных мероприятий (текущий и рубежный контроль), получение оценки по которым влияет в дальнейшем на итоговую оценку на зачете.

Библиографический список

1. *Шмонова, М.А.* Профессионально-ориентированное обучение математике как средство создания положительной мотивации студентов медицинских вузов [Текст] / М.А. Шмонова / Аспирантский вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2013. – №21. – С. 64 – 65.
2. *Шмонова, М.А.* Использование компьютерных технологий в обучении математике студентов медицинских вузов [Текст] / М.А. Шмонова / Аспирантский вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2013. – №22. – С. 57 – 59.

Комплексный подход к математическому образованию в педагогическом вузе

Г.А. Ярахмедов

Происходящие в настоящий информационный период развития общества коренные изменения почти во всех сферах человеческой деятельности и методология постнеклассического типа рациональности позволяют рассматривать динамику научного знания о природе, обществе, человеке, человеческой деятельности и образовательного процесса в различных культурно – исторических моделях общественного развития с точки зрения глобального эволюционизма и системности. В контексте такого дискурса, как мы полагаем, математическое образование в педвузе, ориентированное на гуманистические и духовно – ценностные принципы, обеспечивающие целостность мировосприятия, играет определяющую роль в становлении профессионально значимой личности как субъекта социокультурного пространства.

Постнеклассический тип рациональности требует адекватного осмысления интеграционных процессов в профессиональной деятельности субъекта с точки зрения конвергентного мышления, логики соответствующих взаимодействий и синтеза различных научных дисциплин, а также поиска строгих способов представления трех различных взаимосвязанных и взаимозаменяемых, но взаимопротивоположных начал – объекта (

денотата), языка (слова) и мысли (концепта, субъекта) как единого целого. Такой подход выводит на передний план знакоцентризм, делая объектоконструирование частным случаем знакоконструирования. Но знакоцентризм как семиотический феномен является «методологическим ядром» оснований математики и, следовательно, актуальными в исследованиях конвергирующих систем становятся методы математического моделирования.

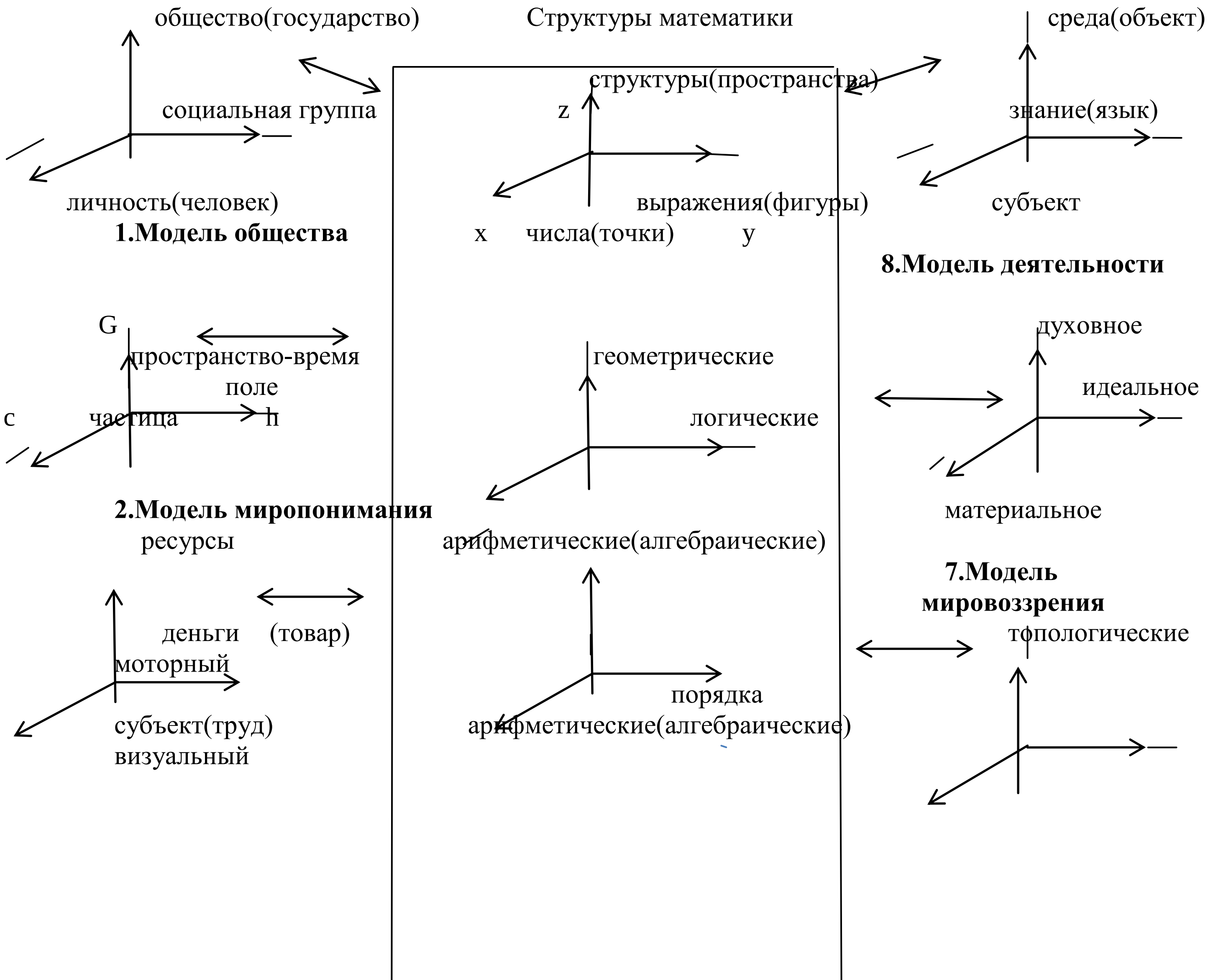
Поэтому процесс обучения в целом, и математике в педагогическом вузе в частности, становится поликомпонентным и его исследование, соответственно, требует комплексного подхода, способствующего формированию у студентов прнципа категориального анализа, позволяющего развитию социокультурных и гуманитарных компетенций.

В этом направлении разработке интегральной концепции в математическом образовании и анализу интеграционных процессов в профессиональном образовании с различных позиций посвящены работы, где исследованы: философские и психолого – педагогические аспекты образования информационного периода развития общества (А.Г.Асмолов, Г.А.Балл, Э.Е.Бехтель, В.П.Зинченко, В.И.Загвязинский, А.А.Мамченко, В.С.Меськов, Н.Х.Розов, Н.Ф.Талызина, И.П.Фарман, Д.И.Фельдштейн и др.); проблемы школьного и вузовского математического образования (В.В.Афанасьев, В.Г.Болтянский, В.А.Гусев, С.Н.Дорофеев, Ю.М.Колягин,В.В.Мадер,А.Г.Мордкович, Е.И.Смирнов, В.А.Тестов, М.В.Шабанова и др.); различные подходы для усовершенствования образовательных технологий (В.С.Безрукова, В.П.Беспалько, Е.С.Заир – Бек, В.М.Монахов,В.А.Сластенин, А.В.Хуторский и др.); гуманитарные и мировоззренческие аспекты в математическом образовании (В.И.Арнольд, Г.М.Бирюкова,Е.В.Бондаревская, А.Л.Жохов, А.Х.Назиев, В.М.Симонов и др.); интегральные концепции и возможности их реализации в различных моделях обучения, в том числе и в математическом образовании (А.Я.Данилюк, И.Ю.Дик, И.А.Иванов, А.О.Карпов, Е.Н.Князева, Е.Е.Макарова, В.И.Снегурова, Н.Л.Стефанова, Н.К.Чапаев, Д.Б.Юдин и др.).

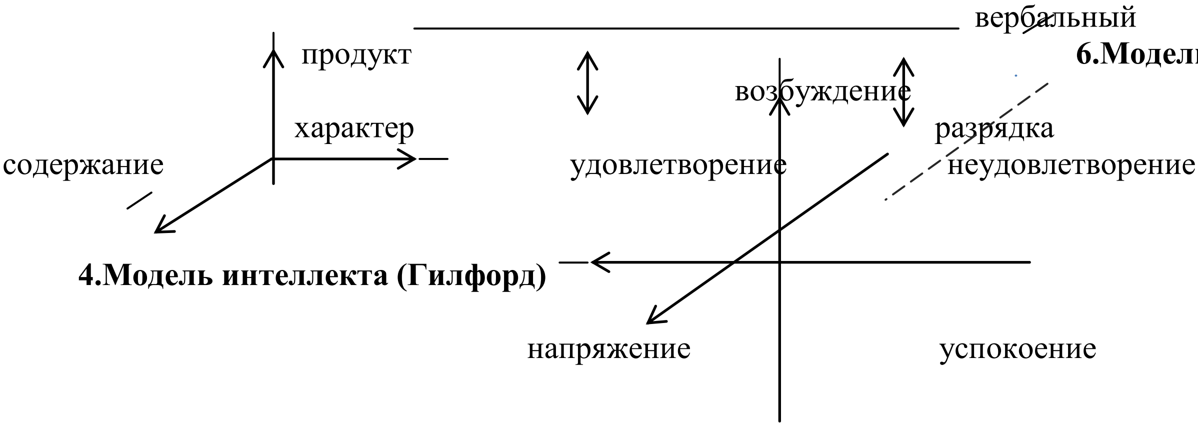
Под комплексным подходом в математическом образовании в стратегии новой образовательной парадигмы, рассматриваемом как обобщение интегративного подхода, представляемого дуальной парой « процесс – система» или « интеграция – комплексификация», мы будем понимать совокупность приемов, принципов, способов воздействия на процесс обучения математике и профессиональную деятельность субъектов, двойственным образом объединяющая в единое целое процесс построения новых объектов (знаний), с полученным в результате такого действия сложным объектом (комплексом, системой) методами математического моделирования и синергетики. Тогда в математической модели такого процесса (явления) паре «система – процесс» соответствует категория, определяемая парами вида «объект – морфизм», подчиняющимися определенным условиям. Мы предлагаем на языке категорий построить и исследовать процесс обучения математике в педвузе с позиций постнеклассической образовательной парадигмы и на основе закономерностей комплексного мышления, для которого характерна триадическая структура, состоящая из трех компонентов: математического, диалектического и «жизнедеятельностного» мышления. Каждый из этих компонентов комплексного мышления определяет соответствующую логику: математическое мышление – математическую логику, диалектическое мышление – диалектическую логику (по А.А.Денисову), «жизнедеятельностное» мышление – логику повседневной жизни субъекта деятельности. Считаем, что их категориальный синтез дает возможность целостного процессуально – системного восприятия объекта исследования. Тем более, как считают в научном сообществе настоящего периода, в постнеклассической науке, объединяющей сложные системы на общих основаниях базисной триады «математика – физика – философия», для которой фундаментальными идеями являются глобальный эволюционизм и системность, в качестве первичной математической структуры принимают не теорию множеств, а теорию категорий, предпочитая алгоритмизации моделирование. Это означает, что процесс обучения математике характеризуется, с одной стороны, проявлением категориальных признаков в смысле философского дискурса, а с другой стороны, категорным представлением как математической структуры. Возникающиеся в сочетании таких свойств проблемы в математическом образовании предлагаем разрешить актуализацией методов синтеза знаний различных предметных областей, полученных на основе выделенных нами следующих методологических принципов: единства противоположностей, соответствия, аналогии, определенности, симметрии, двойственности, инвариантности и математического моделирования [6,7] . Эти принципы согласованы с принципами научного познания [4] , психологическими принципами развития системы [1, 3] и психологическими принципами гуманизма [2] .

Процесс «объединения» математики, природы и мышления происходит теоретизацией трех базисных начал когнитивной деятельности – субъекта, языка и объекта как единого целого. Это означает, что тринитарная модель обучения математике должна быть положена в основу базовой научной парадигмы современного образовательного процесса, где в качестве элементов тринитарного отношения выступают субъект, знание, среда. Тем более, что базисные структурные элементы модели когнитивной деятельности находятся в изоморфном соответствии с базисными структурными элементами моделей общества, миропонимания, математики, мировоззрения, языков, экономики, моделей интеллекта и системы чувств в психологии, как это указано в приведенной ниже схеме координатизации моделей тринитарных базисных структур.Такая взаимосвязь базисных структурных элементов различных моделей- комплексов позволяет выявить общие закономерности (синергизм), присущие всем основным структурным компонентам целостного мира и порождающие, тем самым , глобальные структуры, в которых центральное место занимает социокультурное составляющее.

Схема координатизации моделей тринитарных базисных структур



3.Модель экономики



6.Модель языков

4.Модель интеллекта (Гилфорд)

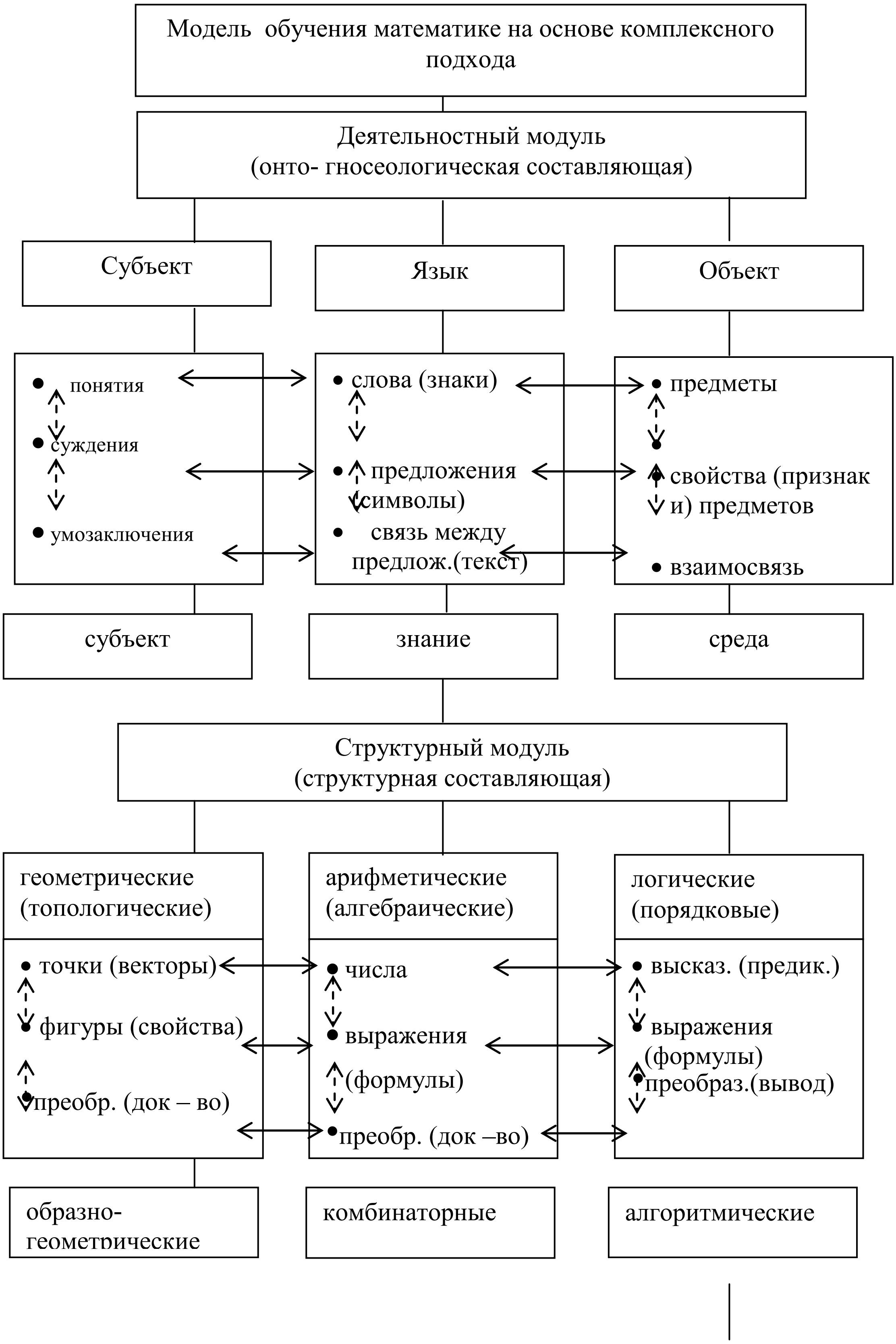
5.Модель системы чувств (Вундт)

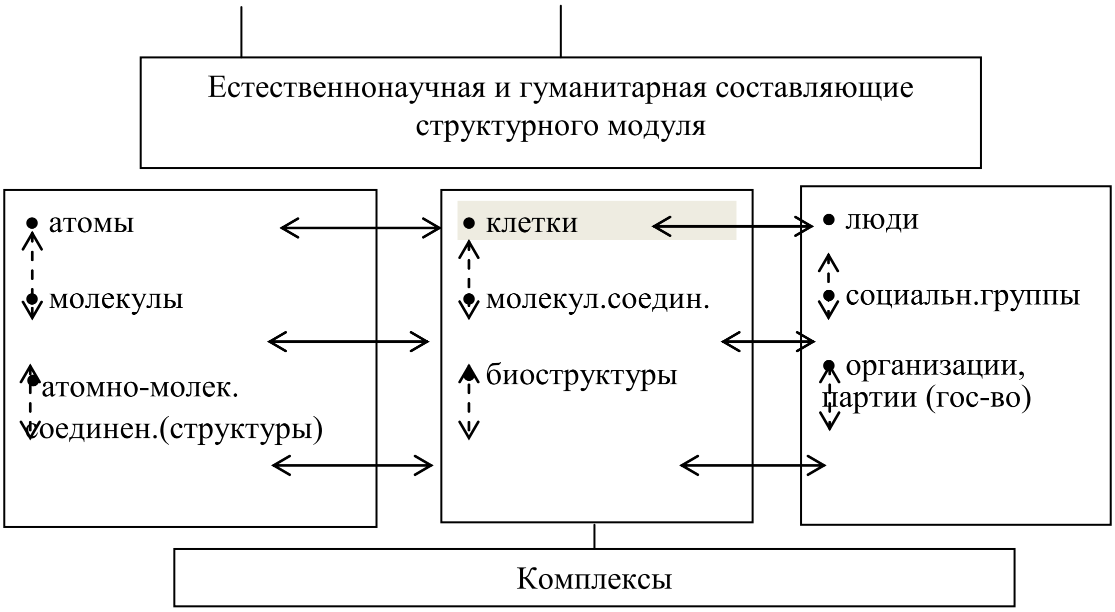
Это означает возможность построения для той или иной исследуемой структуры различных изоморфных математических моделей, способствующих взаимопониманию, взаимопроникновению и диалогу культур. Предлагаемая нами модель обучения математике на основе комплексного подхода представляется деятельностным модулем «субъект-язык-объект» (или «субъект-знание-среда) и структурным модулем «арифметические-геометрические-порядковые (логические)», причем считается, что в деятельностный модуль имплицитно входит модуль целеполагания, выполняющий функцию формирования ЗУН, компетентности и мировоззрения (или миропонимания), а компоненты структурного модуля согласованы с компонентами естественнонаучного и гуманитарного составляющих. Психологическими принципами генезиса такой модели является:

1. В деятельностном модуле – это принцип единства сознания и деятельности (Рубинштейн С.Л.).
2. В структурном модуле – это принцип целостного восприятия формы и содержания.
3. В комплексной модели в целом – это принцип культурно-исторической детерминации психики (Выготский Л.С.) и принцип существования изоморфизма между природными, социальными и ментально-символическими структурами (Леви-Стросс).

Эти принципы и составляют основу психологического содержания соответствующих структур комплексного мышления, играющие вместе с онтологическими, гносеологическими и логическими структурами важную роль в обосновании комплексного подхода и построении соответствующей модели обучения математике как методических объектов интегральной математики.

Две формы количественной определенности – экстенсивная и интенсивная – синтезируют как математические структуры, так и различные структуры живой и неживой природы по одной и той же логической схеме, подчиняющейся методологическим принципам комплексного подхода и при этом модель обучения математике становится формализованным представлением отношений и связей элементов множества различных предметных областей. Связь между категориальными элементами компонентов моделей осуществляется как по горизонтали, так и по вертикали, выявляя на каждом уровне соответствующие структурные инварианты, определяемые как математические структуры.


Модель обучения математике на основе комплексного подхода
Деятельностный модуль
(онто- гносеологическая составляющая)
Субъект
Язык
Объект
понятия
суждения
умозаключения
слова (знаки)
предложения (символы)
связь между предлож.(текст)
предметы
свойства (признаки) предметов
взаимосвязь
субъект
знание
среда
Структурный модуль
(структурная составляющая)
геометрические (топологические)
арифметические (алгебраические)
логические (порядковые)
точки (векторы)
фигуры (свойства)
преобр. (док – во)
числа
выражения (формулы)
преобр. (док –во)
высказ. (предик.)
выражения (формулы)
преобраз.(вывод)
образно-геометрические
комбинаторные
алгоритмические



Такая модель обучения математике выражает и процессуальную, связанную с вертикальным и горизонтальным трансферами (лифтами), и системную суть комплексификации-интеграции, позволяющие выделить содержательно единые блоки и разделы учебных программ и планов обучения различным профессиям, придающие математическому образованию значение целостной и динамической педагогической деятельности.Но а продуктивность педагогической деятельности, очевидно, определяется степенью владения педагогом универсальными профессиональными знаниями и знаниями о социализирующейся личности как био-психо-социокультурном феномене. Комплексный подход к обучению математике в педагогическом вузе и является одним из шагов в разрешении проблемы качественного математического образования, отвечающего требованиям современного периода развития общества.

Мы полагаем, что основные методологические принципы комплексного подхода к обучению математике бакалавров педагогического вуза в современных условиях в определенной степени соответствуют принципам концепции фундирования опыта личности в процессе профессиональной подготовки, служащей « для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающим их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и формирования личности педагога» [5].

Библиографический список

1. *Асмолов, А. Г.* Культурно-историческая психология и конструирование миров [Текст] / А.Г. Асмолов / – М.,1996.
2. *Балл, Г. А.* Психологические принципы современного гуманизма [Текст] / Г.А. Балл / Вопросы психологии. – 2009. - №6. – с. 3-12.
3. *Князева, Е. Н.* Трансдисциплинарные когнитивные стратегии в науке будущего. Вызов познанию. Стратегия развития науки в современном мире [Текст] / Е.Н. Князева / – М.,2008.
4. *Курашов, В. И.* Начала философии науки [Текст] / В.И. Курашов / – М.,2007.
5. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб.пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова [Текст] - М.: Гардарики,2002. - 383с.
6. *Ярахмедов, Г. А.* Комплексный подход к математическому образованию в педагогическом вузе: теория и методология: монография [Текст] / Г.А. Ярахмедов / – Махачкала,2013. – 340с.

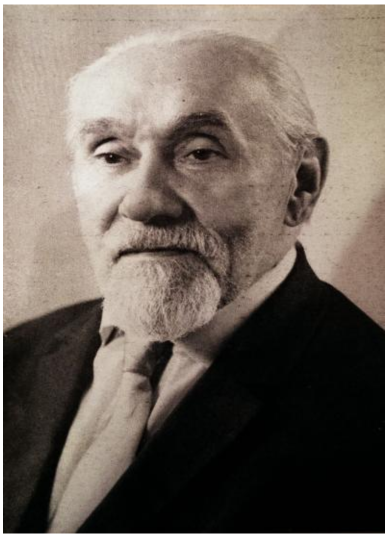
7. *Ярахмедов, Г. А*. Тринитарность как интегральный признак целостности системы в новой образовательной парадигме [Текст] / Г.А. Ярахмедов / Известия Южного федерального университета. – Ростов–на- Дону, 2014. - №1. –с. 42-49.

Глава 4

История и философия математики и математического образования

Педагогическое credo профессора математики Ивана Козмича Андронова (к 120 - летию со дня его рождения)

Н.Н. Авдеева, Е.И. Щукин



1. В «Истории отечественной математики» [1] читаем: «Андронов Иван Козмич родился 3 июня 1894, г. Новосиль (ныне Орловской области), окончил Московский педагогический институт (1918), профессор(1925), кандидат педагогических наук(1934), член – корреспондент Академии педагогических наук СССР(1957), Заслуженный деятель науки РСФСР(1964), с 1920г. работает в АПН СССР, с 1931г.- также в Московском областном педагогическом институте им. Н.К. Крупской (методика математики, история математики)».

   Из всех этих званий Иван Козмич считал наиболее значимым – «профессор математики» (педагог – математик).

2. Ивану Козмичу пришлось рано встать на самостоятельный путь. Он родился в многодетной трудовой семье, где продолжительно и тяжело болел его отец. После получения среднего образования в 1911г. Иван Козмич начинает педагогическую деятельность в качестве учителя начальной школы. Жажда знаний и любовь к педагогической работе привели его в дореволюционный учительский институт, после окончания которого он работал преподавателем в Порецкой учительской семинарии, в которой существовали прекрасные педагогические традиции еще со времен Ильи Николаевича Ульянова.

   В первые годы становления Советской власти Иван Козмич активно включился в работу по созданию новой системы народного образования. 18 мая 1918г. на первом съезде учителей (г. Москва) он выступает с большим докладом «Проект новой программы по методике математики для учительских семинарий» [2].

   Педагогическая деятельность Ивана Козмича продолжалась более 60 лет и была полностью отдана математическому просвещению. Более 40 лет его творческая жизнь была связана с Московским областным педагогическим институтом имени Н.К. Крупской, куда он пришел в 1931 году, в год образования института, и оставался в нем до конца жизни.

   Возглавив кафедру высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, Иван Козмич вскоре превратил ее в инициативный коллектив квалифицированных педагогов, которые сочетали учебно- педагогическую работу и творческий поиск. Иван Козмич и его кафедра способствовали превращению МОПИ им. Н.К. Крупской в один из ведущих институтов по подготовке высококвалифицированных преподавателей средней и высшей школы. Ныне это Московский государственный областной университет, находящийся, как в свое время и МОПИ, в одном из исторических зданий Москвы – улица Радио, 10а (бывшая Слободская, дом Демидовых) [13].

3. Свое педагогическое credo («верую»!) Иван Козмич изложил в работах [2 -6]. В нескольких словах оно сводится к следующему: преподаватель математики средней и высшей школы должен уверенно владеть основами классического анализа, современной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, чтобы, используя созвучные со временем педагогические средства, передать эти знания учащимся средних учебных заведений и студентам вузов на основных и факультативных занятиях. В число вступительных экзаменов в аспирантуру МОПИ (по методике преподавания математики) Иван Козмич включал экзамен по высшей математике, ограничиваясь в части методики представлением реферата. За успешные научно – методические работы (т.е. исследования, связанные с открытиями в области методики математики), по мнению Ивана Козмича, могли присуждаться и степени кандидатов физико-математических наук. В качестве примера он обычно приводил работы Пафнутия Львовича Чебышева [7] и Овсея Ароновича Вольберга [8]. Если магистерская диссертация П.Л, Чебышева [7] хорошо известна и математикам, и педагогам, то относительно работ О.А. Вольберга следует сказать, что это два мультипликационных учебных фильма «Бегущие и стоячие волны» и «Гармонические колебания», которые в 1935 – 1936г.г. были сняты кинолабораторией Военной электротехнической академии имени С.М. Буденного (ВЭТА). Они и послужили основанием для защиты диссертации на степень кандидата физико – математических наук [3, с.108].

4. В 1957 году Иван Козмич получает звание члена – корреспондента АПН СССР и создает научно – методический семинар «Современные идеи в преподавании математики», который стал проводником передовых научно – методических работ созданной им школы педагогов – математиков. Семинар работает и по сей день. Ответственным секретарем семинара долгое время являлась кандидат педагогических наук, доцент В.Н. Шапкина, ученица Ивана Козмича. Сейчас ответственный секретарь этого семинара Т.Н. Кузнецова -- ученица Ю.М. Колягина, того самого, который под руководством Ивана Козмича защитил кандидатскую диссертацию «К вопросу о реформе математического образования и новой постановке преподавания арифметики в советской школе» (1963г.). Сейчас он известен как академик Российской академии образования, доктор педагогических наук, профессор, заслуженный учитель, заслуженный деятель науки РФ, отличник народного просвещения России. Его кандидатскую диссертацию еще в 1967г. Иван Козмич отмечал как одну из лучших работ по общей методике.

   110 диссертаций по широкому кругу проблем методики преподавания математики, истории математики и математического образования, написанные под руководством Ивана Козмича и успешно защищенные; его ученики, ставшие доцентами и профессорами; ученики его учеников [13,14] и его семинар – убедительное свидетельство жизненности научной школы профессора математики Ивана Козмича Андронова, его педагогического credo.

   Среди указанных выше 110 кандидатских диссертаций есть и 5 диссертаций, выполненных под руководством Ивана Козмича преподавателями и выпускниками Калининградского государственного педагогического института, который был основан в 1948 году в Калининграде (бывшей столице Восточной Пруссии – городе Кенигсберге). По итогам второй мировой войны этот город вместе с частью Восточной Пруссии отошел к Российской Федерации. В ноябре 1966г. КГПИ преобразован в университет, который сейчас носит название: Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта.

5. Открывает список этих работ кандидатская диссертация Марии Васильевны Еремеевой, посвященная вопросам преподавания элементов теории вероятностей в средней щколе и приложениям этой теории, изучаемым в школе. Иван Козмич считал эту работу (год защиты – 1966) одной из лучших диссертаций по методике преподавания математики, что и отметил в своей книге [3; с.64]. Регина Александровна Александрова (ныне – профессор кафедры педагогики и образовательных технологий) в 1967 году защитила кандидатскую диссертацию «Историческое развитие современного среднего математического образования США, Англии и Франции». Некоторые результаты этого исследования опубликованы в журнале «Математика в школе» [10]. Евгений Иванович Щукин защитил в 1968 году кандидатскую диссертацию о методе кинофикации в курсе математики средней школы (на примере темы «Производная функция от данной функции»). Одним из итогов его работы был выпуск на школьные экраны всей страны (1966г.) математического учебного фильма «Задачи, приводящие к понятию производной», в диссертации была разработана, и система работы с такими фильмами. Инна Александровна Барыбина (сейчас она работает доцентом кафедры, которую когда-то возглавлял Иван Козмич, в Московском государственном областном университете) в 1970 году защитила диссертацию «Элементы современной алгебры на факультативных занятиях в средней школе». Нина Николаевна Авдеева (доцент кафедры высшей математики Балтийской государственной академии Рыбопромыслового флота) в 1970 году защитила кандидатскую диссертацию «Факультативные курсы по теории вероятностей и математической статистике», в которой рассмотрела историю развития математической статистики, содержание предлагаемых курсов, а также статистическую обработку результатов педагогических экспериментов с использованием непараметрических критериев. Результаты ее исследований опубликованы в журнале «Математика в школе» [11].
6. В 1974 году, в год своего 80-летия Иван Козмич начал публиковать свой энциклопедический труд – монографию по истории развития математики «Трилогия предмета и метода математики» [3-5]. При жизни он успел издать лишь третью часть этого труда [3]. В 1975г. Иван Козмич скоропостижно скончался и 2/3 монографии остались в рукописи. Только спустя 30 лет его ученикам – В.А.Садчикову, А.Г.Хармацу, В.Н.Шапкиной, В.Л.Шамшурину – удалось завершить издание рукописи в виде двух книг [4,5]. Временной отрыв от первой части «Трилогии» побудил энтузиастов переиздать ее в 2004г. В итоге читатель – и прежде всего студент, слушающий курс истории математики – получил полноценное учебное пособие в единстве трех книг. Уникальность «Трилогии» заключается в том, что исторический анализ развития математики вырастает из описания жизни и деятельности ученых – математиков и педагогов в их биографиях (а их более 70) [12]. «Трилогия» - одна из тех серьезных и редких книг, где есть, например, стихи величайшего математика мира, посвященные другому великому человеку – педагогу:

«Твой ненапрасный посев почва уже приняла;
Скоро потомство пожнет; на корню уж богатая жатва;
Созданья твои судьба взлеет для нас;
Мало-помалу ясней становится счастливцам природа;
Если мы силы сплотим – будет удача во всем.
Время придет, о Комений, когда и тебя, и деяния,
Думы, заветы твои – лучше люди почтут.» [4,с. 231].

Эти слова Готфрида Вильгельма Лейбница, обращенные к Яну Амосу Коменскому, все ученики научно-методической школы профессора математики Ивана Козмича Андронова полностью относят и к своему Учителю, 120 лет со дня рождения, которого было отмечено в начале лета 2014 года.

Библиографический список

1. История отечественной математики [Текст] / / Том 4; книга 2, 1917-1967. Издательство «Наукова Думка», Киев, 1970.
2. Сборник «Математика в школе» [Текст] / / №2, 1918.
3. *Андронов, Н.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР. [Текст] / Н.К. Андронов / Москва, изд-во «Просвещение», 1967.
4. *Андронов, И.К.* Трилогия предмета и методы математики (ч.I) [Текст] / И.К. Андронов / Московский областной педагогический институт им. Н.К Крупской, Москва, 1974.
5. *Андронов, И.К.* Трилогия… (ч.II) [Текст] / И.К. Андронов / – Московский государственный областной университет, Москва, 2003.
6. *Андронов, И.К.* Трилогия… (ч.III) [Текст] / И.К. Андронов / Московский государственный областной университет, Москва, 2004.
7. *Чебышев, П.Л.* Опыт элементарного анализа теории вероятности. [Текст] / П.Л. Чебышев / сочинение, написанное для получения степени магистра кандидатом Чебышевым П.Л. – Москва. В типографии Августа Семена, на Кузнецком мосту. В доме Суровщикова, 1845.
8. *Вольберг, О.А.* Опыт работы над кинофильмами по высшей математике. [Текст] / О.А. Вольберг / сборник статей «Учебное и научное кино», 1938.
9. Восточная Пруссия (с древних времен до конца второй мировой войны). [Текст]. – Авторский коллектив; рук. В.С. Исунов, Г.В. Крегинин. – Калининград: Книжное изд-во, 1995.
10. *Александрова, Р.А.* Одна из экспериментальных программ по математике для средней школы США. [Текст] / Р.А. Александрова / Журнал «Математика в школе», , №5, 1966.- С. 91-96.
11. *Авдеева, Н.Н.* О статистическом образовании в школе. [Текст] / Н.Н. Авдеева / Журнал «Математика в школе», №3, 1973.- С. 4-8.
12. «Народный учитель» – газета Московского ордена Трудового Красного знамени государственного областного университета, №8 (1773), 29. XII. 2004.
13. *Щукин, Е.И.* Демидовские университеты в Европе и России. [Текст] / Е.И. Щукин / Материалы V Демидовских чтений. Изд-во ЯРГУ им. П.Г. Демидова, 2012.- С. 232-233.
14. *Щукин, Е.И.* 6 этапов становления высшего математического (университетского) образования в Ярославле. [Текст] / Е.И. Щукин / Труды X Международных Колмогоровских чтений. Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2012.- С. 243-245.

Влияние Дж. Дж. Сильвестра, Феликса Клейна, Е. Г. Мура на развитие математических исследований в США

В.Г. Алябьева

До 1876 года в университетах США не существовало программ подготовки исследователей в области математики.

В последней четверти XIX века США превратились в могучую индустриальную державу. К 1894 году страна занимала первое место в мире по объёму промышленной продукции. Однако накопление материальных богатств сопровождалось слабой «интеллектуальной активностью». Развитие наук в США отставало от европейского уровня и от потребностей американской жизни. Журнал «Nation” признавал, что *американцы постыдно мало способствовали развитию мировой мысли*. Правительство страны и администрация штатов стали проявлять обеспокоенность неудовлетворительным развитием науки в стране, стали поддерживать реформаторские проекты в сфере высшего образования.

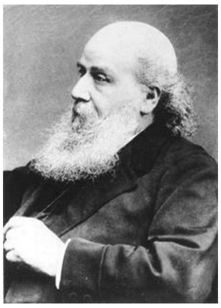
В стране стали открываться новые университеты.

До Гражданской войны 1861-1865 года решающее влияние на развитие высшей школы США оказывали французские, особенно английские, институты, после Гражданской войны усилилось влияние немецких университетов. Проявлением этого влияния было открытие в 1876 году университета Джона Гопкинса в Балтиморе – первого университета США, воспринявшего многие черты немецкого университета. Главной из этих черт явилось создание исследовательских центров при университете, где сообща вели научную работу преподаватели, аспиранты, студенты. Общим правилом для университета был свободный выбор студентами учебных дисциплин со специализацией в одной из них. Эти центры в США получили название *аспирантских школ искусств и науки* (Graduate schools of Arts and Science). Университет Джона Гопкинса утвердил понятие “*университетский профессор*”, то есть профессор-исследователь. Первым президентом университета Джона Гопкинса был Д.К. Гилман (Daniel Coit Gilman (1831-1908), который много сделал для становления этого исследовательского центра в Балтиморе. В течение полугода Гилман путешествовал по Европе и Англии, знакомился с постановкой университетского и последипломного образования. В отличие от президентов существующих колледжей и университетов, таких, как Гарвард, Йель, Принстон, Гилман не стал следовать ни установившимся традициям, ни принятой философии образования. Он понял, чтобы выжить и процветать, новый университет должен предложить в области образования нечто новое. В результате своих наблюдений за рубежом Гилман признал, что Соединённые Штаты остаются далеко позади европейских стран в научном отношении. Гилман сделал ставку на последипломное образование. Он поставил цель сделать Соединённые Штаты конкурентноспособными в области научных исследований. В математике эта цель была достигнута благодаря приглашению в качестве профессора математики знаменитого британского учёного Сильвестра.

Инаугурация первого президента университета, Даниэля Койта Гилмана, состоялась 22 февраля 1876 года. Это событие было приурочено к 100-летнему юбилею образования Соединённых Штатов и ко дню рождения первого президента США Джорджа Вашингтона. В своей речи Гилман обозначил миссию университета: *поддержка исследований,… помощь отдельным учёным, которые продвигают различные направления науки и помогают обществу, в котором они живут.* С самого начала руководство университета Джонса Гопкинса и сам Гилман были непреклонны в том, что новый университет свободен от религиозных отношений и влияний. В своём инаугурационном адресе президент университета провозгласил: религия не должна опасаться науки, и науке нечего пугаться религии. Религия требует исполнять слово Бога, а наука должна открывать Божественные законы.

Гилман поставил задачу собрать в университетский центр самых лучших преподавателей и самых способных студентов. Из американских знаменитостей он пригласил: основателя американской филологии Бэзила Гилдерслива (Basil Lanneau Gildersleeve, 1831 – 1924), историка Герберта Адамса (Herbert Baxter Adams, 1850-1901), химика Ремсен Ира (Ira Remsen, 1846 - 1927). Бэзил Гилдерслив основал в 1880 году ежеквартальный журнал *American Journal of Philology*. Герберт Адамс стал первым университетским профессором истории, возглавил в университете департамент истории и политических наук, основал американскую историческую ассоциацию. Ира Ремсен в 1879 основал *American Chemical Journal* и 35 лет был редактором журнала.

Возглавить кафедру математики в университете Хопкинса Гилман пригласил выдающегося английского математика Джеймса Джозефа Сильвестра.



(James Joseph Sylvester, 1814- 1897).

Осенью 1876 года Сильвестр приезжает в Балтимор. Ему 62 года. В 1870 году в возрасте 55 лет он ушёл в отставку в Военной академии в Вулвиче. Академия отказывалась выплачивать ему полную пенсию и уступила лишь после долгих публичных дебатов, выступлений Сильвестра в столичной газете "Times". Несколько лет Сильвестр пребывал без определённых занятий.

В университете Джона Гопкинса от Сильвестра требовалось не только обучать будущих исследователей, но и заниматься исследованиями, публиковать новые результаты. По сравнению с Королевской военной академией университет Джона Гопкинса был настоящим раем для учёного У Сильвестра теперь было всё, о чём он только мог мечтать. Впервые, находясь в настоящем университетском окружении. он мог возглавить целое математическое направление. Впервые перед ним были студенты, желающие активно заниматься научными исследованиями. Он сам активно занимался исследованиями и одновременно готовил будущих исследователей. Один из студентов Сильвестра так описал его как преподавателя: "Основная часть его лекций состояла в значительной степени из его собственных работ. как правило, "свежеиспечённых", только что полученных результатов... Любая нерешённая трудность, любое предлагаемое расширение, любой возможный переход со ссылкой на другие лекции неминуемо становился у него поводом для отступления, которое его обычно поглощало, если на самом деле не уводило в сторону от исходного предмета. Почти все важные статьи, которые он публиковал, находясь в Балтиморе. возникали таким образом. Мы, слушатели его лекций, могли бы сказать, что были очевидцами создания этих трудов. студенты не получали систематического курса лекций по какому-нибудь предмету, но у них вызывали живой интерес к нескольким предметам, и они выигрывали многое" [3]. Питт Дарфи учился в университете Гопкинса в период с 1881 по 1883 год, позднее работал в должности профессора математики в Женеве, Нью Йорке. Он описывает типичный сюжет, характеризующий стиль обучения Сильестра: "Осенью 1881-82 учебного года Сильвестр начал читать лекции по теории чисел и обещал следовать книги Дирихле. Прочитав шесть или восемь лекций, он переключился на тему о распределении простых чисел и посвятил ей несколько недель. После чего он переключился на универсальную алгебру. В результате ни одна тема не была полностью завершена. Мы никогда не получали систематического курса лекций по любой теме, но лекции Сильвестра вызывали живой интерес к нескольким темам, что для нас было важно " [4].

Хэлстед, бывший студент Сильвестра, утверждал: "Все молодые люди. полные творческих сил. устремились в Балтимор, как некогда стремились молодые учёные в Александрию к Евклиду".

Сильвестр много работал над программой курсов, чтобы вовлечь студентов в творческое изучение предмета и в научные исследования. В одном из писем Сильвестра в Англию есть такие строки: "Я работаю с молодыми людьми. которые уже окончили другие университеты и получили дипломы. И это как раз то, что мне хотелось бы делать.... У меня не возникает необходимости давать какие-то лекции без удовольствия. Невозможно представить себе, чтобы у профессоров где- то были более благородные и благодарные слушатели, чем те, с которыми мы занимаемся здесь" [3].

Сильвестр читал курсы: теория чисел, теория определителей и современная алгебра, теория подстановок, теория разбиений, Артур Кэли приезжал с лекциями по алгебраической геометрии, абелевым и тэта-функциям, Чарльз Пирс из Гарварда читал теорию вероятностей и логику. Позднее лекции стали читать его ученики, защитившие диссертации: Т. Крейг - эллиптические и тэта-функции, Ф.Франклин - современная синтетическая геометрия.

Восемь человек под руководством Сильвестра защитили докторские диссертации Томас Крейг (Thomas Craig, "The representation of one surface upon another, and some points in the theory of the curvature of surfaces", 1878), Джордж Хэлстед (George Bruce Halsted, Basis for a dual logic", 1879), Фабиан Франклин (Fabian Franklin, "Bipunctual coordinates", 1880), Ирвин Стрингхэм (Washington Irving Stringham, "Regular figures in *n*-dimensional space", 1880), Оскар Митчелл (Oscar Howard Mitchell, "Some theorem in numbers", 1882), Уильям Дарфи (William Pitt Durfee, "Symmetric functions" ,1883), Джордж Эли (George Stetson Ely, "Bernouilli′ s numbers", 1883), Уильям Дэвис (Ellery William Davis, "Parametric representations of curves", 1884).

Сильвестр основал научную школу, которую назвал "Mathematical Seminarium". Школа представляла своего рода лабораторию для развития новой математики. Сильвестр руководил ею, а его ученики помогали ему. В прощальном обращении к университету Гопкинса в 1883 году Сильвестр писал: " Я много написал в течение 7 лет. Почти каждая работа возникала либо в аудитории. либо в частной беседе с моими учениками. Есть несколько работ, в которых имена моих учеников не называются".

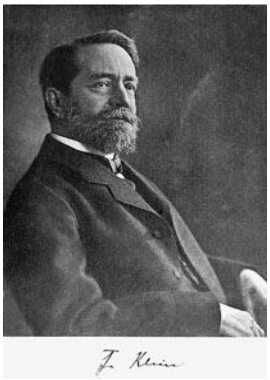
В 1881 году Сильвестр основал *American Journal of Mathematics*, Уильям Стори (Story) был его помощником. В этом журнале Сильвестр опубликовал 30 статей, в том числе большую работу "Конструктивная теория разбиений", представляющая собой "монументальный" вклад в комбинаторику. Усилиями Сильвестра и его учеников Америка появилась на математической карте мира. Его студенты публиковали работы не только в американских журналах, но и таких зарубежных изданиях как Comples Rendus Французской академии наук, в журнале Крелле: Томас Крег написал работу по теории дифференциальных уравнений *A Treatise on Linear Differential Equations;* Брюс Хэльстед отличился работами по неевклидовой геометрии и истории математики, Франклин Фабиан опубликовал новое доказательство теоремы Эйлера о пятиугольных числах и нашёл ей применение в теории инвариантов, Уильям Дарфи занимался теорией симметрических функций и их связями с теорией инвариантов, Джордж Эли и Оскар Митчелл преуспели в теории чисел.

В феврале 1883 года Артур Кэли сообщил Сильвестру, что умер Генри Смит - Савильянский профессор в Оксфорде. Образовалась вакансия на одной из наиболее престижных кафедр Англии. Сильвестру исполнилось 68 лет, и он сомневался, сможет ли он занять кафедру. Тем не менее, 5 декабря 1883 года он получил известие, что избран Савильянским профессором Оксфорда. По просьбе преподавателей Оксфорда он читал им курс по теории матриц.

С отъездом Сильвестра многое изменилось в университете Джона Гопкинса. Исследовательский пыл его учеников угас. Сильвестр в письмах спрашивал: "Что случилось?". Ученики признавались, что им недостаёт "стимула Гопкинса". Те из них, кто остался работать в университетах и колледжах США, отмечали, что получили большую учебную нагрузку, а администрацию университета не интересует научная работа сотрудников и их публикации.

Возникший после отъезда Сильвестра вакуум в математических исследованиях американцев частично восполнил Феликс Клейн. В 1884 году он впервые приехал в США. Ему предлагали освободившуюся после отъезда Сильвестра кафедру математики в университете Джона Гопкинса, но после долгих переговоров Клейн отклонил предложение и предпочёл Гёттинген.

В течение 10 лет Клейн влиял на развитие математики в США. Его широкий взгляд на математику, поиск единой концепции математического знания, его научные связи с ведущими европейскими математиками привлекали американских студентов к его лекционным курсам. Клейн занимался геометрией, теорией групп, теорией римановых функций, теорией Галуа. Его влияние на американских студентов связано не столько с его конкретной программой исследований, сколько с его общей способностью вдохновлять их и приучать к исследовательской работе. Девять американских студентов под его руководством защитили диссертации, шестеро в разные годы занимали пост президента Американского математического общества. 13 - пост вице-президента Общества.



(Феликс Клейн (Felix Klein, 1849-1925).

В 1893 году в США открывается Международная промышленная выставка, посвящённая 400-летию открытия Америки, и в её рамках проводился Международный математический конгресс. Конгресс не получил порядкового номера, но и по истечении времени именовался международным.

Всего на конгрессе присутствовало 45 человек, из них - 41 американцев и четверо европейцев: двое из Германии, один из Австрии и один из Италии. Из 39 докладов только тринадцать были прочитаны американцами, 16 - принадлежали немцам, три - итальянцам, три - французам, один доклад принадлежал русскому автору, Первушину И.М. Среди иностранных докладов наиболее значимыми были доклады Эрмита, Гильберта, Макса Нётер, Штуди и Вебера. Хотя на конгрессе подавляющее большинство участники были американцами, по содержанию конгресс был интернациональным. На конгресс прибыл Феликс Клейн. Он привёз доклады немецких коллег и выступил с большим докладом "Современное состояние математики". После конгресса Северо-Западный университет организовал коллоквиум, на котором Клейн в течение двух недель читал лекции для 20 американских слушателей.

Президентом математического конгресса был Елиаким Гастингс Мур. Он совместно с Генрихом Машке и Оскаром Больца входил в состав редакционного комитета по изданию трудов конгресса. Мур по значимости своих исследований не сравним ни с Сильвестром, ни с Клейном. Это был начинающий исследователь, но он проявил себя как умелый организатор науки. его научные интересы относились к геометрии, теории групп, теории чисел, теории функций, интегральным уравнениям (русскому читателю Мур известен как специалист по функциональному анализу, или, как говорили во времена Мура, общему анализу).

Елиаким Гастингс Мур
(Eliakim Hastings Moore, 1862-1832)

Мур окончил университет Йеля в 1885 году. Во времена студенчества наибольшее влияние на Мура оказал профессор Хьюберт Ньютон (Hubert Newton, 1830-1896), который во время своей европейской стажировки слушал в Сорбонне лекции М.Шаля по высшей геометрии. После окончания университета в Йеле Мур продолжил обучение в Европе. Летом 1885 года Мур прибыл в Гёттинген, где слушал лекции Г.Вебера, Г.Шварца. Зимой 1885-86 года Мур переехал в Берлин, где читали лекции по математике К.Вейерштрасс и Л.Кронекер. По возвращении в Соединённые Штаты молодой Мур преподавал в Йеле, четыре года в Северо-Западном университете. В 1892 году открывается университет в Чикаго. С осени 1892 года Мур стал работать профессором математики в Чикаго.

По предложению Мура для работы в университете Чикаго были приглашены немецкие математики Оскар Больца (Oskar Bolza, 1857-1942) и Генрих Машке (Heinrich Maschke, 1853-1908). Больца – воспитанник немецкой школы анализа Вейерштрасса, специалист по вариационному исчислению. Генрих Машке – выдающийся геометр, исследователь и превосходный лектор по геометрии. Мур, Больца, Машке прекрасно дополняли друг друга. Благодаря их усилиям университет в Чикаго с 1892 года по 1908 год был непревзойдённым университетом США по обучению высшей математике.

За период с 1896 по 1929 год 30 человек под руководством Мура получили докторские степени. С 1899 года издаётся *Transactions of the American Mathematical Society*. Мур был первым редактором Transactions и оставался им до 1907 года.

С 1899 года в университете Чикаго работали выдающиеся ученики Мура: сначала – Л. Диксон, затем – О. Веблен, Г. Биркгоф.

Если до 1875 года в США всего 6 специалистов в области математики имели степени доктора наук, то в течение последующих 15 лет 39 американцев получили степени в США и 15 – за рубежом. В последнем десятилетии XIX века появилось 107 новых докторов, 84 из них получили степени в США.

В 1888 году было основано нью-йоркское математическое общество, состоящее из 6 человек. Во время работы математического конгресса общество было преобразовано в Американское математическое общество. Его численность выросла в течение последующих лет до 200 человек. К концу XIX века оно насчитывало более 500 человек.

Конец XIX столетия стал переломным в истории американской математики. Окрепло математическое общество, выросло поколение учёных, способных вести самостоятельные научные исследования и обладающих необходимыми знаниями для обучения своих преемников

Становлению американской математики способствовало создание университетов нового типа: университета Гопкинса, университета Кларка, затем – в 1892 году – университета в Чикаго, в которых существовали программы подготовки исследователей, а также влияние таких учёных как Сильвестр, Клейн, Мур.

Библиографический список

1. *Алябьева В.Г.* Вклад Мура и его учеников в развитие дискретной математики [Текст] / В.Г.Алябьева // История и методология науки. Межвузовский сб.научных трудов. - Пермь: ПГУ, 2000. Вып.6. С. 89-99.
2. *Алябьева В.Г.* Размышление Дж. Сильвестра о комбинаторике [Текст] / В.Г. Алябьева // История и методология науки. Межвузовский сборник - Пермь: ПГУ, 1999. Вып. 7. С.
3. *Розенфельд Д.* Первый выдающийся еврейский математик Англии и Америки - Джеймс Джозеф Сильвестр. Страницы жизни и творчество (электронный ресурс: http://litbook.ru)
4. *Parshall K.P.* America's First School of Mathematical Research: James Joseph Sylvester at the Johns Hopkins University 1876-1883 // Archive for History of Exact Sciences, 1988. V. 38. P. 153-196.
5. *Parshall K.P., Rowe D.E.* The Emergence of the American Mathematical Research community (1876-1900): J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore / AMS/LMS. Series in the History of Mathematics, 1994. V.8.

Якоби Карл Густав Якоб 10.12.1804 – 18.02.1851 (к 210-летию со дня рождения)

Ананьева М.С.

1. Биография

Карл Густав Якоб Якоби родился в Потсдаме 10 декабря 1804 г. в семье процветающего банкира Симона Якоби. В семье было четверо детей: братья Мориц, Карл, Эдуард и сестра – Тереза. Первым учителем для Карла стал его дядя по материнской линии – Ф.А. Леман. Он занимался с мальчиком классическими языками и математикой, подготовил к поступлению в Постдамскую гимназию (1816). Как утверждал директор гимназии, с самого начала Карл проявлял признаки «универсального ума». Обучение математике он считал рутинным, поэтому его учитель Г. Бауэр позволял ему заниматься математикой самостоятельно. Острый язык и склонность к саркастическим выражениям нередко в дальнейшем приводили к тому, что коллеги Якоби не любили, хотя и уважали.

В 1821 г. Якоби поступил в Берлинский университет и обучался на до 1825 г. В первые два года он уделял внимание и философии, и филологии, и математике. Лекции по философии читал Г.В.Ф. Гегель (1770–1831), по филологии – А.Ф. Бек (1785–1867). По математике он предпочитал заниматься самостоятельно, считая лекции пустословием отчасти потому, что не был удовлетворен простым собиранием знаний, и всегда чувствовал потребность в глубоком понимании и изучении интересующего предмета. Так Якоби познакомился с классическими трудами Л. Эйлера (1707–1783), Ж.Л. Лагранжа (1736–1813), А.М. Лежандра (1752–1833) и других ученых.

На старших курсах Якоби решил связать научную деятельность с математикой. Его отказ от филологии и выбор в пользу математики имел благоприятные последствия для науки, как считал его коллега П.Г.Л. Дирихле (1805–1859). Сам же он писал: «Громадный колосс, созданный трудами Эйлера, Лагранжа, Лапласа, требует огромнейшей силы и чрезвычайного напряжения мысли от всякого, кто только захочет проникнуть в его внутреннюю природу, а не ограничится одним поверхностным ознакомлением. Стремление стать выше этих мастеров, чтобы не опасаться каждую минуту быть ими подавленными, не дает ни покоя, ни отдыха, до тех пор, пока действительно не станешь выше и не будешь в состоянии одним взглядом окинуть все возведенное здание. Покойно работать над усовершенствованием его отдельных частей и по мере сил вести созидание далее возможно только при условии постижения его духа» [3, С. 32].

К.Г.Я. Якоби стал одним из самых самоотверженных тружеников в истории математики наряду с Л. Эйлером, К.Ф. Гауссом и др. В 1825 г. он получил степень доктора философии за диссертацию, посвященную вопросам разложения алгебраических дробей на элементарные, связанным с теорией эллиптических функций, которые были важны в то время в вопросах интегрирования. Якоби готовил себя к преподавательской деятельности и стал читать в Берлинском университете лекции по приложениям анализа к поверхностям и пространственным кривым (дифференциальной геометрии).

Через год был Якоби был назначен приват-доцентом Кенигсбергского университета (преподавателем курсов, оплачиваемых слушателями). Там его хорошо принял известный астроном Ф.В. Бессель, в то время как с другими преподавателями отношения сначала не сложились, однако при приеме на работу научные достижения молодого, но уже известного ученого оказались весомее. Ему был 21 год, а в 23 он стал экстраординарным профессором. В Кенигсберге Якоби читал лекции по теории поверхностей и элементарной геометрии. В 1829 г., когда он представил блестящую работу «Новые основания теории эллиптических функций», его талант был признан коллегами, а немного позднее – учеными других государств:

1830 – иностранный член-корреспондент Петербургской АН,

1833 – член Лондонского королевского общества, иностранный почетный член Петербургской АН,

1836 – член Берлинской АН,

1846 – член Парижской АН,

1848 – член-корреспондент Мадридской АН.

С 1829 по 1842 гг. Якоби занимал должность профессора Кенигсбергского университета. В 1832 г. он лишился отца, а вместе с тем закончилось и материальное благополучие. Денег, оставленных отцом, хватило на 8 лет. К тому времени ученый был женат, имел на иждивении маленьких детей и разорившуюся мать.

За научными результатами Якоби внимательно следил признанный ученый – К.Ф. Гаусс (1777–1855). Он боялся, что материальные затруднения повлияют на его занятия математикой. Однако, несмотря на трудности, тот продолжил усердную научную деятельность. Напряженный труд, финансовые проблемы и кенигсбергский климат подорвали здоровье Якоби. Прусский король Вильгельм Фридрих III по достоинству для страны оценил славу и заслуги ученого. Он выделил ему жалованье и посоветовал пожить в теплом климате Италии. Ученый побывал в путешествии по нескольким городам, а в 1839 г. навестил К.Ф. Гаусса. По возращении из Неаполя ему было разрешено пожить в Берлине. Места профессора он там не получил, но лекции, как член Академии, мог читать.

В 1848 г. Для Якоби наступила очередная пора неудач, связанная с его решением заняться политикой и избираться в парламент. Впоследствии он был лишен жалованья короля. Ученый полностью вернулся к научной деятельности.

Научная, литературная, педагогическая деятельность Якоби была успешной и плодотворной. Несмотря на это, он оставался недовольным своими результатами, жалуясь на злой рок, тяготевший над его последними исследованиями, прерывавшимся из-за болезней или семейных несчастий. Сам он говорил: «Трудна работа, которую я совершил, и трудна работа, которой я занят... упорное, терзающее мозг размышление требует более сил, чем самое настойчивое прилежание. Поэтому, если постоянным упражнением в размышлении я приобрел в нем некоторую силу, то пусть не думают, что мне это досталось легко помощью какого-либо счастливого природного дара» [3, С. 45].

Умер Якоби от оспы в феврале 1851 г. в возрасте 47 лет.

2. Научная деятельность

«Приступая к изображению научной деятельности величайшего из математиков... мы живо представляем себе всю трудность задачи очертить, как следует, все значение произведений человека, который черпал могучей рукой почти во всех областях науки..., который всюду, куда он направлял свой творческий дух, выводил на свет часто глубоко скрытые истины, который, наконец, вводя в науку новые основательные мысли, возвышал математическое умозрение и при том более, чем в одном направлении,... более высокую степень» [3, С. 25–26]. Эти слова были произнесены другом и коллегой К.Г.Я. Якоби – П.Г.Л. Дирихле – на заседании Берлинской Академии наук 1 июля 1852 г. по случаю его смерти.

Еще в студенческие годы литературная деятельность интересовала Якоби не меньше математики. Для ее продолжения представился удобный случай – публиковать статьи в созданном в 1826 г. научном журнале А.Л. Крелля (1780–1855) по чистой и прикладной математике («Crelle Journal fur die reine und angewandte Mathematik»).

Ученому принадлежат открытия во многих областях математики: линейной алгебре, вариационном исчислении, геометрии и механике, интегральном исчислении. Его именем названы функциональные детерминанты – якобианы, как их называли Дж. Сильвестр (1814–1897) и А. Кэли (1821–1895), ортогональные многочлены, формула интегрирования. Кроме разработок по теории эллиптических функций, он занимался и другими открытыми им трансцендентными тета-функциями [9]. Эллиптическими функциями занимался и другой молодой талантливый математик – Н.Г. Абель (1802–1829). Как свидетельствуют историки, при жизни их пути не пересеклись, и свои результаты они получили независимо друг от друга, хотя оба публиковали их в журнале Крелля. Так в первом томе журнала напечатаны работа Якоби и пять работ Абеля [4].

В решении задач Якоби искусно вычислял и старался совершенствовать свои вычислительные навыки. Так, он внес огромный вклад в теорию детерминантов (определителей), которые стали применяться не только в линейной алгебре, но и при решении задач математического анализа, физики и геометрии. Важным является тот факт, что, несмотря на исследования некоторых ученых, касающихся детерминантов, теория оставалась невостребованной в течение двадцати пяти лет до появления работ Якоби. Ему принадлежит изложение теории алгебраических детерминантов, разработанной еще О.Л. Коши (1789–1857), в более доступной форме, а также построенное на ее основе первое исследование свойств функциональных детерминантов, названных якобианами.

Построением теории завершился этап накопления элементарных сведений о детерминантах с 1764 по 1812 гг., который Т. Мьюир назвал «французским» в связи с тем, что большинство результатов в этой области были получены французскими учеными А.Т. Вандермондом, П.С. Лапласом, Ж.Л. Лагранжем, Ж. Бине и О. Коши. Вслед за этим наступил этап систематической разработки, важную роль в которой сыграли исследования К.Г.Я. Якоби [1].

Ко времени опубликования работ Якоби уже был всемирно известным ученым. Написание статей было продиктовано объективной необходимостью более рационального использования теории в качестве вычислительного инструмента математики. Они были призваны стать базой для решения прикладных задач, дать возможность глубже ознакомиться с детерминантами и облегчить трудоемкие подсчеты в исследованиях. До появления его работ сведения о детерминантах уже были известны, но успешно применять их в качестве вычислительного инструмента умели немногие математики. Начиная с 1827 г., Якоби использовал детерминанты для вычислений в задачах прикладного характера. Все его научные исследования публиковались на страницах журнала Крелля по чистой и прикладной математике и посвящались задачам аналитической геометрии, преобразованиям кратных интегралов путем замены переменных, методу Пфаффа интегрирования систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с двумя и тремя неизвестными, линейным преобразованиям переменных, разложению алгебраических дробей на элементарные, решению систем линейных уравнений.

Якоби уделял детерминантам огромное внимание, отмечая их значение для развития математики. Вслед за Коши стал употреблять термин «детерминант», что сыграло немаловажную роль в дальнейшей судьбе этого понятия. Все необходимые для теоретического изучения сведения относительно детерминантов как известные ему по опубликованным материалам предшественников, так и полученные им самостоятельно были изложены в статьях 1841 г.

Исследования были начаты Якоби с 1827 г. [1; 7]. Во введении к статье «De formatione et proprietatibus determinantium» («Об образовании и свойствах детерминантов») автор писал: «Алгоритмы, которые служат для решения буквенных линейных уравнений, хотя и очень известны, между тем, их главные свойства, насколько я знаю, были изложены не настолько коротко и ясно, насколько можно было бы желать от них пользы для важных исследований анализа. Эти свойства так элементарны, и все же не все известны в полной мере, чтобы уметь ими пользоваться, в то время как очень неудобно прерываться на доказательства предмета их высшего исчисления» [7, С. 5]. Он поставил перед собой цель устранить этот недостаток и обратился к свойствам детерминантов, облегчающим вычисления, когда они принимали специальный вид или сводились к одному главному члену, включая идею окаймления, различные соотношения, связывающие дополнительные детерминанты, теорему умножения детерминантов любого конечного числа и любого порядка, а также приложения к решению различных систем линейных уравнений, имеющих как квадратные, так и прямоугольные матрицы коэффициентов.

Основные задачи, решаемые Якоби с помощью детерминантов: исключение неизвестных и решение систем уравнений, в том числе дифференциальных; разложение функции на элементарные дроби; приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (преобразование координат); исследование кривых и поверхностей; интегрирование и замена переменных в кратных интегралах; сравнение с методом наименьших квадратов. Решение всех задач сводилось к исключению неизвестных из систем уравнений.

Якоби выделял два вида детерминантов, наиболее часто используемых в анализе – степенной и функциональный, встречающиеся в теории дифференциальных уравнений и механике. Осознавая важность их применения, ученый посвятил этому вопросу отдельное исследование в статье «De determinantibus functionalibus» («О функциональных детерминантах») и во введении указал: «В предыдущей работе я изложил превосходнейшие свойства детерминантов, относящихся к произвольной системе элементов. В этой статье я предполагаю, что элементами детерминанта могут быть частные производные системы функций нескольких переменных. Такие детерминанты играют важную роль во всем анализе, так как при различных исследованиях функций нескольких переменных они проявляют себя так же, как производная функции одного переменного» [8, С. 1]. Исследование продолжало работы Л. Эйлера, Ж.Л. Лагранжа, К.Ф. Гаусса о влиянии гравитационных сил и сводилось к преобразованию кратных интегралов (1827–1833) посредством квадратичных форм, как выражался Якоби, элегантным способом. Детерминанты оказались удачным вычислительным средством. Как считал сам автор, написание статьи было продиктовано не только важностью применения функциональных детерминантов, но и необходимостью разработки для этого общего алгоритма перехода к другим системам координат. В математике того времени он выделял три «проблемы»:

– преобразование квадратичных форм и рассмотрение свойств детерминантов,

– преобразование переменных в кратных интегралах

– изучение функциональных детерминантов на основе тех общих свойств детерминантов, которые были сформулированы и выведены в этой же статье.

В окончательном виде полученные результаты были изложены в отдельной статье «О функциональных детерминантах» [8; 9]. Необходимые свойства вошли также в «Лекции по динамике», прочитанные Якоби (1842–1843) и изданные А. Клебшем после смерти Якоби [5]. С их помощью его учениками и последователями Л.О. Гессе, Дж. Булем, А. Клебшем, Дж. Сильвестром, Ф. Эйзенштейном, З. Аронгольдом решались новые задачи алгебраической геометрии, теории функций нескольких переменных, теории инвариантов и т.д. [4].

Якоби пришел к необходимости создания общего вычислительного средства еще в первых своих исследованиях. Его письма свидетельствуют о том, что он внимательно следил за публикациями ученых. Поставленная им цель – распространить детерминанты и подготовить учебные пособия по теории была достигнута, когда вышли в свет статьи «Об образовании и свойствах детерминантов», «О функциональных детерминантах», «О знакопеременных функциях и их произведении из разностей своих элементов» (1841). Им владела мысль о создании единого математического аппарата решения систем линейных уравнений, описывающих различные механические процессы, расширения области применения детерминантов от линейной алгебры до аналитической механики. Как отмечал профессор Н.И. Кошляков во введении к русскому изданию «Лекций по динамике»: «По размаху и глубине своей научной деятельности Якоби принадлежит к числу тех немногих математиков, которые оставили след своего гения почти во всех областях чистой и прикладной математики» [5, С. 5].

3. Научные связи и педагогическая деятельность

Якоби поддерживал научные связи со многими учеными: Н.И. Фуссом, Н.Д. Брашманом, М.В. Остроградским, И.И. Сомовым, Ф.Г. Миндингом благодаря своему брату Морицу – петербургскому академику, которого в России звали Борисом Семеновичем Якоби (1801–1874). В 30-40-е годы К.Г. Якоби руководил занятиями учеников М.В. Остроградского – И.Д. Соколова, О.М. Тихомандрицкого, М.Ф. Спасского, Е.И. Бейера, Х.З. Слонимского [2].

Неотъемлемой чертой разностороннего характера Якоби был педагогический талант и стремление во что бы то ни стало научить молодых ученых всему тому, что знал сам. «Влияние, оказанное Якоби на успехи науки, представится в неполном виде, – писал о нем Дирихле, – если не упомянуть об его деятельности как публичного преподавателя. Его делом не была передача готового и уже переданного ранее. Его лекции вращались во всем своем объеме вне области учебников и охватывали только те части науки, в которых он сам являлся творцом, вследствие чего лекции выходили у него полными разнообразия» [3, С. 43–44]. Он отмечал также, что результаты необыкновенного способа преподавания, способного находиться только в распоряжении творческого духа, были по истине необычайными. Якоби прививал студентам дух исследования, рассказывая им о своих исследованиях и побуждая их к математическому творчеству с первых лет обучения в университете, не дожидаясь его окончания. Своим детям он говорил: «Ваш отец никогда не женился бы, и вы не родились бы на свет, если бы он решил познакомиться со всеми девушками прежде, чем выбрать жену».

В сотрудничестве с коллегами Ф.В. Бесселем и Ф.Э. Нейманом Якоби основал научный семинар – «Кенигсбергскую школу математиков», которой принадлежит существенная заслуга в том, что Кенигсбергский университет в первой половине XIX в. превратился в крупный исследовательский центр и большое количество молодых математиков, механиков, астрономов распространяли и обогащали науку по многим направлениям [4].

Библиографический список

1. *Ананьева, М.С.* Развитие теории детерминантов до середины XIX в.[Текст] / М.С.Ананьева / – Дис. ... канд. физ.-мат. наук : 07.00.10, Пермь, 2003. – 175 с.
2. *Гайдук, Ю.М.* Карл Густав Якоб Якоби в его связях с русскими математиками [Текст] / Ю.М. Гайдук / Историко-математические исследования. – М. : Физматгиз, 1959. – Вып. XII. – С. 245-270.

3. *Дирихле, П.Л.* Карл Густав Яков Якоби. Биографический очерк [Текст] / пер. с нем. В.В. Бобынина / П.Л. Дирихле / Физико-математические науки в их прошлом, настоящем и будущем. – М. : Типография А.И. Мамонтова, 1894. – Вып. 2. – С. 25–74.
4. *Клейн, Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии: в 2-х томах. [Текст] / пер с нем. Н.М. Нагорного; под ред. М.М. Постникова. / Ф. Клейн / – М. : Наука, 1989. – Т. I. – 456 с.
5. *Асланов, Р.М. Матросова, Л.Н. Матросов, В.Л.* Предшественники современной математики : Ист.-мат. очерки в 5 томах [Текст] / Р.М. Асланов, Л.Н. Матросова, В.Л. Матросов / – Москва : Прометей ; МПГУ, 2007. – Т. 2. – 448 с.
6. *Якоби, К.* Лекции по динамике [Текст] / К. Якоби / пер. О.А. Полосухиной ; под. ред. Н.С. Кошлякова.// – М.–Л.: ОТИЗ, 1936. – 270 с.
7. *Jacobi, C.G.J.* Ueber die Bildung und Eigenschaften der Determinanten [Текст] / C.G.J. Jacobi / Der Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. – Leipzig, 1896. – № 77. – 74 s. – S. 1–49.
8. *Jacobi, C.G.J.* Ueber die functionalen Determinanten [Текст] / C.G.J. Jacobi / Herausgeg. P. Stаckel // Der Octwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. – Leipzig : Engelmann, 1896. – № 78. – 73 s.
9. *Jacobi, C.G.J.* Gesammelte Werke [Текст] / C.G.J. Jacobi /: in 7 Beiden. – Berlin, 1882–1891.
10. *Kоnigsberger, L.* Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Wiederkehr seines Geburtstages. – Leipzig [Текст] / L. Kоnigsberger /: Verlag von B.G. Teubner, 1901. – 554 s.

Решение проблемы оснований традиционной логики, инициированное критикой логики Н.А. Васильевым. Математико-дидактическое значение логизации логики

С.М. Антаков

Проблема обоснования знания, проблема эпистемологического фундаментализма остаётся актуальной, что связано с «кризисом оснований», имеющим прямое отношение к современному глобальному духовному кризису – кризису разрушения традиций. Поэтому актуальна любая работа, посвящённая проблеме оснований традиционной (аристотелевой) логики и решающая её в позитивном (защищающем философско-логическую и математическую рациональность) духе. Таков представляемый ниже труд [1], сочетающий содержание научной монографии с формой учебника логики.

В научном отношении он принадлежит к направлению философской логики, которое должно быть противопоставлено традиционной математической логике. Как известно, в XX веке математическая логика пыталась вытеснить классическую формальную (философскую) логику, заменить её собой. Но традиционная математико-логическая аксиоматизация всего содержания философской логики (даже аристотелевой) не удалась, а в учебниках классической логики фрагменты философской и математической логики оказались эклектически перемешанными. После долгого периода растерянности философская логика начинает осознавать своё собственное, несводимое к традиционной математической логике, значение. Интенсивно развивается концепция онтологического обоснования математического и логического знания: за последние годы издан ряд книг, относящихся к этому перспективному направлению (см. [2]). Представляемая работа продолжает этот ряд и показывает возможность строгой формализации классической логики собственными, философско-логическими и даже математическими (притом не заимствованными у традиционной математической логики), средствами. Её содержание развилось из попыток **логично**, то есть ясно и последовательно, изложить содержание классической логики и, особенно, силлогистики – теории простого категорического силлогизма. Значительная удалённость от идеала логичности общепринятых («исторических») курсов логики, традиция которых восходит к аристотелевскому «Органону» – первому учебнику логики, структура которого репродуцируется в большинстве последующих учебников вплоть до самых последних, – уже более столетия делает их предметом острой критики со стороны логиков неокантианской, прагматистской и феноменологической ориентации. Однако сей предмет столь консервативен, что остаётся «выше» всякой критики, и это является, по-видимому, одной из причин упадка в XX веке его некогда высочайшего авторитета в системе образования.

Естественное стремление к простому и строгому изложению аристотелевой силлогистики могло быть реализовано только на пути обращения к основаниям классической логики, остающимся за пределами традиционных учебных курсов. Основания логики, в нашем понимании, являются онтологией, под которой мы подразумеваем здесь совокупность существующих в мышлении идеальных предметов, и протологикой – *первой* логикой, предваряющей логику в её традиционно узком понимании. Протологика выражает предметы онтологии на собственном, наиболее адекватном, языке, создавая при этом собственную онтологию вещей по образу первой онтологии. Эти-то основания и нуждаются в выявляющем изучении. Системы логики строятся затем по образу протологики путём строгого правилосообразного *перевода* протологических описаний на языки логики, который (перевод) и является, по существу, дедукцией логических систем из логических оснований.

Как выяснилось, в исследовании классической логики можно ограничиться абсолютно малой частью в целом необозримой логической онтологии, той частью, которую естественно назвать классической. Тогда и соответствующую протологику как первичную и наиболее адекватную сферу выражения онтологии, опосредующую переход от онтологии к логике, следует назвать классической.

Привходящим обстоятельством при выполнении представляемой работы явилось то, что почти сто лет назад из того же исходного пункта – осознания противоречивости (нелогичности) традиционного изложения логики – начал продвигаться к основаниям русский (казанский) логик Н.А. Васильев (1880 – 1940). Ободряемый примером «воображаемой геометрии» Н.И. Лобачевского, он разработал концепцию «воображаемых» (неаристотелевых) логик, отменяющих основные законы классической логики – законы исключённого третьего и исключённого противоречия – и всё же остающихся логиками.

Работы Васильева получили мировую известность и стали предметом профессионального интереса отечественных и зарубежных философов (В.А. Бажанова, М. Джеммера, П.В. Копнина и др.) и логиков только начиная с 1960-х годов (см. [3]). Особый интерес к логическому наследию Васильева проявили представители паранепротиворечивой логики (В.В. Аносова, А.И. Арруда, В.А. Смирнов и др.). Их подход заключается в построении аксиоматических систем, допускающих логическое противоречие и притом нетривиальных (не позволяющих доказать в них всё что угодно).

Критика традиционной логики, предпринятая Н.А. Васильевым, инспирировала задачу логизации исторических выражений этой логики – задачу изложить её в соответствии с формальным критерием теоретических наук, т.е. так, как это предписывает сама логика и как это сделал Евклид в отношении геометрии. Эта задача решена нами методом «прямого» обоснования логики, имеющего преимущества по сравнению с известными попытками формализации традиционной логики, предпринятыми средствами математической логики (логики предикатов). Двух или трёх простых интуитивно ясных аксиом достаточно, чтобы строго вывести содержание силлогистик Аристотеля и Васильева, а также основные законы формальной логики, вполне разъяснив при этом смысл закона исключённого третьего Аристотеля и закона исключённого четвёртого Васильева. Проделанная работа позволяет наилучшим образом разъяснить основные идеи и методы логики, входящие в учебную программу дисциплины, и способствует повышению качества математического образования.

Разъясним некоторые из этих мыслей. Стиль изложения идей Васильева в его собственных текстах значительно отличается от такового как в работах математических логиков (например, Арруды и Смирнова). В отличие от последних, стиль Васильева является в относительно высокой степени интуитивным, использующим минимум «формальных», то есть искусственно-языковых, средств. В текстах же, обычных для математико-логической традиции, почти всё внимание сосредоточено на чисто внешней языковой деятельности – правилосообразном манипулировании с логическими словами («формулами») как предметами своего рода. По существу же, такой метод является не аксиоматико-дедуктивным, а гипотетико-дедуктивным, то есть **косвенным** и, как видно, широко применяемым не только в математическом естествознании, но и в чистой математике и логике. Его результат – «формальная» (чисто предметная) система, приближённо выражающая исходную, интуитивно-содержательную идею (в данном случае это идеальный образ идеи Васильева, возникающий в мышлении того, кто читает его тексты), – получен в последовательности непрозрачных даже для самого деятеля актах «подгонки под ответ», «пробах и ошибках». Именно такой образ действий нашёл наиболее адекватное и полное философско-научное выражение в методологических работах К. Поппера.

Прямой метод в отношении обоснования, то есть поиска и выражения трансцендентальных начал знания, уже не может пониматься в обыкновенном смысле как явный и правилосообразный вывод явных («формальных») положений из явных аксиом. Он есть непосредственное усмотрение или феноменологическое конституирование интуитивных начал и акт их выражения, то есть дальнейшего и уже, возможно, правилосообразного овеществления. Прямое исследование логических оснований должно опираться на трансцендентальное созерцание пограничной области между интуицией и логическим дискурсом и иметь своей целью понимание того, из каких потаённых начал рождаются формальные принципы. Традиция прямого обоснования является собственно философской и в новое время поддерживается Декартом и его последователем Гуссерлем. Дедуцируемая таким образом логика является собственно философской (классической) логикой и должна отчётливо отделяться от **традиционной** математической логики и решительно отрицать свою сводимость к последней.

Представляемая здесь работа примыкает именно к этой традиции, кстати сказать, видящей в косвенном методе необходимое дополнение прямого. Своеобразное *epochē* Поппера, обратное к феноменологическому, состояло в его сознательном отказе обсуждать прямой метод, выраженном им в терминах отделения «контекста открытия» от «контекста обоснования». Это открывает путь, по которому, по существу, и следует Поппер, – путь редукции обоснования к вполне опредмеченной, манипулятивной и, стало быть, лишенной трансцендентальных корней «деятельности», то есть к механическому процессу.

Представленный подход к основаниям логического знания является, по существу, трансцендентально-логическим (в смысле классиков немецкой идеалистической философии) и в этом качестве противостоящим формально-логическому (в сопряжённом с первым смысле), однако в равной мере – и математико-логическим. Последнее требует разъяснения.

Математическая логика еще в XIX – начале XX веков, когда она только складывалась, оформлялась, ограничивалась и начинала окостеневать в собственной традиции, не была такой механической, «формализованной», какой стала позднее, и потому, в отличие от этой позднейшей математической логики, не может быть отождествлена вполне с формальной логикой в её кантианско-гегельянском понимании. Это значит, что возможна иная, **трансцендентальная**, математическая логика, и именно в такой логике Васильев надеялся получить решение поглотившей его научной проблемы, о чём свидетельствует он сам в своих отчётах. В том же направлении движется и представленная здесь работа.

Совпадение её первоначального интереса с известной васильевской интенцией является благоприятным привходящим обстоятельством, поскольку даёт возможность продемонстрировать эффективность предложенного подхода в сравнении классической (аристотелевой) силлогистики и также уже получившей признание специалистов «воображаемой» логики (определённее говоря, силлогистики) Васильева, проясняющем их единые основания.

Это означает, что «силлогистика Васильева» является, наряду с «силлогистикой Аристотеля», одной из близких к ней диверсификаций классической протологики, возможных в плане выражения онтологии, то есть обусловленных принятием того или иного логического языка выражения. Силлогистика Васильева является классической, потому что исходит из классической онтологии, и вместе с тем неаристотелевой, ибо отличается от аристотелевой в силу принятия несколько иного логического языка выражения. Классический аристотелев закон исключённого третьего оказывается при этом относительным к языку выражения одной и той же классической онтологии.

По некоторым причинам сам Васильев не смог довести начатое дело до конца. Существуют всего три опубликованные им логические работы (вместе со многими другими материалами они переизданы в [4]), рукописи же, в которых он развивал и переосмыслял свои первые идеи, не сохранились. Собственные метафизические («метапсихологические») основания или мотивировки, предложенные Васильевым во второй – «Воображаемая (неаристотелева) логика» (1912) – и третьей – «Логика и металогика» (1912 – 1913) – статьях, были причудливыми гипотезами, вероятно, выдвинутыми post festum ради потребованного от него С.И. Гессеном в 1910 году гносеологического оправдания содержания опубликованной в том же году первой статьи (см. [5]). Они не должны были быть окончательными, и, судя по некоторым собранным В.А. Бажановым свидетельствам, можно заключить, что мышление Васильева эволюционировало в направлении не «метапсихологического», а математико-логического обоснования, причем не косвенного, характерного для традиционных («формальных») математико-логических исследований (в том числе, исследований васильевского наследия в рамках паранепротиворечивой логики), а прямого.

Логику Аристотеля назвали классической в том же смысле, в каком считаются классическими (образцовыми) все его дошедшие до нас произведения. Однако в математической логике, возникшей в XIX столетии и начавшейся с попыток изложить традиционную логику на языке математики, установилось собственное понимание классической (математической) логики. Это *пропозициональная логика* и *логика предикатов* (с семантикой А. Тарского), связываемые с классическими (двузначными), или булевыми, таблицами истинности (семантическими таблицами). К неклассической же логике относят *интуиционистскую, модальную, релевантную* и многие другие версии математической логики.

То, что в математической логике установилась своя «классическая» традиция, лишний раз указывает на её известную противоположность философской логике. Последняя, в отличие от первой, самым тесным образом связна с естественным языком, его грамматикой и компетенцией. Это делает аристотелеву логику всегда актуальным средством и целью академического («классического») образования, лучшим посредником при переходе от естественно-языковых дисциплин к математическим наукам, использующим искусственные языки. Философская логика незаменима в ситуации, когда образуемый ум призван совершить скачок вверх по ступеням абстрактности и формальности знания. Имея это в виду, трудно согласиться с мнением некоторых специалистов в области математической логики (например, в [6]), будто аристотелева логика утратила актуальность и представляет лишь исторический интерес. Это суждение коренится, во-первых, в том неосновательном впечатлении, что математическая логика в теоретическом отношении уже «сняла», или покрыла, содержание философской логики, и, во-вторых, в некотором отстранении от проблем дидактики. В этой связи можно поспорить с тем по существу позитивистским взглядом, будто философская логика исчерпала свой теоретический потенциал и осталась не у дел в науке, передав свой предмет логике математической. Последняя точка зрения исходит из неявного положения о возможности полной формализации всякого интуитивного знания, формализации, удовлетворительной якобы в любом отношении, включая образовательный контекст.

Как можно понять из вышесказанного, роль и новаторство автора заключались всего лишь в обосновании и логичном изложении традиционного содержания логики. Поэтому представляемая работа могла бы по праву носить название «Классическая логика в логичном изложении» и считаться *логическим* изложением логики в отличие от *исторических*, то есть следующих традиции, изложений. Критика классической (аристотелевой) логики, предпринятая Н.А. Васильевым, приводит к обнаружению некого противоречия в традиционных курсах логики, которое носит более прагматический, чем логический, характер и вполне проясняется и исправляется в нашем труде. Это потребовало начать изложение логики с самых её оснований (аксиом), то есть с раздела, который в ситуациях, требующих одного слова, удобно называть протологикой (первой, основополагающей, частью логики). Далее почти вся классическая логика прямо и последовательно выводится из собственных интуитивно очевидных, простых и ясных оснований, что и позволяет считать такое её обоснование *прямым*. Таким образом, классическая логика приобретает логическую форму и благодаря этому становится подлинно теоретической дисциплиной, удовлетворяющей всем критериям научности.

Действительно, до сих пор традиционная логика находилась в положении искусства землемерия (геометрии), каковой она была до того, как Платон и его сподвижники, гениальные греческие математики, а позднее Евклид, завершивший их дело, не стала подлинной наукой. До сих пор традиционная логика не была аксиоматизирована, если не считать не вполне удачных, частичных и *косвенных* обоснований, предпринятых со стороны, а именно, в рамках *математической* логики. Причём делались такие попытки аксиоматизации в отношении не классической логики в целом, но лишь её части, называемой силлогистикой. Подобные обоснования проводились, исходя из нескольких правильных модусов вроде *Barbara*, полагаемых в качестве аксиом, но являющихся теоремами при прямом обосновании.

То обстоятельство, что классическая логика до сих пор оставалась без оснований, удивительно, поскольку сама она справедливо претендует на роль учителя всех прочих научных дисциплин, логически дисциплинируя их. Это значит, что подлинно научное знание должно излагаться, начиная с простых и ясных аксиом (в математике) или математически выраженных принципов (в науках о природе), прочие же истины должны быть выведены из этих начал, т.е. представлены в виде теорем. Образцом логично изложенного знания более двадцати веков оставались «Начала» Евклида. Однако сама логика излагается, ничуть не подчиняясь установленному ей же образцу, что затрудняет её понимание и позволяет сохраняться тому противоречию, которое было замечено благодаря Н.А. Васильеву.

Помимо субъективных, исторических причин, указанное парадоксальное положение классической логики объясняется тем объективным обстоятельством, что её содержание в некотором смысле «нелинейно» («криво») относительно неизбежно «прямолинейных» аксиоматизирующих систем. Результатом этого является расщепление классической логики на логику Аристотеля и логику, которую следует называть именем Н.А. Васильева. Обе логики содержат два главных раздела – теорию простого суждения и теорию простого умозаключения (которое является только одним из видов сложного суждения), или силлогистику (в аристотелевском значении последнего термина). Оба эти раздела в логике Васильева выводятся из двух аксиом (аксиомы диады и триады). Теория простого суждения является в ней естественной (соответствующей обычной языковой интуиции), однако теория умозаключения неполна, так как не содержит многих правильных модусов логики Аристотеля.

Добавление к двум названным аксиомам третьей (так называемого соглашения аристотелевской логики) позволяет получить указанные разделы логики Аристотеля, но в ней только теория простого умозаключения оказывается более естественной (более соответствующей практике убедительных рассуждений). Традиционный (исторический) курс логики адекватен речевой практике, но оказывается «метапротиворечивым» смешением теории простого суждения логики Васильева и теории простого умозаключения логики Аристотеля, чем и объясняется невозможность аксиоматизировать его, исходя из какой-либо одной системы аксиом.

Для того, чтобы строго вывести основные логические законы (непротиворечия и исключённого третьего) из аксиом, автор принял те определения отношений противоположности между сравнимыми общими суждениями (отношений субординации, субконтрарности, контрарности и контрадикторности), которые исходят не из поверхностной формы, то есть количества и качества, таких суждений, но опираются на основание их совместимости или несовместимости по истине и лжи. Неудовлетворительность иных (упомянутых) определений состоит, во-первых, в том, что они порождают проблему для сравнимых единичных суждений (например, «Сократ – философ» и «Сократ – не философ»), – контрарны они или контрадикторны? По форме одно из них является общеутвердительным, а второе – общеотрицательным, и можно ошибочно решить, исходя из традиционного определения, что они контрарны. Однако по своим свойствам (совместимости или несовместимости по истине и лжи) они оказываются контрадикторными. Это противоречие между традиционным определением и свойствами определяемых отношений, с одной стороны, и желанием распространить логические законы на единичные суждения, и порождает проблему. Она, однако, легко решается (в пользу контрадикторности), если принять определения отношений противоположности, используемые в нашем труде.

Более того, предлагаемое определение противоположностей позволяет внести полную ясность в соотношение логик Аристотеля и Васильева, в том числе законов исключённого третьего (Аристотель) и исключённого четвёртого (Н.А. Васильев), развеяв туман мифов и спекуляций, окружающий последний закон. И это служит вторым аргументом для принятия выбранных определений противоположностей.

Стоит обратить внимание на то, как в учебнике используются диаграммы. Вопреки Платону, с недоверием относившемуся к математическим чертежам, автор, в полном соответствии с замыслом прямого обоснования логики, отводит им не вспомогательную роль, но считает их выразительным логическим средством, равноправным с символическим (аксиоматико-дедуктивным). В известных случаях диаграммы служат основой собственного метода. Он может использоваться без ослабления строгости рассуждений наряду с тождественными преобразованиями и доказательствами, имеющими синтаксический (формальный) характер. Представляется, что традиционное формальное понятие теоретической строгости может быть расширено соответствующим образом, учитывающим, во-первых, возможность материально-интуитивной (*феноменологической*) ясности не вполне оформленного мышления, во-вторых, трудности адекватного выражения мысли на любом вербальном языке, приводящие к необходимости пользоваться иными (изобразительными) выразительными средствами, а в-третьих, невозможностью вполне отделить форму выражения мысли от её интуитивно переживаемого содержания.

Метод диаграмм играет в прямом обосновании логики не меньшую роль, чем метод семантических таблиц. Так называемые протологические номера 1, 2, 3, 4, 5 (*жергонновы отношения*) в таких таблицах имеют интуитивно ясное аксиоматическое происхождение и служат фундаментальными логическими значениями, производными от которых оказываются классические логические значения «истина» и «ложь». В традиционных («исторических») курсах логики последние два значения использовались, но оставались без определения и научной рефлексии, что, наряду с другими обстоятельствами, также мешало прояснить общее строение классической логики.

Ещё одной особенностью авторского подхода к предмету его исследования стал отказ от характерного для Аристотеля атрибутивного истолкования простого категорического суждения, при котором предикат понимается как атрибут (свойство) субъекта. Вещь и свойство вещи предстают при этом предметами разного типа реальности. В представляемой же работе принято субстантивное толкование, при котором субъект и предикат являются предметами одного и того же типа, что, помимо прочего, упрощает концепцию их *конверсии* (перестановки). В пределах такого подхода признак понятия понимается тоже как понятие, указывающее на первое путём задания объёмного (жергоннова) отношения между ними.

Некоторые особенности представленной книги (в том числе её особая неполнота, вызванная критическим отсечением лишнего), продиктованы тем, что по форме она является учебным пособием, а не научной монографией. Она учит логичному мышлению своими чёткими, насколько это удалось автору, определениями, строгими постановками задач и правилами их решения. В не меньшей степени она учит простому и общезначимому (всем понятному) языку выражения самых простых мыслей, в том числе экономному описанию диаграмм на геометрическом языке. И это, возможно, ещё более важно, поскольку любой только ещё приступающий к изучению логики человек уже мыслит логически, поскольку овладел, хотя бы и не в совершенстве, своим родным языком.

Библиографический список

1. *Антаков, С.М.* Основные идеи и задачи классической логики [Текст] / С.М. Антаков /: Учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет, 2013.
2. *Васюков, В.Л.* Формальная феноменология [Текст] / В.Л. Васюков / М.: Наука, 1999.
3. *Бажанов, В.А.* Н.А. Васильев и его воображаемая логика. Воскрешение одной забытой идеи [Текст] / В.А. Бажанов / М.: Канон+, РООИ «Реабилитация», 2009.
4. *Васильев, Н.А.* Воображаемая логика [Текст] / Н.А. Васильев / Избранные труды. М.: Наука, 1989.
5. *Гессен, С.О.* О брошюре Н.А. Васильева «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого» [Текст] / С.О. Гессен / Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989. С. 171-172.
6. *Гладкий, А.В.* Введение в современную логику [Текст] / А.В. Гладкий / М.: МЦНМО, 2001. С. 3.

Аналитическое определение тригонометрических функций и числа пи: от Архимеда до наших дней

П.Н. Антонюк

1. Краткая история числа π

Архимед (ок. 287-212 до н. э.) впервые сформулировал алгоритм вычисления числа π, в котором в неявном виде присутствует логистическое разностное уравнение $x_{n-1} = 4x_n\left(1 - x_n\right)$. Здесь $n \in \mathbb{N}$, $m = 3 \cdot 2^{n-1}$ означает число сторон вписанного в окружность правильного многоугольника, a_n – длина стороны многоугольника, $x_n = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Индийский математик Мадхава (1340-1425) впервые нашел степенные ряды для синуса, косинуса, арктангенса и таким образом пришел к формуле $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ \ldots$, которую позднее переоткрыли Дж. Грегори (1638-1675) и Г.В.Лейбниц (1646-1716).

В.Снеллиус (1580-1626) усовершенствовал алгоритм Архимеда и стал получать вдвое больше правильных десятичных знаков числа π для каждого многоугольника.

Дж. Валлис (1616-1703) представил π в виде бесконечного произведения: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ \ldots$. Формулы Мадхавы и Валлиса сходятся к π очень медленно и поэтому малопригодны для вычисления π.

Х.Гюйгенс (1629-1695) , исходя из работы Снеллиуса, снова усовершенствовал алгоритм Архимеда и стал получать для каждого многоугольника втрое больше правильных знаков числа π.

Современник И.Ньютона (1643-1727) японский математик Сэки Такакадзу (1642-1708), известный также как Сэки Кова, придумал метод ускорения медленно сходящихся последовательностей, переоткрытый позднее А.К.Эйткеным (1895-1967), и применил его к ускорению алгоритма Архимеда. Кроме того, метод Такакадзу существенно улучшает сходимость формул Мадхавы и Валлиса.

Современное изложение тригонометрии дал Л.Эйлер (1707-1783).

В настоящее время с числом π связано труднообозримое множество формул, математических и физических фактов. Их количество продолжает стремительно расти. Сегодня число π рассчитано с астрономической точностью: 12 триллионов десятичных знаков (2013 г.). Триллион – это миллион миллионов.

2. Краткая история функциональных уравнений

В «Алгебраическом анализе» (1821) О.Л.Коши (1789-1857) впервые сформулировал функциональные уравнения для однородной линейной, степенной, показательной функций и логарифма. Тогда же Коши хотел ввести функциональные уравнения и для тригонометрических функций, но смог записать уравнение только для косинуса, причем решением этого уравнения оказался также гиперболический косинус. Варианты построения системы функциональных уравнений для синуса и косинуса можно найти, например, в учебниках математического анализа, авторами которых являются Г.М.Фихтенгольц, а также В.А.Ильин и Э.Г.Позняк.

3. Функциональные уравнения тригонометрических функций и их следствия для числа π

Очевидно, что $\sin x,\ tg\ x,\ cosec\ x,\ ctg\ x$ являются решениями системы $\begin{cases} f(x+p)=f(x), \\ f(-x)=-f(x); \end{cases}$

в то время как $\cos x,\ sec\ x$ являются решениями похожей системы $\begin{cases} f(x+p)=f(x), \\ f(-x)=f(x). \end{cases}$

Беря за основу уравнение $f(x+p)=f(x)$ периодических функций, записываем функциональные уравнения тригонометрических функций:

$$f(x+p)=-f(x)\ , \tag{1}$$

$$f(x+p)=-\frac{1}{f(x)}\ . \tag{2}$$

Решения уравнения (1) , не имеющие полюсов, включают $\sin x$ и $\cos x$. Решения уравнения (1) , не имеющие нулей, включают $sec\ x$ и $cosec\ x$. Решения уравнения (2) включают $tg\ x$ и $ctg\ x$. Здесь p – полупериод функции $f(x)$.

Пусть $f(x)$ и p – неизвестная функция действительного (комплексного) переменного и неизвестная действительная (комплексная) константа.

Теорема 1. В классе аналитических функций система $\begin{cases} f(x+p) = -f(x), \\ f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1, \end{cases}$ имеет единственное решение $\begin{cases} f(x) = \sin x, \\ p = \pi. \end{cases}$

Теорема 2. В классе аналитических функций система $\begin{cases} f(x+p) = -\dfrac{1}{f(x)}, \\ f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1, \end{cases}$ имеет единственное решение $\begin{cases} f(x) = \operatorname{tg} x, \\ p = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Аналогичные теоремы имеют место для других тригонометрических функций. Из функциональных уравнений (1) и (2) получаем следующие пять формул для числа π (для комплексных значений переменной x):

$$\pi \equiv x + \arcsin \sin x \qquad \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} x < \frac{3\pi}{2}, \tag{3}$$

$$\pi \equiv x - \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x \qquad \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} x < \frac{3\pi}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\pi}{2} \equiv x + \arcsin \cos x \qquad 0 < \operatorname{Re} x < \pi; \tag{5}$$

$$\frac{\pi}{2} \equiv x + \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} x \qquad 0 < \operatorname{Re} x < \pi; \tag{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \equiv x + \operatorname{arctg} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \qquad -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} x < \frac{3\pi}{4}. \tag{7}$$

Каждая из пяти формул позволяет по-новому определить число π, как устойчивую неподвижную точку некоторого отображения. Например: π – устойчивая неподвижная точка отображения $x \mapsto x + \arcsin \sin x$ комплексной области $\left\{\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ в $\mathbb{C}$ **.** В других формулах устойчивые неподвижные точки – это $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{4}$.

Пять формул позволяют быстро вычислять число π и контролировать правильность полученных десятичных знаков.

Библиографический список

1. *Антонюк, П.Н.* Математики празднуют «пи» [Текст] / П.Н. Антонюк / Телеграф «Вокруг Света» – ежедневное познавательное интернет-издание, 14.03.2008 (http: //www.vokrugsveta.ru/telegraph/theory/577/).
2. *Антонюк, П.Н.* Функциональные уравнения в теории физического подобия [Текст] / П.Н. Антонюк / Ин-т истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция (2013). Т. 1.–М.: ЛЕНАНД, 2013.– С. 327-330.
3. *Антонюк, П.Н.* Измерение числа пи как следствие измерения длин [Текст] / П.Н. Антонюк / Инженерно-физические проблемы новой техники / Сборник материалов XI Всероссийского совещания-семинара.– МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014.– С. 39.

Уравнение Клеро (Посвящается к 300 летию рождения Клеро Алекса Клода) (07.05.1713-17.05.1765)

Р.М. Асланов

Клеро Алекси Клод - французский математик и астроном, иностранный почетный член Петербургской академии наук, член Парижской академии наук (1731).

Алекси Клод родился 7 мая в 1713 году в Париже в семье парижского преподавателя математики. Его отец Жан Батист Клеро был профессором математики в Париже и корреспондентом Академии Наук в Берлине. В 10 лет Клеро читал труды Лопиталя. Уже в возрасте двенадцати лет он поразил парижских академиков своей работой о некоторых кривых четвертого порядка, одна из которых была тождественна с кампилой Евдокса, и они устроили Клеро единый экзамен, чтобы увериться в его авторстве. Экзамен Клеро выдержал.

В 1729 году 16-летний Клеро представил той же академии свежеиспеченный трактат: «Исследования о кривых двоякой кривизны». Эта книжка положила начало трём геометрическим дисциплинам: аналитической геометрии в пространстве (Декарт занимался плоскими кривыми), дифференциальной геометрии и начертательной геометрии. Шефство над юным дарованием взял Пьер Луи де Мопертюи, тот, что отвёз Клеро в Базель внимать лекции Иоганна Бернулли. По возвращении (1731) восемнадцатилетний Клеро был избран членом (адъюнктом) Парижской академии — беспрецедентный эпизод в истории Академии.

В 18 лет был утвержден адъюнктом Парижской Академии Наук.

Спустя немного лет Академия решила положить финал долгим спорам о том, сплющена ли наша планета (как доказывал Ньютон) или, напротив, вытянута у полюсов наподобие лимона. Для проведения измерений длины градуса меридиана были организованы экспедиции (1735—1737 годы) в Перу и Лапландию. Клеро принял участие в лапландской экспедиции (1736), сообща с Мопертюи. Измерения подтвердили точку зрения Ньютона: земля сжата у полюсов, коэффициент сжатия, по современным данным, равен 1/298,25 (Ньютон предсказывал 1/23 0). В 1741 году была организована ещё одна экспедиция с той же целью, и также с участием Клеро. На основе геодезической работы опубликованной в 1743 году книги «Теория фигуры Земли, извлеченная из принципов гидростатики», в ней содержатся фундаментальные для высшей геодезии теоремы Клеро, устанавливающие связь между распределением силы тяжести на поверхности Земли и некоторыми параметрами, характеризующими ее форму и угловую скорость вращения. В этой книге поставлена общая задача о фигурах равновесия медленно вращающейся жидкости, впервые введены криволинейные интегралы. Эйлер писал об этой работе: Книга Клеро есть произведение несравненное как в отношении глубоких и трудных вопросов, которые в ней рассматриваются, так и в отношении того удобного и легкого способа, посредством которого ему удаётся безупречно ясно и отчётливо изложить предметы самые возвышенные. В математическом анализе Клеро ввёл понятия криволинейного интеграла (1743), полного дифференциала, а ещё общего и особого решения дифференциальных уравнений 1-го порядка (1736). Нельзя не пометить ещё, что Клеро подготовил блестящие учебники «Начала геометрии» и «Начала алгебры». Огромны заслуги Клеро в механике и в особенности в утверждении системы Ньютона, которая более того в середине XVIII века всё ещё находила на континенте Европы несть числа противников (см. критику теории тяготения). Основные трудности модель Ньютона встречала в теории движения Луны. Расхождения («неравенства») между видимым движением лунного апогея и вычисленным по закону всемирного тяготения оказывались до того значительными, что многие ученые, более того такие, как Эйлер, Даламбер и сам Клеро, высказывали сомнения в точности этого закона. По предложению Эйлера Петербургская академия наук объявила в 1749 году свой основополагающий академический конкурс на следующую тему: «Согласуются или же нет все неравенства, наблюдаемые в движении Луны, с теорией Ньютона? И какова истинная система всех этих неравенств, которая позволила бы верно обусловить местоположение Луны для любого времени?» Как раз в это время Клеро нашёл остроумную технологию приближённого решения « задачи трёх тел». Он уточнил свои прежние вычисления, и они с высокой точностью совпали с последними результатами наблюдений. На основании отзыва Эйлера, книжка Клеро «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, назад пропорционального квадратам расстояний», была заслуженно удостоена премии (1751).

Исследуя возмущения Солнца (1757г.), Клеро пришел к выводу, что любую четную функцию можно разложить в ряд. Но этот фундаментальный результат Клеро остался незамеченным. Клеро разработал аналитическую геометрию в пространстве. Клеро впервые предложил формулу тригонометрической интерполяции. Клеро и Эйлер являются создателями динамической теории относительного движения.

Вскоре небесную механику ожидал свежий триумф. Уже Галлей понял, что кометы, наблюдавшиеся в 1607-м и 1682-м годах — это одна и та же комета, получившая имя Галлея. Следующее явление этой кометы ожидалось в начале 1758 года. Однако Клеро, проведя точные вычисления с учётом влияния Юпитера и Сатурна, предсказал, что комета появится на 618 дней позднее, в ноябре 1759 года. Он ошибся всего на 31 день. Клеро доказал строй фундаментальных для высшей геодезии теорем. Кроме упомянутого личного участия в градусном измерении в Лапландии (1736—1787), Клеро определил соотношение между силой тяжести и сжатием Земли, известного под названием «теоремы Клеро» и давшего вероятность предугадать сжатие Земли независимо от градусных измерений, из наблюдений над качанием маятника в разных местах земной поверхности. Тем самым были заложены основы нового направления науки — гравиметрии. В механике он создал динамическую теорию относительного движения. Клеро ещё развил следом за Ньютоном и Маклореном теорию фигур равновесия жидкой массы.

Клеро Алекси Клод нежданно скончался в возрасте 52 лет в Париже, 17 мая 1765 года.

Уравнения Клеро.

Уравнением Клеро называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида:

$$y = xy' + \psi(y'),$$

где функция $\psi(y')$ непрерывно дифференцируема на некотором промежутке.

Заметим, что уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\phi(t)=t$. Таким образом, интегрирование уравнения Клеро аналогично интегрированию уравнения Лагранжа,

Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение, линейное относительно *x* и *y*, коэффициенты которого являются функциями от *y′*.

$$y = x\phi(y') + \psi(y'),$$

где функции $\phi(y')$ и $\psi(y')$ - непрерывно дифференцируемы на некотором промежутке.)

С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид

$$y = xp + \psi(p),$$

дифференцируя полученное равенство, имеем:

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

или

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$\left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Полученное уравнение имеет два возможных решения:

$$dp = 0 \text{ или } x + \psi'(p) = 0.$$

В первом случае

$$p = c \text{, т.е. } y = cx + \phi(c),$$

во втором

$$\begin{cases} x = \psi'(p), \\ y = \psi'(p)p + \psi(p). \end{cases}$$

Первое равенство задает общее решение уравнения, вторая система – особое решение уравнения Клеро.

Рассмотрим некоторые примеры с применением уравнения Клеро.

Примеры.

1. Проинтегрировать уравнение Клеро $y = xy' + y'^2$**.**

▷ Общее решение имеет вид

$$y = Cx + C^2,$$

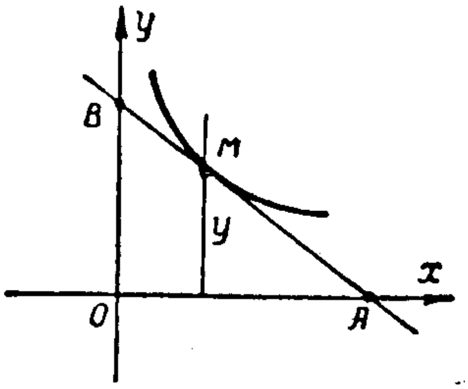
а особое решение определяется параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = -2p, \\ y = -p^2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

2. Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенной между осями координат, имеет постоянную длину a.

▷Из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, проведенной в точке $M(x,y)$ к искомой кривой, несложно найти отрезки OA и OB, отсекаемые ею на осях координат:

$$OA = x - \frac{y}{y'}, OB = y - xy'.$$



Так как по условию $AB = a$, то имеем

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + \left(y - xy'\right) = a^2,$$

или

$$\left(y - xy'\right)^2 \left(\frac{1}{y'^2} + 1\right) = a^2,$$

откуда

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Полученное уравнение есть уравнение Клеро; интегрируя, находим решение

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

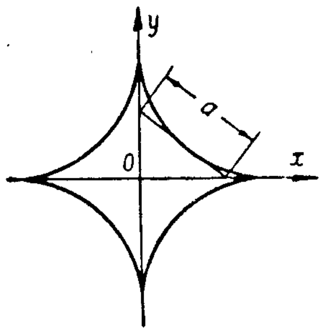
Нас интересует особое решение (поскольку общее решение уравнения задает семейство прямых, которые не удовлетворяют условию задачи):

$$\begin{cases} x = \mp \dfrac{a}{\left(1 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ y = \pm \dfrac{ap^3}{\left(1 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Исключая параметр p, получаем

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, искомая кривая – астроида



Некоторые публикации

- "Thorie de la figure de la Terre" (Теория формы Земли)
- "Thorie de la Lune" (Теория движения Луны)
- "Tables de la Lune"
- "Thorie du mouvement des comtes" (Теория движения комет)

Награды

- премии Петербургской АН (1751, 1762)

Библиографический список

1. *Клеро, А. К.* Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики [Текст] / А. К. Клеро / Серия: Классики науки. М.-Л.: Изд-во Академии Наук СССР, 1947.
2. История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах [Текст] М.: Наука. Том 3: Математика XVIII столетия, 1972.
3. *Идельсон, Н. И.* Этюды по истории небесной механики [Текст] / Н. И. Идельсон / М.: Наука, 1975.
4. *Клеро, А. К.* Математический энциклопедический словарь [Текст] / А. К. Клеро / Гл.ред. Ю. В. Прохоров. — М.: «Большая Российская энциклопедия». — 1995.
5. *Brunet, P.* La vie et l'oeuvre де Clairaut, P., 1952. Источник: http://ru.wikipedia.org/wiki/Клеро, Алекси_Клод
6. *Асланов, Р.М. Матросов, В.Л., Топунов, М.В.* Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными [Текст] / Р.М. Асланов, В.Л.Матросов, М.В. Топунов/ Учебник. Москва. Владос. 2011. – 376 с.

К истории прямого угла

О.О. Барабанов

Обычная метрология начинается с длины. Затем следуют площади, веса, объемы и т.п. Угол при этом упоминается в последнюю очередь. Между тем, угол является главной мерой ориентации всех на Земле существ. Среди всех углов первое место занимает прямой угол. Ниже представлены результаты наших скромных поисков прямого угла, как цивилизационного признака, а также – история прямого угла в математике и в человеческой культуре в целом.

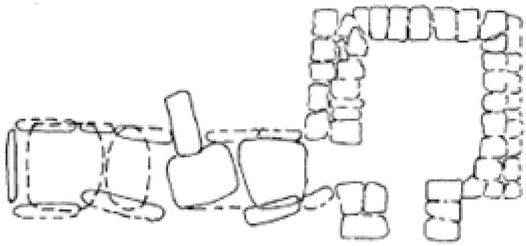
Происхождение прямого угла.

Прямой угол в сознании человека возник сразу после его первого геометрического поступка в проведении линии раздела «моё – твоё». Ближайший подход к этой линии со своей стороны и дал человеку прямой угол. Этой фразой можно было начать и закончить историю прямого угла, если не вдумываться в употребленные понятия: линия раздела, ближайший подход. Прямой угол имеет три взаимосвязанных отношения к нему в человеческом обществе: Употребление, Понимание, Эксплуатация. При этом успешное многоразличное и долговременное Употребление постепенно порождает Понимание (рождение понятия с обязательным Именем), а уже затем на основе Понимания начинается Эксплуатация созданного понятия вплоть до самых неожиданных технологий.

Мотив к употреблению, а затем и к пониманию прямого угла состоял в двуногости человека, что заставляло его признать перпендикулярность туловища к горизонтальной поверхности (осел может долго стоять без участия одной ноги, а человек – нет). Дополнительными мотивами были: движение солнца (стороны света), разжигание огня, наблюдение за животными, скелет которых имел симметричный характер, направление эффективного удара, наносимого врагу, употребление лука, как средства поражения, и т.д. Всё это называется билатеральной симметрией в живой природе [1]. Билатеральная симметрия свойственна всем достаточно высокоорганизованным животным. Так возник прямой угол. Он также возник в соперничестве с окружностью. Но окружность была предъявлена человеку ежедневными явлениями природы в виде контуров луны, солнца, зрачка глаза, цветоложа и т.п. Напротив, непосредственных предъявлений прямого угла человеку природа не давала. Были только косвенные предъявления, вроде того, как бежит жаждущий тигр к реке, как растёт тростник, как оптимально взаимодействуют половые органы, как ориентироваться относительно движения солнца и т.п. Другими словами, прямой угол при своем первом употреблении человеком уже содержал элементы абстракции, в отличие от круга, который был результатом непосредственной аналогии с привычными явлениями природы. Таким образом, начало прямого угла – это и начало абстракции вообще.

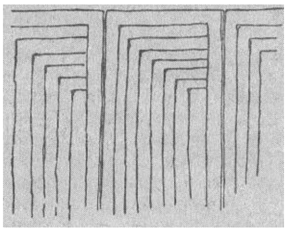
Употребление прямого угла у древних народов встречается независимо и, тем самым, становится этнологической проблемой. Возникает возможность использовать прямой угол в качестве *цивилизационного признака*.

Вероятно, одним из первых эмпирических мотивов для употребления прямого угла человеком служил оптимальный способ разжигания огня с помощью палок [2]. Многочисленные археологические раскопки показывают употребление прямого угла в культурах различных древних народов, см. работы [3-6] и др. Например, план прямоугольной камеры 3.5 на 2.25 м мегалита на острове Вера на озере Тургояк, изображенный на первом рисунке, свидетельствует о наличии прямого угла в культуре неизвестного нам народа, населявшего Южный Урал около 6000 лет назад [3].



Однако прямой угол не был обязательным геометрическим элементом в истории человечества. Например, Дэвид Ливингстон оставил важное наблюдение о жителях Ботсваны: «… у них есть одна странная особенность: они не могут строить *прямоугольных* зданий. Как все бечуаны, они делают свои жилища круглыми. При постройке трёх больших домов, сооружённых мною в разное время, я должен был класть *своей* правой рукой каждый кирпич или жердь, когда их нужно было положить под прямым углом» [7]. Подтверждением наблюдения Ливингстона являются размещенные в Интернете аэрофотоснимки развалин Великого Зимбабве, в которых абсолютно преобладает круг.

Напротив, другой выдающийся исследователь первобытности человека, Миклухо-Маклай (1846 – 1888), дал многочисленные свидетельства о прямом угле в быту и строительстве у папуасов Новой Гвинеи. «Я собирал с особенным интересом все, что можно назвать первобытными зачатками искусства у папуасов, или по крайней мере срисовывал возможно более точно все, не исключая простейших и самых обыкновенных орнаментов. Я делал это главным образом на том основании, что обитатели моего берега жили еще в каменном веке, в состоянии, которое в теперешнем мире встречается с каждым годом все реже и постепенно исчезает», [8, том 3]. Так, зарисовка Миклухо-Маклая (второй рисунок), свидетельствует о зарождении понятия «прямой угол» у папуасов.



Формирование понятия «прямой угол».

Прямой угол может быть: Инфинитезимальный, Малый, Средний, Большой, Идеальный.

Самый простой прямой угол – *инфинитезимальный*, потому что его в общем случае нельзя измерить, можно только вообразить или формально доказать его существование. Примером может служить угол между декартовыми графиками функций x^2 и $\sqrt{x}$ в нуле.

Малый прямой угол создается человеком с помощью обычных циркуля и линейки по известному алгоритму, использующему симметрию относительно небольшого отрезка. Как видим, круг и прямой угол сопутствуют друг другу. Эта тема является магистральной в живописных сюжетах, прославляющих науку в Средневековье и в Эпоху Возрождения.

Средний прямой угол создается по обратной теореме Пифагора с помощью натягивания бечевки, гомеоморфной окружности и заузленной в пифагорову тройку (в отношении, например: 3: 4: 5) или также как большой прямой угол из малого прямого угла.

Большой прямой угол создается гомотетией малого или среднего прямого угла оптическим способом, например, с помощью громы или диоптры Герона [9].

Идеальный прямой угол создать невозможно, он родственен инфинитезимальному прямому углу. С учетом неевклидовой геометрии здесь следует говорить о классе эквивалентности прямых углов.

Имеется также проблема трансляции прямого угла с требованием параллельности соответствующих сторон в результате переноса. Эта проблема являлась и является важнейшей для строительства.

Понятие прямого угла в культуре Древней Греции связывается в работе [6] с категорией совершенства, как проявление единственности в видах углов. Не оспаривая это суждение, мы понимаем его так, что само понятие прямого угла у Платона и его учеников уже сформировалось и только после этого стало привлекательным для философских размышлений.

Воплощением прямого угла является прямоугольник. Прямоугольник, а, следовательно, и прямоугольный треугольник, шумерами и вавилонянами уже воспринимались отвлеченно как геометрические объекты и снабжались специальными терминами [10, с.107].

Одно из главных назначений прямого угла в древности – ориентировкой по сторонам света [11].

По мнению Морица Кантора [12], гарпедонапты, или «натягиватели верёвок», строили в Древнем Египте прямые углы при помощи треугольников со сторонами 3, 4 и 5. К этому мнению присоединился В.В. Бобынин [13], который привлек также индийский сборник «Сульвасутра» («Правила верёвки», 600 год до н.э.), представляющий собой своеобразную инструкцию по сооружению алтарей в храмах, где даются правила построения прямых углов при помощи верёвки с узлами, расстояния между которыми представляют пифагорову тройку 15, 36 и 39 пад или 3.75, 9, 9.75 метров [11]. Древние китайцы знали о теореме Пифагора в случае катетов 3 и 4 в XII в. до н.э., а в общем случае к VI в. до н.э. [14, с. 52].

По Диогену Лаэртскому Фалес первым понял, что вписанный в круг угол, опирающийся на диаметр, всегда прямой [15]. Цейтен писал, что эта теорема следует из бросающегося в глаза факта, что в окружность можно вписать прямоугольник [16, с.35]. С Фалесом также связана легенда об определении расстояний до недоступных объектов. «Каким образом Фалес определял расстояние кораблей на море? Об этом мы можем только строить догадки» – пишет Ван дер Варден и приводит некоторую реконструкцию, использующую прямой угол [17, с. 122]. В догадках историкам математики не откажешь. Например: «Когда надо было рисовать круг, египтянин сначала рисовал квадрат, а затем вписывал в него от руки круг» [17, с. 445].

Евклид вводит прямой угол так: «Когда же прямая, восстановленная на <другой> прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой» [18, с.11-12]. Основные факты относительно прямого угла у Евклида – это, завершающие книгу I предложения 47 и 48. Предложение 47 – это теорема Пифагора. Предложение 48 – это обратная теорема Пифагора. «Не всегда обращают должное внимание на предложение 48, между тем как именно оно, а не теорема Пифагора, имело важное значение при построении прямого угла при помощи «египетского» треугольника со сторонами 3, 4, 5 и ему аналогичных» [18, с.294].

Эксплуатация прямого угла началась задолго до Эпохи Возрождения, но непосредственные свидетельства всевозможных применений прямого угла относятся именно к этому времени, см., например, квадрант в «Margarita philosophica» Рейша, 1508. Из многих способов построения прямого угла наиболее простыми и историческими подтвержденными являются два: по обратной теореме Пифагора (назовем этот способ *египетским*) и по Началам Евклида (назовем этот способ *греческим*). Сравним эти два способа по точности, пользуясь классической теорией ошибок, восходящей к Лежандру, когда мера точности – среднеквадратическая ошибка (СКО) линеаризованной модели.

Египетский способ построения прямого угла широко использовался и в Новое время, см., например, «Geometriae practicae novae. T.3» Швентера, 1618. Пусть веревочный треугольник состоит из сторон a,b,c так, что должно быть $a^2+b^2=c^2$. По теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

В центре $\varphi=\frac{\pi}{2}$ линеаризации будет $a^2+b^2=c^2$, потому в результате дифференцирования получится

$$-d\varphi = \frac{da}{b}+\frac{db}{a}-\frac{cdc}{ab}.$$

Считая da, db, dc независимыми случайными величинами, получим дисперсию угла φ в радианах:

$$M(d\varphi)^2 = \sigma_E^2 = \left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}\right)\sigma_L^2 = 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sigma_L^2,$$

где M – оператор математического ожидания, а σ_L – СКО устройства длины веревки. Пусть R – радиус окружности, описанной вокруг египетского треугольника 3:4:5. Тогда, как легко вычислить,

$$a=\frac{2}{5}\cdot R,\quad b=\frac{8}{15}\cdot R,\quad c=\frac{2}{3}\cdot R.$$

Следовательно, СКО построения прямого угла в египетском способе есть

$$\sigma_E = \frac{25\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sigma_L}{R}.$$

Греческий способ построения прямого угла с данной вершиной, описанный в Предложении 11 из Книги I Начал Евклида [18], состоит в двух применениях линейки и трех применениях циркуля. Здесь

$$\cos\varphi = \frac{u^T v}{|u||v|},$$

где $u=(0\ \ r)^T$ – фиксированный вектор, $v=b-a$ – случайный вектор с независимыми друг от друга началом a и концом b, $(\cdot)^T$ – операция транспонирования, $v^T u$ – скалярное произведение u, v. Считаем, что циркуль значительно точнее линейки. Первое применение линейки для начертания базовой прямой $(-r,\ r)$ считаем безошибочным. Второе применение линейки будем отождествлять с выбором двух случайных точек a, b (циркульных засечек) с одинаковыми характеристиками рассеяния. Выполняя линеаризацию с центром в $\varphi=\frac{\pi}{2}$, получим

$$-d\varphi = \frac{u^T v}{|u|} \cdot \left(\frac{1}{|v|}\right)' dv + \frac{1}{|u||v|} \cdot u^T dv = \frac{1}{|u||v|} \cdot u^T dv,$$

а из нее – формулу дисперсии отклонения от прямого угла в радианах:

$$M(d\varphi)^2 = \sigma_G{}^2 = \frac{1}{u^2 v^2} \cdot u^T M(dv\, dv^T)u = \frac{1}{u^2 v^2} \cdot u^T (M(da\, da^T) + M(db\, db^T))u,$$

где $dv=db-da$, а случайные векторы da, db независимы, несмещенны и одинаково изотропны. Тогда

$$M(da\, da^T) = M(db\, db^T) = \sigma_0^2 E,$$

где E – единичная матрица, а σ_0 – СКО абсциссы или ординаты. Отсюда

$$\sigma_G = \sqrt{M(d\varphi)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sigma_0}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sigma_0}{R},$$

где R – радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами $2r,\ 2r,\ 2r$.

Из полученных выше формул для σ_E, σ_G следует, что

$$\frac{\sigma_G}{\sigma_E} = 0.213 \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_L}.$$

Так как σ_0 имеет порядок микрометров, а σ_L в любом случае больше σ_0, то для практики последняя формула означает, что при построении малого прямого угла греческий способ значительно точнее египетского. Для непосредственного построения среднего прямого угла, т.е. за границами применения циркуля, египетский способ становится предпочтительней. Однако провисание и растяжение веревки ставят египетскому способу естественные ограничения на уровне большого прямого угла. Представляется разумным употребление «египетского способа» индусами для построения среднего прямого угла, который имел размеры 3.75м, 9м, 9.75м.

Единожды построенный прямой угол (обычно малый) часто воплощается в угольник, который затем используется для быстрой многократной транспортировки прямого угла. Поэтому проблема точности малых и средних прямых углов будет всегда актуальна, см., тему «Угольники столярные» на сайте [19] (прочитано 60178 раз к 11.05.2013 и 100673 раза к 27.05.2014). Чем точнее и выносливей угольник, тем он дороже стоит.

Экстремальное свойство прямого угла.

Экстремальное свойство прямого угла связано с наилучшим приближением к прямой. По просьбе автора экстремальное свойство прямого угла *Тиберий Закадушный* выразил в стихотворении «Золотая середина»:

Aurea mediocritas Двух братиков от перегруза Спасла сестра гипотенуза, Квадраты братиков сложив И в свой квадрат преобразив, Ведь угол был перед сестрой Не произвольный, а *прямой*.	С запасом сил бы их спасла Братолюбивая сестра, Увидев угол пред собой, Что называется *тупой*. Но не смогла бы их спасти, Увидев *острый* впереди. Встают из нашего разбора *Две* теоремы Пифагора!

Прокомментируем это глубокое стихотворение. Название «теорема Пифагора» – это удобная ссылка. И возникла она довольно поздно. Например, Декарт, формулируя в письме (1642) принцессе Елизавете Богемской теорему о связи катетов с гипотенузой в прямоугольном треугольнике, как основное вместе с подобием средство для решения геометрических задач, не упоминает Пифагора [20]. Сам Евклид и даже автор *первого великого после Евклида* учебника [21] по геометрии (1794) Лежандр не упоминают при теореме о прямоугольном треугольнике Пифагора. Также и Т. Ф. Осиповский в своем Курсе математики (1801), возможно, следуя Лежандру, тоже не упоминает Пифагора. Любопытно, что в одном из первых отечественных учебников по геометрии [22, с.154] Н. Г. Курганов (1765) приписывает теорему о связи катетов с гипотенузой Архимеду. Такова первая часть стихотворения Тиберия Закадушного. Во второй части стихотворения предъявлен метод доказательства обратной теоремы Пифагора по Лежандру. Это *метод полной индукции*, когда все случаи досконально разбираются и ничего не остаётся кроме. Тут важно реально проходимое, т.е. конечное число вариантов. В данном случае этих вариантов *три*: угол прямой, угол тупой, угол острый. Других-то углов нет. Закадушный как раз и выдерживает этот сценарий: при прямом угле квадрат противолежащей стороны равен сумме квадратов двух других сторон, при тупом угле квадрат противолежащей стороны строго больше суммы квадратов двух других сторон, а при остром угле – строго меньше суммы квадратов двух других сторон. Следовательно, (так рассуждал Лежандр, за ним Осиповский, Киселев и др.), если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна третьей стороне, то этот треугольник прямоугольный во избежание противоречия. Вот это и есть «обратная теорема Пифагора» в исполнении Лежандра, что и продемонстрировано в стихотворении Закадушного. Такое совпадение необходимого и достаточного условий для математики довольно редкое. Уже оно говорит об экстремальности прямого угла.

Вот другой пример экстремальности прямого угла из [16, с.23]. «Египтяне, как и некоторые другие народы, пользовались для определения четырехугольника со сторонами a, b, c, d неверной формулой

$$\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2} \text{».}$$

Ван дер Вандер в своей книге [17, с.30] поставил вопрос: «**Почему пользовались только что приведенным правилом для площади произвольного четырехугольника, погрешность которого в общем случае может быть сколь угодно большой?**».

Лемма. Площадь треугольника *строго меньше* половины произведения двух его сторон, кроме случая прямого угла между ними.

Теорема. Площадь выпуклого четырехугольника *строго меньше* произведения полусумм противолежащих сторон, кроме случая прямоугольника.

Доказательство. Площадь выпуклого четырёхугольника есть половина суммы площадей треугольников, отсекаемых диагоналями. Если один угол выпуклого четырёхугольника не прямой, то по лемме площадь четырёхугольника будет строго меньше суммы четырех произведений всех смежных сторон четырёхугольника. Разложение на множители даст искомое неравенство.

Эта теорема отвечает на вопрос Ван дер Вандера. Вся земля принадлежала государству, и оно собирало налог по неверной формуле. Неверная формула, являлась системообразующим фактором, заставляющим землевладельцев предъявлять мытарям свои поля, разбитыми на прямоугольники и прямоугольные треугольники. В пользу этого тезиса говорит копия вавилонского плана поля [23, с.48]. Это был гениальный способ заставить подданных самим заботиться о правильной форме своих полей.

Абстрактный прямой угол возник благодаря скалярному произведению, введеному У. Гамильтоном в работе [24] 1846 года одновременно с векторным произведением в связи с кватернионами. Грассман в работах 1844 и 1862 года развивает первую аксиоматической теорию алгебраических систем. Опираясь на идеи Грассмана, Пеано в работе (1888) сформулировал аксиомы линейного пространства, см. [25, р. 141-142]. После Пеано для создания обобщения евклидовой геометрии на случай произвольной размерности потребовалось наделить линейное пространство скалярным произведением. Это позволило ввести абстрактные расстояние и угол. Нуль скалярного произведения двух ненулевых элементов линейного пространства и стал признаком абстрактного прямого угла между этими элементами. Обобщение евклидовой геометрии заняло несколько десятилетий и потребовало усилий многих математиков, это были: Давид Гильберт (D. Hilbert, 1862–1943), Э. Шмидт, Ф. Рисс, Фреше, Э. Фишер, М. Строун, И. фон Нейман и др., см. краткий исторический очерк по этому поводу в [26, с. 324-331]. В результате, привычная плоскость получила обобщение в *гильбертовом пространстве,* где каждый элемент раскладывается по ортогональному базису так же, как гипотенуза раскладывалась по катетам у Евклида.

Прямой угол в христианском мире.

Апостол Фома, по жребию, отправился в Индию и там, объявив себя строителем, предстал перед царем и попросил хороших денег на построение храма. Царь ему деньги дал. А Фома роздал эти деньги неимущим. Царь, после неудачи проекта, заключил Фому в темницу, но выпустил его из нее, когда брат Царя воскрес и объявил о том, что сооружение Фомы находится не в мире нашем, а в том. Эта легенда стала обоснованием второго атрибута апостола Фомы – угольника (прямого угла), как обязательного инструмента строителя.

На картине ученика Рембрандта Николоса Маса (1632-1693) мы видим Фому с угольником, который по отсвечиванию следует признать металлическим. Такой угольник стоил очень дорого. Но это угольник не для строительных, а для для высокоточных работ по изготовлению приборов и т.п. Он отвечает категории малых прямых углов. На барельефе 1685 года в соборе св. Марии в Памплоне апостол Фома с большим деревянным угольником (фото *Richard Stracke* с сайта http://www.aug.edu/augusta/iconography/thomas.html). Это строительный угольник, предназначенный для воспроизведения среднего прямого угла. Подчеркнуто символическое значение имеет прямой угол в выразительной скульптурной композиции Витали (1842-1845), которая представляет апостола Фому с угольником над левым крылом фронтона западного портика Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге.

Эти примеры позволяют считать покровителем всех математиков Апостола Фому (он особенно вспоминается христианами в следующее после Пасхи воскресение).

Есть и оппозиция этому мнению, выраженная, например, в сумасшедшей картине Караваджо 1602 года, на которой Амур попирает всё цивилизационное, в том числе и угольник, т.е. прямой угол, а с ним и всю математику.

В Британской библиотеке хранится иллюминированная рукопись [27], воспроизводящая труд Герарда Кремонского, одного из первых переводчиков Евклида с арабского на латинский. Часть этого манускрипта, содержащая неполный перевод Евклида открывается текстом, в инициал (в заглавную букву «Р») которого с удивительным тщанием вписана изумительная миниатюра. Она почему-то трактуется в Интернете, как женщина, обучающая монахов. Между тем, задача художника миниатюры состояла в такой аллегории, которая бы стала сочной увертюрой к последующему тексту из Евклида. С этой задачей художник отлично справился: женщина – это Геометрия, а ближайший к ней, выделенный цветом мужчина, это Евклид. Стоящие за ним – Ученики Евклида, в частности читатели манускрипта, да и мы с вами. В одной руке Геометрии – циркуль, в другой – прямой угол (угольник).

Библиографический список

1. *Беклемишев, В.Н.* Основы сравнительной анатомии беспозвоночных [Текст] / В.Н. Беклемишев / Т. 1. – М.: Наука, 1964.
2. *Ливингстон Д.* Путешествие по Замбези с 1858 по 1864 г. [Текст] / Д.Ливингстон, Ч. Ливингстон /– М.: Географгиз, 1956.
3. *Григорьев, С.А.* Мегалитические сооружения острова Вера на озере Тургояк в Южном Зауралье [Текст] / С.А. Григорьев, Н.М. Меньшенин / Изв. Челябинского научного центра, 2004. № 1, С. 208-213.
4. *Лазарев, Г.З.* Из истории японского жилища [Текст] / Г.З. Лазарев / Сов. этнография, 1972, №1, С. 73-84.
5. *Nemet-Nejat, K. R.* Late Babylonian Field: A Typology [Текст] / K. R. Nemet-Nejat / Mesopotamia 15 (1980), pp. 109-134.
6. *Щетников, А. И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе [Текст] / А. И. Щетников / Историко-математические исследования, 13 (48), 2009, С. 198 – 217.
7. *Ливингстон, Д.* Путешествия и исследования в Южной Африке с 1840 по 1855 г. [Текст] / Д. Ливингстон / – М.: Гфгиз, 1955.
8. *Миклухо-Маклай, Н. Н.* Собрание сочинений в шести томах [Текст] / Н. Н. Миклухо-Маклай / – М.: Наука, 1993.
9. *Зверкина, Г. А.* О трактате Герона Александрийского «О диоптре» [Текст] / Г. А. Зверкина / Историко-математические исследования, 6 (41), 2001, С. 330-346.
10. *Вайман, А. А.* Шумеро-Вавилонская математика III – I тысячелетия до н.э. [Текст] / А. А. Вайман / – М.: Издательство восточной литературы, 1961. 278 с.
11. *Бобынин, В. В.* Ориентирование [Текст] / В. В. Бобынин / Энциклопедический Словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. Т. 22 (43): Опека – Оутсайдер. – 1897. С. 147-148.
12. *Cantor, M.* Vorlesungen über geschichte der mathematik [Текст] / M. Cantor / Bd. 1 – Leipzig: B.G.Teubner, 1894, S.64-65.
13. *Бобынин, В. В.* Писцы египетские [Текст] / В. В. Бобынин / Энциклопедический Словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. Т. 23А (46): Петропавловский – Поватажное. – 1898. С. 700.
14. *Березкина, Э. И.* Математика Древнего Китая [Текст] / Э. И. Березкина / – М.: Наука, 1980.

15. *Диоген Лаэртский* О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов [Текст] – 2-е изд., испр. – М.: Мысль, 1986.
16. *Цейтен, Г.Г.* История математики в древности и средние века [Текст] / Г.Г. Цейтен / – Л.: ГТИ, 1932.
17. *Ван-дер-Варден, Б.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции [Текст] / Б. Ван-дер-Варден /– М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
18. *Начала Евклида* [Текст] Книги I-VI. – М.-Л.: ГТТИ, 1948.
19. http://forum.woodtools.ru/index.php?topic=2442.0
20. *Барабанов, О.О.*. Два математических письма Декарта принцессе Елизавете Богемской [Текст] / О.О. Барабанов, Е.В. Петрова / История науки и техники, 2011, №1, С. 20-32.
21. *Legendre Adrien-Marie* Eléments de géométrie [Текст] / Adrien-Marie Legendre / 1794.
22. *Курганов, Н.* Генеральная геометрия, кн. 1. [Текст] / Н. Курганов / – СПб.: Тип. Пажеского корпуса, 1765.
23. История математики: В 3 т. [Текст] – Т.1. – М.: Наука, 1970.
24. *Hamilton, W.R.* On Quatrnions; or on New System of Imaginaries in Algebra [Текст] / W.R. Hamilton / Philosophical Magazine. 3rd Series, Vol. XXIX, 1846. pp. 26-31.
25. *Peano, G.* Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni delia logica dedutiva [Текст] / *G. Peano* / – Torino, 1888.
26. *Бурбаки, Н.* Топологические векторные пространства [Текст] / Н. Бурбаки / – Изд. иностр. лит. М.: 1959.
27. Учебный альманах / *Герард из Кремоны* [Текст] – Париж, 1309 и 1316. Burney 275 f. 293.

Бестужевки-математики − ученицы Д. Гильберта

З.С. Галанова, Н.М. Репникова

Реформа образования 1863 − 1864г. позволяла открывать частные высшие учебные заведения. Они были открыты во многих университетских городах России. В этих учебных заведениях впервые в России женщины могли получить высшее образование [1].

20 сентября 1878г. в Петербурге были открыты Высшие Женские Курсы (ВЖК) с двумя отделениями: словесно-историческим и физико-математическим. Их стали называть Бестужевскими по имени их первого директора К.Н. Бестужева-Рюмина, профессора русской истории, академика. Слушательниц этих курсов называли бестужевками.

На ВЖК было принято слушательниц, особенно способных к научной работе и преподаванию, направлять для продолжения образования за границу. Престижной и всемирно известной была математическая школа в Геттингенском университете, возникшая благодаря деятельности Ф. Клейна и Д. Гильберта.

Среди докторантов Д. Гильберта были три выпускницы Бестужевских курсов: Л.Н. Запольская, Н.Н. Гернет, В.Е. Лебедева- Миллер.

Запольская Л. Н.

Гернет Н. Н.

Лебедева-Миллер В. Е.

Запольская Любовь Николаевна (1871 – 1943) − первая женщина-математик, защитившая магистерскую диссертацию в русском университете (в Московском университете, 1906г.).

Она родилась в селе Сурки (оно же Бигильдино) Данковского уезда Рязанской губернии в семье учителя. Благодарные соотечественники опубликовали целую серию работ о ее жизни [3 − 9].

В 1876 году семья переезжает в Петербург. Отец работает во второй средней Петербургской военной гимназии и руководит педагогическими курсами при этой гимназии.

Любовь Николаевна с золотой медалью окончила Петровскую женскую гимназию (ведомство императрицы Марии) в Петербурге (1880 − 1887г.г.), затем педагогические курсы (1887 − 1890г.г.). На педагогических курсах работали известные педагоги: Рашевский, Страннолюбский, Артемьев, Бранд, Герд, Пуликовский. С осени 1890г. Запольская становится слушательницей физико-математического отделения Бестужевских курсов.

Курсы в это время переживали нелегкий период становления программ. В 1886г. был закрыт прием слушательниц на все ВЖК России и Бестужевские курсы продолжали доучивать уже принятых слушательниц. Только 10 января 1889г., за несколько месяцев до выпускных экзаменов, после чего курсы окончательно закрылись бы, было получено разрешение на новый прием слушательниц, но с рядом ограничений административного характера и изменением программ обучения.

Любовь Николаевна на математическом отделении изучила предметы [2] − введение в анализ, геометрию, тригонометрию, физику элементарную и высшую, неорганическую химию, теорию определителей, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, механику, математическую географию, высшую алгебру, интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений теорию чисел, исчисление конечных разностей, теорию вероятностей, вариационное исчисление, интегрирование уравнений с частными производными, эллиптические функции, астрономию. На обоих отделениях (математическом и химическом) читалось богословие, французский и немецкий язык. Кроме того, были необязательные предметы − латинский язык и хоровое пение.

Список предметов внушительный. Это была хорошая база для дальнейшего изучения математики.

Позже Любовь Николаевна с благодарностью вспомнит педагогов ВЖК: академика В.Г. Имшенецкого, профессора В.И. Шифф, астронома академика О.А. Баклунда, физика О.Д. Хвольсона, механика И.В. Мещерского.

В 1894г. умер отец, в 1895г. семья переезжает в г. Рязань.

После окончания специального математического отделения ВЖК в 1894г. (10-ый выпуск ВЖК) Л.Н. удалось получить личное разрешение министра на продолжение образования в Геттингенском университете

С 1895г. по 1902г. (семь лет) Любовь Николаевна ─ вольнослушательница Геттингенского университета. Слушает лекции Д. Гильберта, Клейна, Фохта, Шура, Шенфлиса, Рикка и Буркхардта. Участвует в работе физико-математического семинара. Под руководством Д. Гильберта в 1902г. написала работу «Uber Theorie der Relativ- Abelychen-cubischen Zahlkorper». Работа полностью была напечатана, что являлось редкостью для немецких университетов.

Защита диссертации состоялась в 1902г., прошла успешно. В отзыве на диссертацию Д. Гильберт указал, что работа наравне с лучшими работами, а объективная научная ценность выше, чем у лучших диссертаций.

Любовь Николаевна получила степень доктора философии и свободных искусств с наивысшей похвалой (magun cum laude).

После защиты диссертации Запольская возвращается в Россию.

19 ноября 1902 года в Московском математическом обществе она выступила с докладом «Теория релятивно-абелевых кубических числовых тел». Была избрана членом Московского математического общества.

В 1903г. Л.Н. приглашают на Московские Высшие Женские курсы (МВЖК), где она и работает до 1919г. Ведет занятия по теории рядов, интегральному исчислению, высшей алгебре.

Л.Н. активно включается в научную жизнь г. Москвы. Принимала участие в работе математического кружка, руководимого и основанного Млодзиевским Б.К. в 1905г. На его заседаниях обсуждались вопросы методики преподавания математики и подготовки к первому съезду преподавателей математики.

В 1905г. в издательстве Московского университета Л.Н. опубликовала работу [10], которая и стала ее магистерской диссертацией.

В работе исследованы законы разложения главных первоначальных идеалов на простые идеальные множители в алгебраических числовых областях, образующихся при решении уравнений 3-й степени с рациональными коэффициентами. Выведены выражения для дискриминантов всех числовых областей, находящихся в связи с упомянутыми областями рациональности.

Защита магистерской диссертации состоялась в Московском университете 8 марта 1906г. Любовь Николаевна стала первой женщиной в России, получившей магистерскую степень от русского университета. Оппонентами были известные профессора Московского университета: Л.К. Лахтин и Д.Ф. Егоров. Выступал профессор Млодзеевский Б.К. [7].

На это событие в научной жизни России откликнулись популярные издания (Женский вестник, №4., 1906г. и др.).

С 1906г. по 1910г. Л.Н. кроме работы на МВЖК преподает в Мариинской женской гимназии в Рязани. В 1918 – 1919г.г. МВЖК были преобразованы во 2-ой Московский Государственный университет, позже в Московский педагогический институт. Л.Н. работает там профессором. Связь с Геттингеном она не прерывала. Так, с 26 апреля по 26 мая 1910г. она слушает лекции в Геттингене.

В 1919г. возвращается в Рязань, работает профессором института народного образования (ныне Рязанский педагогический институт), читает основные курсы по математике. В 1923г. институт был преобразован в среднее педагогическое училище. Л.Н. уезжает из Рязани. С осени 1923г. по январь 1925г. она штатный профессор Саратовского Государственного университета. С начала 1925г. по 1930г. профессор и заведующий кафедрой высшей математики и механики Ярославского педагогического института.

В Трудах Ярославского педагогического института (физико-математический сборник, т.11, вып.4, 1928г.) опубликована статья Л.Н. Запольской «О свойствах некоторых числовых лучей».

Работала профессором Кубанского и Воронежского педагогических институтов.

В 1913 – 1917гг. были изданы лекции Запольской отдельными книгами. Поражает многообразие читаемых ею курсов.

За заслуги в области народного образования ей назначена персональная пенсия.

Гернет Надежда Николаевна (1877 – 1943).

Семья Гернетов старинного дворянского рода. Гернеты – выходцы из Англии, переселились в Померанию, затем в Россию. Отец Надежды Николаевны – Гернет Николай Александрович (1843 – 1910) был активным участником революционного движения, народник Был осужден и сослан в г. Ардатов Симбирской губернии. Мать Надежды Николаевны Гернет ─ Надежда Николаевна Филатова, из помещичьей семьи. В ее роду много талантливых ученых: Крылов А. Н. – кораблестроитель; Филатов Н. Ф. - знаменитый детский врач; Филатов В. П. – знаменитый глазной врач; А.Н. Ляпуновым, математик. После окончания ссылки семья переезжает в г. Симбирск.

Н.Н. Гернет родилась 27 апреля 1877г. в г. Симбирске. Получила прекрасное домашнее образование. Но была цель – поступить на ВЖК. Она поступает вместе с сестрой Ольгой в гимназию в старшие классы. В 1894г. (за два года) окончила гимназию с золотой медалью и поступила на специальное математическое отделение ВЖК в Петербурге.

После окончания курсов в 1898г. продолжает обучение в Геттингентском университете. Под руководством Д. Гильберта в 1901г. написала диссертацию по вариационному исчислению, за которую была удостоена степени доктора философии с наивысшей похвалой. На немецком языке были опубликованы две работы:

1. Untersuchungen zur Variationsrechnung (Ueber eine neue Methode in der Vareiationsrechnung. Dissertation, Gottingen. 1901).
2. Ueber die Reihe Lagrange (Vortrage gehalten in Mathtm. Sem. Zn Gottingen, 1901).

По возвращении в Петербург Надежда Николаевна Гернет стала работать на ВЖК. Связь с Геттингенским университетом не прерывает. Посещает университет вплоть до 1914г.

В 1913г. на русском языке была опубликована ее диссертация [13]. В 1915 г. в Московском университете защитила диссертацию и стала второй женщиной─ магистром математики, получившей степень от русского университета.

Ее защита была событием в научной жизни России. В журнале. «Задушевное слово», №22, 1915г. помещена заметка с фотографией о ее защите.

В 1915г. Н.Н. Гернет была избрана профессором по кафедре математики ВЖК, в 1917г. – профессором в Первом педагогическом институте.

Состояла действительным членом физико-математических обществ в Петербурге и при Казанском унив., членом Deutchen Mathematiker Vereinigung .

На ВЖК Н.Н. Гернет работает с 1902г. по 1919г., с 1919 по 1930г. – в университете, с 1931 –1943г. работает в Политехническом институте.

В трудах индустриального института (т.10, вып.3, 1936г.) была опубликована ее работа «О радиусе сходимости ряда Лагранжа». Н.Н. принимала участие в создании известного задачника по математике, выходившего в авторстве Н.М. Гюнтера и Р.О. Кузьмина. В раздел «Вариационное исчисление» 3-го тома она представила большую часть задач. Третий том переиздавался 4 раза, в 2003г. все три тома были объединены в один.

Судьба ее творческого наследия интересна.

Часть ее диссертации посвящена нахождению в классе кусочно-непрерывных функций экстремума простейшего функционала в замкнутых областях. Вблизи границы области вариация становится односторонней и уравнения Эйлера, вообще говоря, неверны. В работе предложен метод нахождения экстремалей в замкнутых областях. Ее работа была оценена Н.М. Гюнтером. Некоторые результаты Н.Н. Гернет были включены Н.М. Гюнтером в его книгу по вариационному исчислению, изданную в 1941г.

Далее о работе забыли. Только в 50-х годах, когда потребности быстро развивающейся теории управления поставили на повестку дня задачи о нахождении экстремумов функционалов в замкнутых областях, о работе Н.Н. Гернет «вспомнили». Это был пример, когда история помогла практике.

Результаты, полученные Н.Н. Гернет, были названы Ю.П. Петровым [12], профессором Петербургского университета, «теоремой Гернет»: если экстремум функционала существует и достигается на классе кусочно-непрерывных функций, то он достигается на составных кривых, состоящих из отрезков экстремалей и границы области. Эта теорема доказана также для ограничений более общего вида:

$$\varphi(x, y(x)) = 0 \quad и \quad \varphi(x, y(x), y^{|}(x)) \geq 0$$

О Надежде Николаевне оставили воспоминания академик П.Я. Кочина, сестра О.Н. Зиновьева-Гернет, Е.С. Венцель (Долгинцева). Венцель училась в ленинградском университе у Н.Н. Гернет. Н.Н. Гернет была жизнерадостным, добрым, отзывчивым человеком, очень любила студентов и им помогала. К ней можно было обратиться с любым вопросом

Имя Н.Н. Гернет вписано в историю кафедры математики Спб. политехнического университета [14]. О ней тепло пишет зав. каф. «Высшая математика» профессор В.И. Антонов, проф. Ю.Д. Максимов, доценты Ярв Э.И., Анфертьева Е.

В 1948г. отец Н.А. Гернет, брат М.Н. Гернет и Н.Н. Гернет объявлены почетными гражданами г. Ульяновска (б. Симбирска) по случаю 300 – летия г. Симбирска.

Брат Михаил Николаевич Гернет – юрист, заслуженный деятель науки, орденоносец, лауреат Сталинской премии. Он известен своими работами о царских тюрьмах.

Вера Евгеньевна Лебедева-Миллер.

Первой женщиной, профессором математики высшей школы Румынии была бестужевка Вера Евгеньевна Миллер-Лебедева (1.12.1880 − 12.12.1970).

Родилась 1.12. 1880г. в Петербурге. Родители еще не окончили медико-хирургическую академию в Петербурге, окончили ее потом. Отец поступил на службу земского врача в Новгородской губернии, и родители переехали в Новгород. Это родной для Веры город, она провела здесь детство, юность, отрочество. Окончила в Новгороде женскую гимназию с золотой медалью.

В 1897г. поступила на ВЖК. Мать и два старших сына переехала вместе с ней в Петербург, младшие дети остались с отцом в Новгороде на иждивении няньки и под надзором хорошей приходящей учительницы.

Окончила ВЖК в 1902г. Осталась на зиму в Петербурге, работала в частной женской гимназии, чтобы накопить денег для учебы в Германии.

Весной 1903г. съездила в Геттинген, нашла дешевую комнату и осенью 1903г. была принята на физико-математический факультет.

Геттинген – научный центр Германии. Три главных профессора – Феликс Клейн, Д. Гильберт, Генрих Миньковский были учителями Веры Евгеньевны в университете. Вера Евгеньевна оставила теплые воспоминания о педагогах ВЖК и педагогах геттингенского университета.

Д. Гильберт в это время создавал свою теорию интегральных уравнений, и студенты следили за ее развитием. Многих из них, в том числе и Веру, Д.Гильберт привлек к работе в этом направлении. Вера Евгеньевна занималась приложениями интегральных уравнений к разложению функций в ряды.

Цель работы В. Лебедевой: в тех случаях, где применение функции Грина сложно, указать другой путь установления ядра линейного неоднородного интегрального уравнения. Это было сделано с блеском в трех главах ее диссертационной работы.

В первой главе метод показан на примере полиномов Эрмита $P_n(x)$. Интегральное уравнение соответствовало дифференциальному уравнению линейного распространения тепла при различных условиях.

Во второй главе метод показан на примере полиномов Лагерра. .

В третьей главе сделано обобщение на случай двух переменных x, y. Интегральное уравнение соответствовало уравнению переноса тепла в бесконечной плоскости.

Ее работа была опубликована в «Math. Annalen», t. 64. 1907, p. 388−416.

Осенью 1906г. сдала экзамен на степень Dr. Phil. с отметкой «Magun cum lande». Одновременно с Верой у Гильберта учился А. Миллер из Румынии. Так же, как и Вера, он защитил с наивысшей похвалой в 1906г. докторскую диссертацию «Дифференциальные уравнения высшего порядка применительно к разложению функций в ряды».

Осенью 1906г. Вера вернулась в Петербург, А. Миллер в Румынию.
Вере дали место на ВЖК, ассистент Гюнтера, которое занимала 1906 – 1907г.

Летом приехал жених А. Миллер. Поженились в Петербурге и уехали в Румынию.
2,5 года жили в Бухаресте, муж был конференциаром в университете и учителем в Высшем медицинском институте и других школах. Он должен был содержать еще мать- вдову и сестру. Столица не нравилась.

В 1910г. освободилась в Ясском университете кафедра аналитической геометрии, и Совет директоров предложил А. Миллеру занять ее.

К приезду Миллеров в г. Яссы в основном университет занимался подготовкой и переаттестацией учителей. Научная работа в университете не велась. К этому не были готовы ни студенты, ни преподаватели.

В 1910г. Вера Евгеньевна сдала экзамен на доцента, в 1911г. освободилось место конференциара по высшей алгебре, и она получила его по рекомендации профессоров математического ф-та. Читала лекции и вела практические занятия в 1911 - 1918г.

В 1918г. математический Совет рекомендовал В. Миллер ординарным профессором на кафедру высшей алгебры и теории функций. Вера Миллер−Лебедева стала первой женщиной, профессором математики в Румынии.

В Яссах А. Миллер организовал математический семинар в традициях Д. Гильберта. Теперь он носит имя академика А. Миллера [16, 17, 19].

Семинар объединил лучшие математические силы г. Яссы. С первых же дней основания семинара Миллеры стали собирать библиотеку при нем. Библиотека стала одной из лучших в мире по уникальности собранных в ней математических трудов (по каталогу 1943г., сделанному И.Попой). Семинар воспитал многих ученых-математиков Румынии.

Тематике Гильберта посвящены В. Миллер-Лебедевой две работы, напечатанные в румынских журналах в 1909 и в 1911г. С помощью интегральных уравнений получены новые ортогональные решения гипергеометрического уравнения.

Кроме интегральных уравнений Вера Миллер−Лебедева занималась теорией чисел, алгеброй и теорией функций комплексного переменного. В 1928г. доказала для класса функций комплексного переменного теорему, уточняющую результаты более общей теоремы, доказанной в 1927г. В.Л. Гончаровым (Записки Харьковского математического товарищества, т.4, 1, 1927, стр.94 - 107). В статье 1938г. В. Миллер – Лебедева дает новое, простое и изящное доказательство теоремы Кэбе из теории конформных отображений. Работы Веры Евгеньевны упоминаются в немецкой и французской энциклопедиях.

Интересны ее работы исторического характера, напечатанные в различных румынских журналах: «Начала исчисления бесконечно - малых» (1911г.), «О числах» (1912г.), «Ж.Л. Лагранж» (1912г.), «Задача деления круга» (1916г.). Ее кумиром была С.В. Ковалевская. О ней Миллер - Лебедева написала статью в 1912г. Две статьи посвящены Д.Гильберту, учителю Веры. Одна по поводу кончины Гильберта в 1943г., вторая посвящено 100-летию со дня рождения (1962г.).

Педагогическая деятельность Миллер−Лебедевой была разнообразной. Она вела упражнения, читала лекции, вела спецкурс, участвовала в работе семинара. Ее учеником был Александр Климеску, выпускник Ясского университета, профессор Ясского политехнического института. Его докторская диссертация по теории функций комплексного переменного выполнена под руководством В. Миллер – Лебедевой, защищена в 1941г.

Уже будучи в отставке, В. Миллер – Лебедева пишет учебник по алгебре [18]. Ее книга «Лекции по алгебре» вышла в 1953г. Она удостоена Государственной премии Румынии в 1954г. Книга является хорошим введением в современную алгебру. Состоит из введения и трех глав. Уже во введении читатель подготавливается к восприятию алгебраических структур. Первая глава посвящена вопросам общей алгебры, вторая − теории групп Галуа, третья − упражнения и задачи.

Доклад составлен по материалам музея истории Государственного Университета, факультет ВЖК г. Санкт Петербурга [11, 15].

Библиографический список

1. История отечественной математики [текст] / / Киев: Наук. думка, 1966 − 1970. Т. 1−4.
2. Высшие Женские Курсы в С.-Петербурге [текст] / / Краткая историческая записка. − 1900.
3. Рязанская энциклопедия [текст] / / Рязань, 1995. - С. 204.
4. *Золотарева, И. Соколов, Н.* Жизнь, посвященная науке о Л.Н. Запольской [текст] / И. Золотарева, Н.Соколов / Рязанский следопыт, № 4, 1995. - С. 35.
5. *Павлов, А.* Л.Н. Запольская − выдающаяся женщина-математик[текст] / А. Павлов /, Рязанский следопыт, № 4, 1995. - С. 38.
6. *Кауфман, А.М.* Первая русская женщина-алгебраист Любовь Николаевна Запольская [текст] / А.М. Кауфман / Математика в школе, № 1 − 82.
7. *Павлов, А.М.* Первая русская женщина − магистр математики [текст] / А.М. Павлов, / Историко-математические исследования, вып. 32 − 33, 1990.
8. *Макеев, Н.Н.* Любовь Николаевна Запольская (к 146-летию со дня рождения) [текст] / Н.Н. Макеев / Вестник Пермского университета, математика, механика, информатика, вып. 3(7), 2011.
9. *Решетина, Н.С.* Любовь Николаевна Запольская. К 140−летию со дня рождения. Библиографический указатель [текст] / Н.С. Решетина / Рязань, 2010.
10. *Запольская, Л.Н.* Теория алгебраических областей рациональности, образующихся при решении уравнений третьей степени [текст] / Л.Н. Запольская / тип. Императорского Московского университета, 1905.
11. Материалы архива музея СПб. Университета [текст] / / ф. ВЖК. Дело Гернет Н.Н.
12. *Петров, Ю.П.* О научном наследии Гернет Н.Н. [текст] / Ю.П. Петров / Вопросы истории естествознания и техники. Из-во «Наука». Вып 67 – 68. 1980.
13. *Гернет, Н.Н.* Об основной задаче вариационного исчисления [текст] / Н.Н. Гернет / СПб., 1913.
14. *Антонов, В.И. Максимов, Ю.Д.* История кафедры высшей математики Спб-го Государственного политехнического университета [текст] / В.И. Антонов, Ю.Д. Максимов / 2011г.
15. Материалы архива музея СПб. Университета [текст] / / ф. ВЖК. Дело № 2058
16. *Бычков, В.П.* Из истории математики в Румынии [текст] / В.П. Бычков / История физико-математических наук, издательство АН СССР, т. 43, 1961.
17. *Бычков, В.П.* Вера Миллер − Лебедева (к столетию со дня рождения) [текст] / В.П. Бычков / Математика в школе, № 5, 1980. - С.73 – 74.
18. *Vera Myller-Lebedev* Lectii de Algebra [текст] / Vera Myller-Lebedev / Editura Academie Republicin h populare Romane. 1953.
19. *Popa, I. Alexandru si Vera Myller*. An. Sti. Univ. «Al. I. Cusa». T.1-2, 1955, P. XV-XX!V.

История изучения часов как динамической системы

Е.В. Губина, Б.Н. Скрябин

История часов – неотъемлемая часть истории культуры, тесно связанная с прогрессом науки и техники.

Часы относятся к очень древним изобретениям человека. Вначале это были солнечные, водяные, песочные часы, в средние века появились механические часы. В разные эпохи измерение времени играло разную роль в жизни человека. Немецкий историк О. Шпинглер отмечал, что механические часы были изобретены в эпоху начала романского стиля и движения, приведшего к крестовым походам. Достоверно известно, что уже в начале XIV-го столетия появились механические башенные часы.

Первые механические часы были непереносными, они были громоздки и несовершенны. Было изобретено несколько способов преобразования ускоренного падения груза в равномерное движение стрелок, и все же даже известные своей точностью астрономические часы Тихо Браге приходилось «подгонять» при помощи молотка. *Не было известно ни одного механического явления, которое бы периодически повторялось через одно и то же сравнительно небольшое время.*

Такое явление было обнаружено на заре создания новой механики Галилеем. Галилей в 1590 году заметил, что при малых размахах маятника период его колебаний почти не зависит от амплитуды. Путь к созданию маятниковых часов заключается в соединении маятника с устройством для поддержания и отсчета его колебаний. К созданию часов Галилей приступил в 1641 году, за год до смерти. Работа не была закончена. После смерти Галилея остались чертежи маятниковых часов. Конструирование часов должен был продолжить сын Галилея Винченцо, который долго медлил с возобновлением работы и приступил к ней лишь в 1649 году, также незадолго до смерти, так и не создав часы.

Часы Галилея не были осуществлены в действующей конструкции, но заложенная в них идея получила в дальнейшем широкое развитие. Некоторые ученые уже пользовались *изохронностью маятника*, но до создания маятниковых часов еще был нелегкий путь. Его преодолел в 1657 году 27-летний Христиан Гюйгенс, к тому времени уже известный ученый. Часы Гюйгенса представляют соединение маятника со шпиндельным ходом. Это изобретение сделало часы одним из самых точных инструментов того времени.

Маятниковые часы, основанные на идеях Галилея, получили распространение, однако за сутки они сбивались на 15–60 минут. Гюйгенс же сделал колоссальный прорыв в технологии таких часов, уменьшив их погрешность до менее чем 10 секунд в сутки. Достичь этого ему помогли многочисленные эксперименты с различными маятниками. Гюйгенс задался вопросом: каким должен быть маятник, чтобы и при большой амплитуде колебаний сохранялась их изохронность? Гюйгенс установил, что свойство изохронности является не столь общим, как могло показаться. На самом деле, оно имеет место только для *малых колебаний* маятника. Гюйгенс нашел так называемую *таутохронную* кривую, т.е. кривую, по которой в отсутствие трения тела скатываются вниз с любой высоты за одно и то же время. Ею оказалась циклоида, т.е. кривая, которую описывает точка на ободе колеса во время его качения по горизонтальной дороге. На основе полученного вывода Гюйгенс рассчитал и сконструировал циклоидальный маятник, у которого эффективная длина нити подвеса меняется в зависимости от угла отклонения груза от положения равновесия. При этом груз движется точно по циклоиде, и колебания оказываются изохронными.

В своих исследованиях Христиан Гюйгенс сочетал использование очень сильного для его времени математического аппарата с экспериментальной проверкой теоретически доказанных положений. Изобретение Гюйгенса сводилось лишь к навешиванию маятника на уже готовый механизм, способный функционировать и без маятника. Практика не подтвердила преимущества циклоидального маятника перед обыкновенным при использовании его в часах Гюйгенса. Причина этого не в технических трудностях изготовления специального подвеса Гюйгенса, а в том, что ход часов определяется не только свободными колебаниями маятника: часы представляют собой сложную автоколебательную систему.

До Галилея и Гюйгенса были часы, использующие колебания балансира, однако этот балансир не имел собственной частоты колебаний, его частота колебаний зависела от прилагаемых усилий часового механизма. Использование в часах устройства с собственной частотой колебаний оказалось необычайно плодотворным и привело к серии конструкций все более точных часов.

Требования, которые теория часов, сложившаяся в XIX столетии, предъявляла к конструкциям часовых механизмов, сводились к условиям изохронности свободных колебаний и равномерности распределения угла импульса около положения равновесия. При этом возникали вопросы о зависимости характеристик от конструктивных и динамических параметров, ответы на которые можно получить, лишь рассматривая часы как замкнутую динамическую систему.

Теоретической основой хронометрии как науки об измерении и хранении точного времени на протяжении XIX столетия были лишь теория свободного маятника и появившаяся в 1827 г. работа английского астронома Эри, посвященная выяснению влияния внешних импульсов, сообщаемых колеблющемуся маятнику, на период его колебаний. Эри рассматривал маятник, колеблющийся без затухания, на который воздействует мгновенный импульс.

Первой математической моделью часов можно считать формулу периода малых колебаний маятника (общеизвестную в наше время)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{mg \cdot OC}},$$

где I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса O, OC – расстояние между осью подвеса и центром тяжести маятника C. Эта формула уже позволяла оценивать влияние параметров (например, расстояния OC) на период T, т.е. на стабильность хода. Формулу получил Гюйгенс (1673), позднее она появилась из решения уравнения малых колебаний маятника:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot OC \cdot \varphi = 0$$

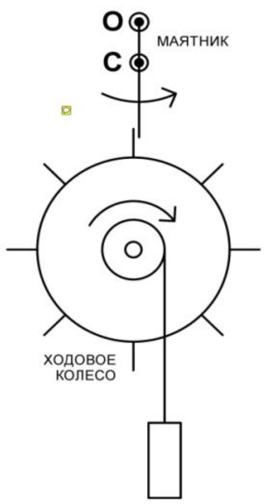


Рис. 1
Простейший вариант схемы часов Галилея-Гюйгенса

Следует заметить, что до фактического появления математического анализа и первых попыток решения дифференциальных уравнений (Ньютон, Лейбниц) все расчеты такого типа были по большей части геометрическими, так что кажущаяся простота вывода формул такого типа является обманчивой. И, несмотря на практически полное отсутствие соответствующего математического аппарата в его время, труды Гюйгенса по маятникам являются во многом исчерпывающими даже с современной точки зрения.

В «помощь формуле Гюйгенса» появилась теорема Эри: *мгновенный импульс, направленный к положению равновесия, уменьшает период; импульс, направленный от положения равновесия, увеличивает период; импульс в положении равновесия оставляет период без изменения.*

Теорема Эри позволяла учитывать влияние ударов, получаемых маятником от ходового колеса.

По мере совершенствования часов, создания новых конструкций, проявлялась недостаточность этой модели часов Галилея-Гюйгенса. Причина этого состояла в первую очередь в том, что в модели не учитывалось, что кинетическая энергия маятника теряется при трении в оси и восполняется за счет потери потенциальной энергии гири.

Необходимо было найти математическую модель часов, которая давала бы достаточно адекватное описание динамики реальных устройств и в то же время поддавалась бы математическому анализу.

Следующая модель, уже учитывающая это обстоятельство, появилась только в 1935 г. в классической книге А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина «Теория колебаний». Тем самым было положено начало математическим исследованиям часового механизма как автоколебательной системы.

Модель представляет собой дифференциальное уравнение $I \cdot \ddot{\varphi} + h \cdot \dot{\varphi} + m \cdot g \cdot OC \cdot \varphi = 0$, где φ – угол отклонения маятника от вертикали, h – коэффициент трения в подшипнике. Дополнительно учитывался скачок угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$, получаемый в результате удара об него ходового колеса при $\varphi = 0$. После интегрирования получаем картину интегральных кривых на плоскости φ, $y = \dot{\varphi}$:

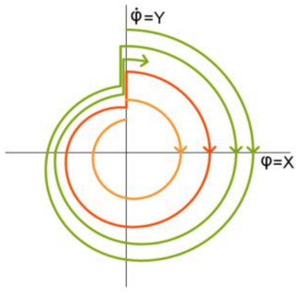


Рис.2
Предельный цикл на фазовой плоскости

Для определения периодических режимов строится функция последования $y_2 = f(y_0)$, где $y = y_0$ при $\varphi = \alpha$ и $y = y_2$ при $\varphi = 2\pi + \alpha$, определяются ее неподвижные точки (в которых $y_2 = y_0 : y_0^0, y_2^0.$). Кроме того, определяется устойчивость соответствующего периодического решения в соответствии с правилом: если $f'(y_2^0) < 1$, то периодическое решение устойчиво, если $f'(y_2^0) > 1$, то периодическое решение неустойчиво (на рис. 3: $M_0(\alpha, y_0)$, $M_1(\alpha, y_1)$, $M_2(\alpha, y_2)$)

Вычисления производных показали, что всегда (при любых значениях параметров) есть единственная неподвижная точка и, соответственно, периодическое решение, и оно всегда устойчиво (рис.2)

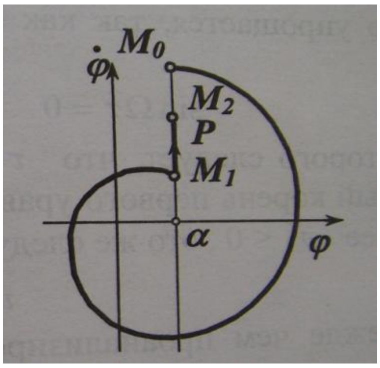


Рис. 3

Фазовая траектория часов и способ ее изучения путем сведения
к точечному отображению прямой $\varphi = \alpha$ в себя.

Таким образом, в [1] рассматривается простейшая динамическая модель часов в виде системы с одной степенью свободы при условии мгновенной передачи импульса. При этом делаются различные предположения о законе изменения скорости в момент действия импульса (скорость может изменяться по закону $y_2 - y_1 = P$ (рис.3) или по закону $\frac{my_2^2}{2} - \frac{my_1^2}{2} = P$, где y_1 и y_2 – скорости до и после импульса соответственно) и о характере действующих сил трения. Особенно важно, что был предложен математический аппарат, адекватный реальным динамическим процессам в часовых механизмах. Анализ структуры разбиения фазового пространства на траектории сводился к построению точечного преобразования прямой в себя исследованию неподвижных точек этого преобразования. При этом доказано, что динамическая система, описывающая часовой механизм, имеет периодического решение с амплитудой, не зависящей от начальных условий.

Эта модель уже более точно отражала зависимость периода T от параметров. Но сразу стал виден ее недостаток: периодическое движение всегда (при любых значениях параметров) устойчиво. Было понятно, что причина этого в том, что не рассматривалось обратное действие маятника на ходовое колесо.

Модели с одной степенью свободы не описывают взаимодействие между различными частями часового механизма и не могут служить для исследования ряда основных вопросов теории часов.

В 1944 г. А.А. Андронов в статье [2] пишет: «Особо мне хотелось поговорить с ним о часах, именно об элементарной, весьма обыденной модели машины – динамической модели часов. Тут были две основные причины. Во-первых, то, что эта задача мне не давалась. В 1928–1929 гг. я потратил много времени, чтобы рассмотреть по-настоящему часы как динамическую систему с двумя степенями свободы, и у меня ничего хорошего не вышло. И в нашей книге вместе с С.Э. Хайкиным мы рассматривали часы как систему с одной степенью свободы и этим лишались самого важного – рассмотрения процесса взаимодействия маятника и ходового колеса. А в 1944 г. нам при помощи этих новых методов удалось рассмотреть эту задачу. Во-вторых, потому, что эта задача давно привлекала внимание самого Л.И. Мандельштама. Он мне несколько раз говорил, что использование маятника для придания часам определенного периода – это замечательное научное достижение, и я был уверен, что эта работа встретит в нем весьма компетентного критика. Мы условились о терминологии: часы без маятника – это догалилеевы часы. Часы с маятником – это часы Галилея-Гюйгенса». «Почему часы, снабженные маятником, менее податливы в смысле изменения периода при изменении трения?» – в этом состоял вопрос академика Мандельштама.

В 1945 г. выходит работа А.А.Андронова и Ю.И.Неймарка [3]. В этой работе рассматривается упрощенная идеальная модель часов (модель А.А. Андронова − модель спускового регулятора скорости без собственных колебаний), в которой, с одной стороны, сохранены типичные особенности часов как неконсервативной динамической системы с двумя степенями свободы, а с другой стороны, сведены к минимуму вычислительные трудности.

Изучается система двух уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} I_0 \cdot \ddot{\varphi} = -h \cdot \dot{\varphi} - mg \cdot OC \cdot \varphi \\ I_1 \ddot{\psi} = M \end{cases}$$

со скачками скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Здесь M – момент на ходовом колесе от гири. В этой модели вращательное движение заменено поступательным.

Исследование динамической задачи сведено к исследованию точечного преобразования. Установлено, что преобразование имеет единственную устойчивую неподвижную точку и, следовательно, у системы существует устойчивое периодическое движение. Для определения устойчивости неподвижной точки применяется теорема: неподвижная точка (x_0, y_0, z_0) отображения $\begin{cases} \bar{x} = P(x,y,z) \\ \bar{y} = Q(x,y,z) \\ \bar{z} = R(x,y,z) \end{cases}$ устойчива, если корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического полинома

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0,y_0,z_0) - \lambda & P'_y(x_0,y_0,z_0) & P'_z(x_0,y_0,z_0) \\ Q'_x(x_0,y_0,z_0) & Q'_y(x_0,y_0,z_0) - \lambda & Q'_z(x_0,y_0,z_0) \\ R'_x(x_0,y_0,z_0) & R'_y(x_0,y_0,z_0) & R'_z(x_0,y_0,z_0) - \lambda \end{vmatrix}$$

по модулю меньше единицы.

«Интерес рассмотрения часов как динамической системы с двумя степенями свободы выходит за пределы собственно теории часов. Такое рассмотрение интересно с точки зрения общей теории динамических систем как типичный пример недостаточно изученных автоколебательных систем с двумя степенями свободы, и с точки зрения теории автоматического регулирования как пример стабилизации периода в системах с двумя степенями свободы» [6].

Эти исследования А.А. Андронова и Ю.И. Неймарка получили продолжение в работах Н.Н. Баутина, в которых подробно рассматривались математические модели различных часовых ходов. Теоретические исследования Н.Н. Баутина позволили увидеть пути изменения часовых конструкций, направленные на повышение стабильности периода автоколебаний.

В 1948 г. выходит работа [4], в которой рассмотрен более сложный случай часов Галилея–Гюйгенса: часы с маятником и пружиной. Изучается зависимость периода от параметров (при этом возникают большие алгебраические трудности). Найдены величины, характеризующие периодическое движение и его устойчивость. Показано, что в рассматриваемой модели возможны периодические режимы двух типов: на встречных и на подталкивающих ударах. Эти два типа могут быть переведены один в другой непрерывным изменением параметров системы.

В работе [5] решается задача, поставленная Л.И. Мандельштамом в 1944 г.: сравнить производные $\frac{\partial \tau}{\partial \lambda_\nu}$, (где τ – период автоколебаний, λ_ν − соответствующие параметры: постоянный момент, вращающий ходовое колесо, коэффициент восстановления неупругого удара, коэффициент вязкого трения и т.д.) для часов Галилея-Гюйгенса и для аналогичных (но без восстанавливающей силы) догалилеевых часов. При этом Л.И. Мандельштам выразил уверенность, что это сравнение позволит точно сформулировать, каковы динамические особенности часов как стабилизатора периода автоколебаний.

В 1986 г. выходит монография Н.Н. Баутина [6], в которой изложены результаты цикла работ по теории часов, дающие объяснение ряда особенностей часов как динамической системы. Дана также развернутая автоколебательная теория часов и эквивалентных им в динамическом отношении устройств – спусковых регуляторов скорости. Исследованы математические модели и условия стабилизации периода автоколебаний. Для некоторых моделей показано существование сложных режимов, в том числе стохастических колебаний («странный аттрактор»).

Н.Н. Баутин рассматривал модель электромеханических часов [7], созданных более 100 лет назад. Особенность динамики этой модели состоит в том, что в ней могут существовать устойчивые периодические движения любой сложности. Ученику Н.Н. Баутина Л.А. Комразу удалось в 1971 году получить и исследовать модель электромеханических часов, в которой нет устойчивых периодических движений, но колебания не затухают [8] (в модели реализуются стохастические колебания).

Н.Н. Баутин и его ученики более 30 лет сотрудничали с НИИЧаспромом – научно-исследовательским институтом часовой промышленности. Построенные на основании теоретических разработок нестандартные часовые хода получили воплощение в реальных конструкциях, выполненных лучшими часовыми мастерами. К удивлению часовщиков эти хода успешно работали и демонстрировались на докладах и семинарах.

Библиографический список

1. *Андронов, А.А.* Теория колебаний [Текст]/А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. // Москва– 1959.
2. *Андронов, А.А.* Мой последний разговор с Л.И. Мандельштамом [Текст]/А.А.Андронов // Собрание трудов. – М.: АН СССР– 1956.– с. 524-525.
3. *Андронов, А.А.* О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель догалилеевых часов [Текст]/А.А.Андронов, Ю.И. Неймарк / ДАН СССР– 1946.– т.1– №1– с.17-20.
4. *Баутин, Н.Н.* О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель часов Галилея – Гюйгенса [Текст]/ Н.Н.Баутин // ДАН СССР– 1948– Т.61.
5. *Баутин, Н.Н.* О задаче Мандельштама в теории часов [текст]/ Н.Н.Баутин // ДАН СССР – 1949– т.65.
6. *Баутин, Н.Н.* Динамическая теория часов [Текст]/ Н.Н.Баутин // Москва– Наука –1986.
7. *Баутин, Н.Н.* Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа [Текст]/ Н.Н.Баутин // – Изв. АН СССР ОТН– 1957– №11– с.115-121
8. *Комраз, Л.А.* Динамические модели маятникового регулятора Гиппа [Текст] / Л.А. Комраз / ПММ – 1971– т.35– вып. 1– с. 147-162.

Научное наследие В.А. Исковских (к 75-летию со дня рождения)

Н.П. Гушель

Василий Алексеевич Исковских (1 июля 1939 – 4 января 2009) – советский российский учёный-математик, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, член-корреспондент РАН (с 29 мая 2008 года), доктор физико-математических наук, профессор. Крупнейший российский специалист в области алгебраической геометрии, бирациональной геометрии, проблемы рациональности. Список основных работ с 1 по 53 см. в [1] и продолжение с 54 по 66 см. в [2].

Василий Алексеевич Исковских родился 2 мая 1939 г. в селе Рождественка Шарлыкского района Оренбургской области в крестьянской семье. Официальный день рождения 1 июля 1939 г. – по дате регистрации.

В 1958 г. Василий Исковских поступил на физико-математический факультет Ташкентского госуниверситета. В 1963 г. как лучший студент курса продолжил образование на механико-математическом факультете Московского государственного университета. По словам Василия Алексеевича, в МГУ учиться было трудно. Тем не менее, в 1964 г. он закончил мехмат с отличием и в 1965 г. поступил в аспирантуру к профессору Ю. И. Манину, которым была установлена область исследований – бирациональная геометрия алгебраических многообразий, близких к рациональным.

К 60-м годам, начиная с работ О. Зариского и заканчивая работами Ж.- П. Сера и А. Гротендика, были созданы основы современной алгебраической геометрии. В 60-е годы, под руководством профессора И.Р. Шафаревича, происходило становление московской школы алгебраической геометрии. Была поставлена задача с помощью современной техники восстановить высшие достижения классической итальянской школы (Кастельнуово Г., Энрикес Ф., Севери Ф.), исправить ошибки, восполнить пробелы и устранить неточности в доказательствах. В МИАН в 1965 году построена систематическая теория алгебраических поверхностей (см. [79] в [2]).

Ю. И. Манин доказал основные теоремы о бирациональной геометрии рациональных поверхностей над незамкнутыми полями [3]. Продолжая работы Юрия Ивановича В. А. Исковских получил важные результаты о бирациональном типе рациональных поверхностей с пучком рациональных кривых (см. [1]–[3] в [1]), составившие содержание его кандидатской диссертации (1968 г.).

Работы Ю. И. Манина и В. А. Исковских по теории рациональных поверхностей над незамкнутыми полями открыли современный этап в бирациональной геометрии. В этих работах 60-х годов можно увидеть прообразы многих достижений современной многомерной алгебраической геометрии. В последних работах (см. [64], [65] в [2]). В. А. Исковских совместно с И. В. Долгачевым вновь возвращается к бирациональной геометрии алгебраических поверхностей

Отсчет современной теории *трехмерных* алгебраических многообразий принято вести с того момента, когда была *отрицательно* решена проблема Люрота: всякое ли унирациональное многообразие рационально? В размерностях 1 (над произвольным полем) и 2 (над алгебраически замкнутым полем) *положительный* ответ дают классические теоремы. Для исследования *трехмерной* задачи потребовались более продвинутые методы. Решение было получено в 1970 г. независимо В. А. Исковских и Ю. И. Маниным (см. [5] в [1]), М. Артином и Д. Мамфордом (см. [67] в [2]) с использованием группы Брауэра и Г. Клеменсом и Ф. Гриффитсом в работе о промежуточном якобиане (см. [68] в [2]). Методы и контрпримеры этих работ независимы и различны.

К концу 80-х годов прошлого столетия стало ясно, что в статье В. А. Исковских и Ю. И. Маниным было сделано гораздо больше, чем просто доказана нерациональность трехмерных квартик в P^4. На основе идей классиков, прежде всего - М. Нётера и Дж. Фано, был построен современный эффективный *метод максимальных особенностей*, позволяющий исчерпывающим образом описывать бирациональные отображения широкого класса многообразий близких к рациональным.

После 1971 г. В. А. Исковских с успехом применил метод максимальных особенностей к изучению бирациональных отображений нескольких классов многообразий Фано - двойных квартик индекса 1, полного пересечения квадрики и кубики в P^5, двойного конуса Веронезе. Эти результаты особенно важны потому, что они наметили общие контуры бирациональной классификации в размерности три и выше (см. [9], [10], [19] в [1]). В частности, достигнутый В. А. Исковских прогресс в сочетании с глубоким пониманием двумерной бирациональной геометрии над незамкнутыми полями позволил ему в конце 70-х сформулировать гипотезу о единственности структуры расслоения на коники при достаточно больших вырождениях. Она была вскоре доказана его учеником В. Г. Саркисовым (см. [85], [86] в [2]). Десять лет спустя Василий Алексеевич формулирует аналогичную гипотезу для трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо (см. [44] в [1]). Эта гипотеза доказана А. В. Пухликовым в 1996 г. (см. [80] в [2]).

Сорок лет исследований, начатых фундаментальной работой В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерных квартиках, превратили трехмерную бирациональную геометрию в глубокую и систематическую теорию. Основным объектом этой теории является *расслоение Мори* π: $V \to S$, где база S есть либо точка (и тогда многообразие V есть Q-многообразие Фано), либо прямая P (и тогда V есть многообразие с пучком поверхностей дель Пеццо), либо рациональная поверхность (и тогда V/S есть Мори-расслоение на коники). Для большинства расслоений Мори V/S любое бирациональное отображение $V \to V'$, где V'/S' — произвольное расслоение Мори, является послойным относительно заданных структур расслоения. Этот феномен называется *бирациональной жесткостью.* Первым примером бирационального жесткого многообразия была трехмерная квартика В. А. Исковских и Ю. И. Манина . В размерности три сейчас имеются наиболее полные результаты о бирациональной жесткости. Подобное явление имеет место и в произвольной размерности. По сравнению с началом 70-х годов фронт исследований по этой тематике продвинулся очень далеко вперед (см. [81]-[83] в [2]), но тем ярче видится важность одного из наиболее впечатляющих прорывов в алгебраической геометрии XX столетия.

Другим важным направлением исследований В. А. Исковских, существенно повлиявшим на развитие многомерной алгебраической геометрии была бирегулярная классификация трехмерных многообразий Фано. Понятие многообразия Фано принадлежит Исковских. Этот класс многообразий существенно отличается даже в трехмерном случае от класса многообразий, рассматриваемых самим Фано, – неособые проективные подмногообразия с каноническими кривыми-сечениями (см. [71]-[73] в [2]). Время показало, что многообразия Фано исключительно важны как для общей проблемы классификации алгебраических многообразий, так и для многих задач алгебраической и арифметической геометрии и математической физики.

В начале 70-х систематическое исследование трехмерных многообразий еще не было начато, имелись лишь разрозненные результаты, так что работы (см. [11], [14], [18] в [1]), были в полном смысле пионерскими. В. А. Исковских дал строгое обоснование метода двойной проекции, что позволило ему (в предположениях существования гладкого антиканонического дивизора и прямой на многообразиях Фано) предъявить полный список многообразий Фано с группой Пикара Z. Эти предположения вскоре были доказаны В. В. Шокуровым (см. [68], [69] в [2]). В окончательном виде эта теория была опубликована в монографии (см. [31] в [1]). Результаты по бирегулярной и бирациональной геометрии трехмерных многообразий составили предмет докторской диссертации В. А. Исковских: "Трехмерные алгебраические многообразия, близкие к рациональным" (1979 г.).

В цикле работ (см. [36], [38], [40], [42], [43], [47] в [1]), совместных с Ф. К. Кабдыкаировым и С. Л. Трегубом, продолжавших исследования 1960-х годов (см. [1], [2] в [1]), Василий Алексеевич построил исчерпывающую теорию бирациональных отображений рациональных поверхностей над незамкнутыми полями в терминах категории Мори и линков. В последние годы эти результаты нашли приложение при завершении классификации конечных подгрупп группы Кремоны плоскости (см. [64] в [2]), начатой Кантором и Виманом в конце 19-го века (см. [75], [78] в [2]), а также при ответе на вопрос Серра о порядках циклических подгрупп над полем рациональных чисел(см. [65] в [2]). Эти последние работы В. А. Исковских (совместные с И. В. Долгачевым) были признаны одними из лучших по РАН в 2008 г.

Основным направлением исследований, которые проводил В. А. Исковских, начиная с середины 80-х годов, является проблема рациональности трехмерных расслоений на коники (см. [21], [29], [37], [39], [46] в [1]). Эта проблема является одной из ключевых для современной бирациональной геометрии. Исходя из гипотезы Шокурова о необходимом условии рациональности (см. [70] в [2]) и примеров, когда этого условия не достаточно, В. А. Исковских сформулировал *геометрический критерий рациональности* в терминах расслоения на коники. Он показал, что его формулировка критерия рациональности влечет решение классической проблемы Кантора о конгруэнции рациональных кривых в P^3 (1901 г.). Более того, он свел решение проблемы к вопросу о каноничности особенности базы расслоения на коники с терминальными особенностями (гипотеза Исковских) с точностью до ограниченного семейства расслоений на коники [46]. Этот вопрос был недавно положительно решен С. Мори и Ю. Г. Прохоровым (см. [76] в [2]). Гипотетический критерий рациональности сведен к перебору ограниченного числа семейств.

Научные идеи и результаты В. А. Исковских оказали большое влияние на исследования алгебраических геометров всего мира. В 1983 г. он был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе в Варшаве. Работы Василия Алексеевича даже тридцатилетней давности продолжают привлекать внимание, широко обсуждаются. Его контрпример к принципу Хассе для системы двух квадратичных форм от пяти переменных активно изучался и получил развитие в серии работ Кольо—Телена, Сансука и других. Что же касается работ по бирегулярной и бирациональной геометрии многообразий Фано, то они справедливо считаются классическими. Эти работы, оказали значительное влияние на оксфордскую школу (см. [74] в [2]).

Василий Алексеевич был не только выдающимся ученым, но и замечательным педагогом. Более тридцати лет на мехмате МГУ продолжался его семинар "Геометрия алгебраических многообразий". Самостоятельная научная работа десятков молодых математиков начиналась с участия в этом семинаре. Василий Алексеевич также руководил семинарами по теории чисел на мехмате МГУ и в МИАНе. Для многих основой алгебро-геометрического образования стали, прочитанные им курсы лекций по разнообразной тематике: алгебраические кривые и их якобианы, геометрия многообразий Фано, проблемы рациональности, теория Мори и многие другие. Учебник Р. Хартсхорна [4], переведенный Василием Алексеевичем на русский язык, является настольной книгой для математиков, изучающих основы алгебраической геометрии.

Под руководством В.А. Исковских подготовлены и защищены 35 кандидатских диссертаций.

В 90-е годы, особенно трудные для российской науки в целом и математики в частности, когда проблема преемственности и притока молодых исследователей стояла исключительно остро, на семинарах профессора В. А. Исковских продолжалась активная научная жизнь, новые студенты и аспиранты включались в научную работу. Редкая работоспособность и энтузиазм Василия Алексеевича проявились в участии в редколлегиях ведущих математических журналов, экспертном совете ВАК, в заседаниях ученых советов и организации десятков научных школ и конференций. С особым вниманием и заботой Василий Алексеевич относился к организации школ по алгебраической геометрии в Ярославле и с 2006 также принимал участие в организации и проведении Колмогоровских чтениях.

За выдающийся вклад в науку В. А. Исковских в 2008 г. был избран членом-корреспондентом РАН, с 2002 г. являлся почетным доктором Туринского университета, в котором когда-то работал Джино Фано.

С 29 июня по 3 июля 2009 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук прошла Международная конференция "Геометрия алгебраических многообразий", посвященная памяти Василия Алексеевича Исковских. 1 июля Василию Алексеевичу исполнилось бы 70 лет. Организаторы планировали приурочить данную конференцию к этому юбилею, но по трагическому стечению обстоятельств жизнь Василия Алексеевича оборвалась за полгода до знаменательной даты. Организаторы решили провести конференцию в память о выдающемся ученом.

В начале 2009 г. вышел том Трудов Математического института им. В. А. Стеклова "Многомерная алгебраическая геометрия", посвященный памяти члена-корреспондента РАН В. А. Исковских, со статьями его друзей, коллег и учеников.

22-25 октября 2013 г. в Математическом институте им. В.А. Стеклова прошла международная конференция "Геометрия алгебраических многообразий", посвященная памяти Василия Алексеевича Исковских.

Библиографический список

1. *Кострикин, А. И.* Василий Алексеевич Исковских (к шестидесятилетию со дня рождения)", [Текст] /. И. Кострикин, В. С. Куликов, Ю. И. Манин, В. В. Никулин, А. Н. Паршин, Ю. Г. Прохоров, А. В. Пухликов, М. Рид, А. Н. Тюрин, И. Р. Шафаревич, В. В. Шокуров /УМН, 54:4(328) (1999), 183–187.
2. *Богомолов, Ф. А.* Василий Алексеевич Исковских (некролог) [Текст] / Ф. А. Богомолов, Вик. С. Куликов, Ю. И. Манин, В. В. Никулин, Д. О. Орлов, А. Н. Паршин, Ю. Г. Прохоров, А. В. Пухликов, М. Рид, И. Р. Шафаревич, В. В. Шокуров/ УМН, 64:5(389) (2009), 167–174.
3. *Манин, Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями [Текст] / Ю. И. Манин / II Матем. сб., 72(114):2 (1967), 161–192.
4. *Hartshorne, R.* Algebraic geometry [Текст] / R. Hartshorne / Springer-Verlag, Berlin, 1977, Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, «Мир», 1981.

Вопросы преподавания математики на страницах журнала «Педагогический сборник» (1864-1917)

Р.З. Гушель

К середине XIX в. в России вполне сложилась система мужского среднего образования. Развитие этой системы и растущие потребности страны в специалистах различных специальностей требовали постоянного совершенствования школьного дела. И в решении этой задачи немалую роль должна была сыграть педагогическая периодическая печать.

С 1834г. в С.-Петербурге начал ежемесячно выходить «Журнал Министерства народного просвещения», содержавший как официальную часть, так и неофициальную, материалы которой в той или иной мере были связаны с деятельностью средних и низших учебных заведений министерства.

Но этого было мало. Нужны были специальные педагогические журналы, которые помогли бы учителю и одновременно служили бы трибуной для тех, кто ратовал за обновление школы.

Одним из первых изданий такого рода был журнал «Учитель» (1861-1870), созданный Н. Х. Весселем (1836-1906) и И. И. Паульсоном.

В октябре 1864г. в С.-Петербурге появился новый журнал «Педагогический сборник», издававшийся Главным управлением военно-учебных заведений. Возглавил это издание Н. Х. Вессель. Он оставался на посту главного редактора до 1882г. В 1867-1874 и 1884-1897гг. Вессель состоял также членом Учёного комитета Министерства народного просвещения.

В 2014г. исполняется 150 лет со времени выхода первого номера «Педагогического сборника», который просуществовал до 1917г. включительно.

После Н. Х. Весселя главным редактором издания стал А. Н. Острогорский (1840-1917). В 1910г. его сменил на этом посту И. С. Симонов (1873г. рожд.), остававшийся во главе журнала вплоть до его закрытия [1]. В 1918-1924гг. он был редактором журнала «Педагогическая мысль».

Первый номер «Педагогического сборника» открывается программной статьёй «От редакции». В ней сказано, в частности: «В последние годы почти во всех наших учебных заведениях совершаются коренные преобразования, в основании которых лежат два главные начала: отделение общего образования от специального и возможно правильное и целесообразное устройство как общеобразовательных, так и специальных училищ, соответствующее современным указаниям педагогики и дидактики и потребностям нашего общества и государства… Необходимость согласного и основательного обсуждения всех педагогических и дидактических вопросов в ближайшем применении к воспитательной и учебной деятельности преобразовывающихся военно-учебных заведений и вызвала издание «Педагогического сборника» [2].

Здесь же была сформулирована и программа журнала. Она содержала, в частности, общепедагогические статьи, обсуждение вопросов устройства военных учебных заведений и педагогическую библиографию.

Публикации вышеуказанной проблематики должны были составить неофициальную часть журнала. В официальной же части планировалось помещать основные документы по военному образованию.

Обширность и разнообразие тематики журнальных публикаций хорошо видны всякому, просмотревшему «Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части «Педагогического сборника» за пятьдесят лет (1864-1914)», вышедший в Петрограде в 1915г. Составителем указателя был С. А. Переселенков. Эта книга объёмом свыше 280 страниц, содержит названия всех публикаций журнала за 50 лет. Расположение материала не хронологическое, а тематическое. Приведём названия некоторых разделов: Религия и нравственность, Психология, Эстетическое воспитание, Подготовка учителей и воспитателей, Русское военное образование, Юнкерские школы, Народное образование за границей.

Приведены названия публикаций по вопросам преподавания отдельных учебных предметов и их разделов. Так, материал, связанный с преподаванием математики, указан в следующих рубриках: математика, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, аналитическая геометрия, начертательная геометрия, анализ бесконечно малых.

Таким же образом перечислены в указателе помещённые в журнале рецензии на учебную и научную литературу по различным отраслям знания и учебным предметам.

Остановимся подробнее на публикациях по математике и вопросам её преподавания. Наряду с рядовыми педагогами средней школы, в журнале печатались такие известные методисты-математики как А. И. Гольденберг (1837-1902), В. А. Евтушевский (1836-1888), В. А. Латышев (1850-1912), С. И. Шохор-Троцкий (1853-1923) и другие. Активно сотрудничали с журналом известные учёные, профессора И. П. Долбня (1853-1912), В. П. Ермаков (1845-1923), В. Я. Цингер (1836-1907) и другие. Среди постоянных авторов издания были замечательные педагоги военно-учебных заведений З. Б. Вулих (1844-1897) и М. Г. Попруженко (1854-1917).

В отличие от большинства отечественных журналов того времени, посвящённых школьному делу, «Педагогический сборник» был в первую очередь именно методическим журналом. Приведём несколько примеров публикаций, посвящённых конкретным вопросам методики математики.

Евтушевский В. А. Пропедевтика алгебры (1868, №VII, VIII).

Гольденберг А. И. Как решать квадратные уравнения с двумя неизвестными? (1886, №VII, с.18-33).

Ермаков В. П. Два правила приближённого вычисления (1892, №IV, с.359-365).

Литвинова Е. Ф. Некоторые теоремы об углах и треугольниках (1898, №VI, с.575-581).

Шохор-Троцкий С. И. О связи теории пределов с теорией иррациональных чисел (1901, №1, с.50-70).

Наряду со статьями, посвящёнными традиционным для средней школы разделам, в журнале печатались и статьи по тем вопросам, которые изучались лишь в военно-учебных заведениях, а в средних учебных заведениях других ведомств их не было (или их только-только ввели). Назовём несколько таких работ:

Шишкевич А. О геометрическом черчении (1872, №IV, с.426-435).

Долбня И. П. О преобразовании уравнения 2-го порядка к осям симметрии (1886, №VI, с.532-540).

Шапошников А. Н. Учение о мнимом числе (1904, № XII, с.486-502).

Попруженко М. Г. Материалы по методике анализа бесконечно малых в средней школе (1912, №VIII-X).

Помимо статей, связанных с изучением конкретных вопросов программы, в журнале помещались и работы более общего характера, посвящённые роли математики в школьном образовании и проблемам постановки этого предмета в средних учебных заведениях. Стоит, по нашему мнению, обратить внимание на следующие работы:

Латышев В. А. Опыт программы элементарного курса геометрии (1878, №II, с.186-206).

Ермаков В. П. Педагогические ошибки в алгебре (1893, №VIII, с.124-140).

Шидловский В. Математика как основа научно-философского мировоззрения (1906, №IV, с.359-365).

Бернштейн С. К вопросу об изменении программы по математике в средней школе (1909, №XI, с.371-388).

Поляков С. Математика и наше мышление (1910, №X, с.333-343).

Вопросы истории математического образования также находили себе место на страницах «Педагогического сборника». В 1878г. в нескольких номерах была опубликована работа В. А. Латышева «Исторический очерк русских учебных руководств по математике». Несколько статей о преподавании математики в Германии поместил в журнале З. Б. Вулих.

М. Г. Попруженко – один из организаторов I Всероссийского съезда преподвателей математики в С.-Петербурге в 1912г. и председатель II съезда в Москве в 1914г., посвятил обоим съездам большие статьи, опубликованные в те же годы.

Движение за обновление школьного математического образования, развернувшееся в начале XXв. как в Европе, так и в России, не могло не найти своего отражения в публикациях журнала.

В 1907г. Киевское физико-математическое общество разработало проект учебного плана по математике для мужских гимназий. А в 1908г. приват-доцент Харьковского университета С. Н. Бернштейн поместил в IX номере «Педагогического сборника» статью, посвящённую анализу этого проекта. И это – только один из примеров публикаций такого рода.

Остановимся подробнее на статье профессора университета Св. Владимира В. П. Ермакова «О преподавании геометрии», помещённой в десятом номере журнала за 1895г. [3].

«Геометрия занимает особое положение в ряду математических наук. Изучение арифметики и алгебры может и должно быть основано на решении задач: правила являются как следствия и обобщения решения задач. В геометрии, наоборот, на первом плане должна быть поставлена строгая систематическая теория» [3, с.328].

По мнению В. П. Ермакова, «Из всех математических наук геометрия самая трудная для понимания. Начальные теоремы слишком очевидны, и трудно убедить в необходимости их доказательств… Нужно довести ученика до сознания в необходимости доказательств. Но на это обстоятельство почти не обращается внимания…

Каждая теорема сопровождается соответственным чертежом… Весьма многие преподаватели полагают, что формулы и чертежи в математике тем именно и важны, что они помогают запоминанию самих доказательств… Утверждают, что математика способствует развитию ***предметной памяти***. Но так могут говорить только лица, незнакомые с сущностью математики. Математика никоим образом не имеет в виду развитие памяти, она преследует более высшую цель – ***развитие мыслительной способности***…

В наших школах с большим успехом развивается и поощряется предметная память; самый же смысл геометрии на первых порах исчезает и лишь со временем выясняется и делается доступным немногим ученикам… Нужно заставлять учеников излагать доказательства и без чертежей…

Необходимо выяснить ученикам порядок теорем. Но этого мало. Часто оказывается, что порядок теорем может быть изменён, для чего, конечно, придётся видоизменить и самые доказательства. На это обстоятельство также нужно обратить внимание учеников. Такое сознательное и деятельное отношение к геометрии в высшей степени развивает мыслительную способность. В результате ученики скорее запоминают и самые доказательства теорем: в противовес бессмысленной предметной памяти по буквам и чертежам развивается ***логическая память***, основанная на последовательном ходе рассуждений» [3, с.330-331].

Далее автор обратил внимание на то, что способ пределов в средней школе усваивался плохо. Он считал, что из геометрии его нужно убрать.

И задачи на вычисление он также предложил изъять из курса геометрии. А вместо таких задач, по мнению В. П. Ермакова, гораздо полезнее было бы решать задачи на построение, которые в то время отсутствовали в гимназическом курсе. В реальных училищах и кадетских корпусах ими занимались мало.

Сравнивая приведённые выше положения В. П. Ермакова с тем, как строится сегодня обучение геометрии, нельзя не видеть, что по глубине владения предметом современным школьникам далеко до указанного автором уровня.

Неудивительно, что И. Я. Депман считал, что “«Педагогический сборник», несомненно, самый солидный из всех чисто методических журналов по математике до революции” [1, с.12].

Значительное место занимали в журнале рецензии на учебную, методическую и научную литературу. Часть рецензий публиковалась от имени редакции, но многие отзывы были авторскими. В последние десятилетия издания журнала особенно активными рецензентами были В. Шидловский, С. Бернштейн и М. Попруженко. Приведём названия некоторых книг, рецензии на которые были помещены в журнале.

Киселёв А. П. Элементарная алгебра, 1888. Две части (рец. М. Попруженко, 1889, № IV).

Рыбкин Н. А. Учебник прямолинейной тригонометрии для средних учебных заведений М., 1896 (рец. В. Шидловского, 1897, №III).

Шохор-Троцкий С. И. Методика арифметики. Ч. II. 1900 (рец. В. Шидловского, 1900, №VI).

Вебер Г. Энциклопедия элементарной математики. Т.1. Алгебра и анализ (рец. С. Бернштейна, 1908, №XI).

Марков А. А. Исчисление конечных разностей. 1910, изд. 2 (рец. С. Бернштейна, 1911, №X).

Извольский Н. Геометрия на плоскости. М., 1911 (рец. С. Бернштейна, 1912, №I).

Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть I. Одесса, 1913 (рец. М. Попруженко, 1914, №II).

В начале XX века в реальных училищах были введены элементы аналитической геометрии и анализа бесконечно малых. А в кадетских корпусах эти разделы стали преподаваться ещё раньше.

В ближайшие годы после введения названных вопросов в среднюю школу в стране появился ряд учебных руководств для обучения им.

Ниже приводится рецензия С. Н. Бернштейна на учебник Д. М. Синцова «Краткий курс аналитической геометрии на плоскости, предназначенный для седьмого класса реальных училищ». Учебник вышел из печати в 1916г., а рецензия на него появилась в «Педагогическом сборнике» в 1917г., №XII.

«Предлагаемая книга составлена сообразно с программой 7-го класса реальных училищ. Отличительной чертой учебника является сжатость и научность изложения; большинство вопросов рассмотрены достаточно полно и ясно. Как для учителя, так и для ученика учебник является надёжным и полезным пособием. Можно пожалеть, что автор не посвятил больше времени рассмотрению задач на геометрические места, т.к. этот отдел, хотя и не занимает много места в казённых программах, является чрезвычайно важным для усвоения принципов аналитической геометрии.

Книжка может служить также введением для изучения полных университетских курсов аналитической геометрии, иногда недостаточно доступных для среднего студента» [4, с.664].

Выше приведены названия лишь некоторых публикаций, отражающих далеко не весь спектр проблем преподавания математики, обсуждавшихся на страницах журнала. Но даже этого достаточно, чтобы понять, сколь полезным и нужным был «Педагогический сборник». А ведь здесь помещены статьи, посвящённые преподаванию всех учебных предметов. Организации военного (и не только) образования и вопросам воспитательной работы также отводилось немало места в «Педагогическом сборнике».

В 1914г. в журнале «Математическое образование» вышла статья, посвящённая 50-летию журнала. В этой статье отмечалось: «Заслуги журнала громадны не только для военно-учебных заведений, но и для всего педагогического мира России, ибо за указанный период в журнале было помещено немало как отдельных статей, так и целых сочинений, которые представляли, а частью представляют и теперь весьма ценный вклад в русскую педагогическую литературу…

Для преподавателей математики этот журнал особенно дорог, ибо «Педагогический сборник» является **единственным** из общих педагогических журналов, который отводил и отводит место статьям по разным отделам математики и её преподавания, и за 50 лет много содействовал усовершенствованию математического образования главным образом в нашей средней школе…» [5, с.394-395].

Библиографический список

1. *Депман, И. Я.* Русские математические журналы для учителя [Текст] / И. Я. Депман / Математика в школе, 1951, №6, С.9-23.
2. Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части Педагогического сборника за пятьдесят лет (1864-1914) / Сост. С. А. Переселенков, Пг., 1915.
3. *Ермаков, В. П.* О преподавании геометрии [Текст] / В. П. Ермаков / Педагогический сборник. 1895, № X, С.327-336.
4. *Бернштейн, С.* Рецензия на учебник Д. М. Синцова «Краткий курс аналитической геометрии на плоскости, предназначенный для седьмого класса реальных училищ» [Текст] / С. Бернштейн / Изд. И. Д. Сытина, 1916 // Педагогический сборник, 1917, №XII, с.664.
5. 50-летний юбилей «Педагогического сборника» // Математическое образование, 1914, №8, С.394-395.

Вопросы арифметики в трудах Второго Всероссийского съезда преподавателей математики 1914 года

С.В. Жаров

Через два года после проведения Первого Всероссийского Съезда преподавателей математики в Москве состоялся Второй Съезд преподавателей с 27 декабря 1913 года (9.01.1914г. по н.ст.) по 3 января 1914 года (16.01.1914г. по н.ст.) и его открытие проходило в Большой аудитории Московских Высших Женских Курсов, где сейчас располагается Главное здание Московского педагогического университета [3].

«Съезд имел своей целью:

1) обсуждение научных вопросов, имеющих отношение к элементарной математике;

2) рассмотрение современной постановки преподавания математики в учебных заведениях различных типов, преимущественно в средних;

3) обсуждение вопросов о желательной постановке преподавания математических наук;

4) обсуждение вопросов и методах и приемах преподавания математики и соприкасающихся с нею наук и о способах проверки знаний учащихся;

5) обсуждение вопроса о подготовлении преподавателей математики»[1].

В приветственной речи Председателя Организационного Комитета профессора Б.К.Млодзеевского было отмечено, что ошибочно думать, будто геометрия, алгебра и анализ уже исторически полностью сформированы и ничего нового не делается. Множество новых математических открытий было сделано и наука не стоит на месте, поэтому выдвинут вопрос о введении в среднюю школу вопросов, обыкновенно изучаемых в высшей школе [2]. За последние 100 лет это не потеряло актуальность и многие разделы вузовской математики перешли в среднюю школу. Правда такие разделы, как арифметика, весьма пострадали от таких новшеств и сейчас уже в начальной школе вводятся уравнения и неравенства, а классическая арифметика перешла в раздел алгебры.

Представляет интерес доклад профессора А.К.Власова «Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования». В официальных объяснительных записках учебных программ отмечено, что главная задача средней школы – дать общее научное образование. Отсюда можно определить цель преподавания – это развитие строго логического мышления. Часто применяют понятие общего образования в средней школе, но на самом деле его нельзя полноценно получить, а только самое общее представление, т.е. основной фундамент для будущего более широкого кругозора. Простыми сведениями нельзя развить общий кругозор, поэтому «задачу средней школы можно определить так – дать образование, возбуждающее работу мысли и интерес к знанию в различных областях наук, результаты которых сделались общим достоянием» [2]. По сути дела такие же задачи ставит и современное преподавание математики уже с начальных классов, что конкретно отражено в новых стандартах начального образования.

Рассмотрим некоторые моменты доклада Н.Г.Панкова «Измерительный метод при начальном курсе арифметики», которое было посвящено актуальной проблеме преподавания математики – измерительному методу в арифметике. Основное внимание уделялось понятию величины, равенства величин на основе их измерений, при этом выделены такие величины как длина, площадь, объем, масса. Ученики могут раскладывать различные вырезанные геометрические фигуры для их сравнения. Задачи, основанные на измерении плоских и объемных фигур, а также на взвешивании, всегда необходимы на первых ступенях изучения чисел, их жизненность, которая возможна при лабораторном изучении чисел, близка для детского понимания. Этот метод можно также использовать при отработке устного счета в начальной школе.

Еще один интересный вопрос был затронут в докладе В.Н.Рутковского «О письменных арифметических работах». В систематическом курсе арифметики проводятся работы практического и теоретического характера. Не вызывает сомнений, что первый тип контроля имеет большее значение, так как развивает логическое мышление, а также развивает письменную речь, они чаще даются уже из пройденного курса арифметики. Теоретические работы можно сравнить с трактатами по географии или истории, где проверяется память ученика – чем лучше память, тем лучше сочинение. Это своего рода математическое сочинение, которое развивает как устную, так и письменную математическую грамотность. Вторые виды работ чаще даются на дом для проверки теоретических знаний и умения решать задачи на соответствующий изученный раздел. Учащиеся выполняют задание по определенному плану: формулировка условия, анализ задачи с разложением на более простые, составление плана и самого решения с последующим ответом.

Отдельным разделом преподавания арифметики можно выделить целое направление математического образования в связи с докладом профессора Н.А.Извольского «Комбинационной работа, как основа для преподавания математики». Это особая метода в работе с арифметическим и геометрическим материалом, когда числа и геометрические фигуры выступают в комплексе с другими числами и фигурами, образуя комбинацию интереснейших фактов. Сначала ряд чисел или некоторая комбинация позволяют увидеть некоторую закономерность, а в дальнейшем можно сформулировать определенное правило. Со ссылкой на мемуар Анри Пуанкаре «Наука и метод» Н.А.Извольский ставит цель обучения арифметике, выразив ее следующими словами: «при обучении арифметике, даже ее началам, следует обратить внимание на развитие способности к комбинационной работе». «И возникает желание поставить дело обучения математики так, чтобы с самых ранних шагов приучать учащихся к комбинационной работе, развивать стремление подмечать аналогию у ряда осуществленных комбинаций, приближать учащихся к взгляду, что содержание изучаемого отдела явилось результатом именно такой комбинационной работы и результатом стремления открывать аналогии в ряде осуществленных комбинаций» [2].

В последнее время большое значение уделяется наглядности в обучении математике, в частности арифметике, в начальных классах. В этой связи отметим доклад Д.Волковского «Значение картинок для первоначального обучения арифметике». Ссылаясь на опыт известных педагогов, рекомендуется *не увлекаться* картинками, ибо «наглядность может стать не двигающей истинное учение вперед, а только тормозящей» [2]. Картинки являются одним из *средств* наглядности и должны помогать в освоении нового материала. Главным наглядным пособием должны быть *вещественные, осязаемые* предметы, а не простое указывание на них в учебных пособиях. «Одна из важных и основных задач школы – научить детей сосредоточить свое внимание на известном предмете. А потому учитель путем надлежащих вопросов может направить мысль ребенка на *числовые соотношения* предметов» [2]. Не стоит ли провести параллель с активным внедрением аудиовизуальных средств в преподавание математики современной начальной школы, когда не все дети могут одинаково быстро реагировать на экранную информацию?

Еще одним интересным сообщением был доклад В.В.Петрова «Практические работы по математике в средней школе» [2].. В первую очередь были отмечены такие работы по арифметике, которые касаются измерений длины, площади, объема, а также склеивание различным пространственных фигур – кубов и параллелепипедов, взвешивание сыпучих и жидких тел, изучение географических карт и построение планов домов и участков. Практические работы позволяют сформировать пространственное представление о различных объектах, но надо отметить, что большинство работ выполняется во внеурочное время, а общее руководство осуществляется учителем непосредственно на уроках. Особо следует отметить достаточно трудный для современных учеников вопрос построения графиков и анализ их расположения в системе координат.

Со времени проведения Второго Всероссийского съезда преподавателей математики прошло 100 лет, однако поставленные задачи и проблемы математического образования средней школы являются актуальными в настоящее время и могут заинтересовать многих преподавателей средней и высшей школы.

Библиографический список

1. Дневники Второго Всероссийского Съезда преподавателей математики [Текст] - Москва, 15 декабря 1913.
2. Доклады, читанные на 2-ом Всероссийском Съезде преподавателей математики [Текст]- Москва,1915.- 320с.

3. *Одинец, В.П.* Зарисовки по истории математического образования России со второй половины XVIII века до 1917 года [Текст] / В.П. Одинец /: уч.пособие.- Сыктывкар: Коми пединститут, 2011.-51с.

Вольфганг (Винсент) Дёблин (1915–1940)

Г.А. Зверкина

Начиная с осени 1999 г. в рамках деасбестизации помещений университета Paris-VII им. Дидро были предприняты работы по открытию и перемещению части хранящихся там архивов в помещения Сорбонны для классификации имеющихся материалов; всего было изучено примерно 37,5 погонных метров полок архивного хранения. В том числе был изучен архив Мориса Фреше (Maurice Fréchet, 1878–1973), содержащий документы начиная с 1909 г.. В этом архиве находились также материалы ученика Фреше В. Дёблина (1915–1940), погибшего на фронте. Возможно, эти материалы были помещены в архив самим Фреше или его сотрудницей М.-А. Тоннела (Marie-Antoinette Tonnelat, 1912–1980), поддерживавшей дружеские отношения с В. Дёблином.

Первоначально архив Фреше находился в Институте Пуанкаре, но позднее был перемещён в университет Paris-VII; возможно, некоторые материалы были переданы В. Дёблином своей коллеге Тоннела во время его последнего увольнения с фронта в марте 1940 г.. В архиве Фреше сохранились рукописи и черновики некоторых изданных и неизданных работ В. Дёблина, подробное описание которых можно найти в [3].

Кроме того, было обнаружено запечатанное почтовое отправление с фронта, содержащее статью “Sur l’équation de Kolmogoroff” (“Об уравнении Колмогорова”) В. Дёблина. В школьных тетрадях, купленных, по-видимому, недалеко от расположения воинской части, были изложены революционные для того времени идеи о методах решения задач, связанных со случайными процессами, описывающими броуновское движение.

Эта статья была изучена французским историком теории вероятностей Б. Брю (Bernard Bru) и специалистом по теории вероятностей М. Йором (Marc Yor). Ими было обнаружено, что в своей написанной на фронте работе В. Дёблин предвосхитил работы 1944 г. К. Ито (Kiyoshi Itô, 1915–2008), заложившие основы теории стохастических дифференциальных уравнений, и ставшие широко известными только во второй половине XX-го века.

Биографические данные.

Родители В. Дёблина – Альфред В. Дёблин (Alfred Döblin, 1878–1957) и Эрна Рейсс (Erna Reiss) имели четырёх сыновей: Петер (1913), Вольфганг (1915), Клаус (1917), Стефан (1928). Несмотря на иудейское происхождение родителей, все дети были зарегистрированы как протестанты.

А. В. Дёблин был доктор медицины (невролог) и известный немецкий писатель, придерживавшийся левых взглядов.

Вольфганг был очень способен к математике, и он планировал по окончании среднего образования изучать статистику с целью получения степени доктора политэкономии. Поэтому параллельно с обучением в гимназии он посещал занятия в Берлинской Школе Политологии (Schülerkurse der Deutschen Hochschule für Politik), но был отчислен в 1932 г. за “социалистическую пропаганду и радикальный антинацизм”. В 1933 г. после поджога Рейхстага семья бежала в Цюрих; в Берлине остался лишь Вольфганг для окончания обучения в гимназии. В апреле 1933 г., получив диплом бакалавра, Вольфганг воссоединился с семьёй в Цюрихе, и затем (в сентябре 1933г.) семья перебралась в Париж.

С 1933 г. Вольфганг начал обучаться в Сорбонне, он очень сильно увлёкся математикой и теорией вероятностей, и основным местом его работы стала библиотека Института Пуанкаре (Institut Henri Poincaré).

В октябре 1935 г. Вольфганг В. Дёблин (Wolfgang Döblin) принял французское гражданство, приняв имя Vincent Doblin. Однако к этому времени он уже был членом Французского Математического общества под именем W.Doeblin, к печати были приняты некоторые его публикации, и поэтому в дальнейшем он подписывал свои научные работы и письма к коллегам-математикам именем W. Doeblin или (реже) W. Doblin.

26 марта 1938 г. В. Дёблин защитил диссертацию в Сорбонне и стал доктором математических наук.

3 ноября 1938 г. В. Дёблин был призван во французскую армию.

2 сентября 1939 г. началась Вторая мировая война, и В. Дёблин оказался мобилизованным в действующую армию.

14 февраля 1940 г. отец В. Дёблина Альфред сообщал своему сыну Петеру, живущему в США, о том, что "Вольфганг находится в хорошем настроении, и при случае даже посылает математические исследования".

Во время ночных дежурств и в свободное от воинских обязанностей время связист В. Дёблин продолжал работать над задачами, которые он ранее обсуждал в Париже со своими коллегами. В марте он сообщил М. Фреше, что месяц назад он начисто переписал свою рукопись об уравнении Колмогорова, черновой вариант он отправил домой, а окончательный текст направил отдельным письмом в Академию Наук. Вероятно, это почтовое послание с фронта прибыло во Французскую Академию 13 марта 1940 г.

29 апреля 1940 г. Последнее научное исследование В. Дёблина представлено в Академии Наук Эмилем Борелем, но по неизвестной причине не рассмотрено и позднее оказалось в архиве М. Фреше.

20 июня 1940. Воинская часть, в которой служил В. Дёблин, получила приказ сдаться. Франция готовилась к капитуляции, которая произошла через 2 дня, 22 июня 1940 г.

21 июня 1940. Полк В. Дёблина был окружён. Пытаясь уйти из окружения, В. Дёблин покинул расположение части и укрылся в хозяйственной постройке в небольшой деревне Усера (Housseras) в Вогезах. Когда в деревню вошли немецкие солдаты и приблизились к его укрытию, В. Дёблин покончил с собой. Он хорошо представлял себе незавидную участь бежавшего из Германии еврея, воевавшего на стороне Франции.

В. Дёблин был награждён двумя медалями: Военный крест с пальмовой ветвью (La croix de guerre avec palme) и Военной медалью (La medaille militaire). Его тело было опознано через много месяцев после гибели и похоронено на кладбище деревни Усера. В 1957 г. там же был похоронен его отец, завещавший похоронить себя рядом с сыном.

Научная деятельность.

С 1934 г. В. Дёблин много времени проводил в Институте Пуанкаре (Institut Henri-Poincaré), где его учителями были А. Данжуа (Arnaud Denjoy, 1884–1974), Ж. Дармуа (Georges Darmois, 1888–1960) и М. Фреше, который в дальнейшем руководил подготовкой диссертации. В годы обучения одним из наставников В. Дёблина был выдающийся математик П. Леви (Paul Lévy, 1866–1971), также В. Дёблин сотрудничал с Р. Форте (Robert Fortet, 1912–1998), Ж. Виллем (Jean Ville, 1912–1989) и М. Лоэвом (Michel Loève, 1907–1979).

В. Дёблин принимал активное участие в семинарах Э. Бореля (Émile Borel, 1871–1956) в Институте Пуанкаре и Ж. Адамара (Jacques Hadamard, 1865–1963) в Collège de France. С 1935 г. он активно участвовал в жизни Французского математического общества (SMF) и неоднократно выступал с докладами на заседаниях; резюме этих докладов публиковались в бюллетене "Vie de la société. Bulletin de la Société Mathématique de France". Также в это время началась совместная работа в Богуславом Хостинским (Bohuslav Hostinský, 1884–1951), контакты с которым прервались лишь после оккупации фашистами Чехословакии. Сохранилась часть переписки В. Дёблина и Хостинского, где, в частности, обсуждаются вопросы, связанные с уравнением Колмогорова-Чэпмена.

Как известно, в начале XX-го в. многие выдающиеся математики занимались вопросами обоснования математического знания. В частности, в 1933 г. А. Н. Колмогоров издал книгу “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.” (“Основные понятия теории вероятностей”), где систематически изложил уже сформировавшийся в математическом сообществе подход к изложению теории вероятностей на основе теории меры[30]. Эта работа, как и публикации других представителей советской теоретико-вероятностной школы, активно изучалась зарубежными учёными. Но значительная часть этих работ издавалась в Европе на немецком языке. По просьбе своих старших коллег В. Дёблин переводил работы А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина и других советских математиков на французский язык; некоторые из этих переводов сохранились в рукописях. В. Дёблин хорошо знал работы С. Н. Бернштейна и Н. Н. Боголюбова и др. и ссылался на них в своих работах.

Математиков того времени интересовали вопросы приложений теории вероятностей и других областей математики к самым разным областям знания. В частности, В. Дёблин заинтересовался вопросами построения математической теории процессов диффузии, которая развивалась в это время физиками и отчасти в математической биологии.

Начало исследовательской деятельности В. Дёблина связано с общей теорией цепей Маркова и предельными теоремами для сумм независимых случайных величин. Это направление в теории вероятностей было в те годы очень популярным.

Практически одновременно с Б. В. Гнеденко в 1939 г. В. Дёблин нашёл область притяжения устойчивых распределений.

Исследуя марковские цепи, В. Дёблин независимо от Колмогорова классифицировал марковские цепи с конечным числом состояний (Колмогоров сделал это для цепей со счётным множеством состояний). В. Дёблин нашёл условия, при которых скорость сходимости марковской цепи к стационарному состоянию экспоненциальна; в более общем виде это условие сейчас называется условием В. Дёблина-Дуба.

Также для оценки скорости сходимости марковской цепи В. Дёблин впервые применил метод склейки или спаривания (couplage) двух марковских цепей; изданная в периферийном издании статья [5], где применялся этот метод, долгое время оставалась незамеченной. Но в последней трети XX-го в. метод склейки (или каплинг-метод) стал активно использоваться при исследовании асимптотического поведения как марковских цепей, так и марковских процессов с непрерывным временем – см., например, [8].

Многие результаты, полученные В. Дёблином как лично, так и в совместно с П.Леви и Р.Форте, получили своё развитие в работах математиков многих стран.

Работы В. Дёблина, его короткая, но чрезвычайно насыщенная научная жизнь не были забыты его коллегами и последователями. Во Франции неоднократно выходили публикации об этом замечательном учёном (см. [7], [9]); П. Леви ставил В. Дёблина в один ряд с Э. Галуа (Évariste Galois, 1811–1832) и Н. Х. Абелем (Niels Henrik Abel, 1802–1829), сборник статей посвятило его наследию Американское математическое общество – [4]. Тогда ещё не была известна затерявшаяся в подвалах здания университета Paris-VII последняя работа В. Дёблина...

В 2000 г. последняя работа В. Дёблина была издана в специальном выпуске “Comptes Rendus de l’Académie des sciences” с приложением обширного комментария – [6], [2].

В этой неизвестной до 1999 г. статье В. Дёблин, по-видимому, впервые предложил потраекторный подход к изучению поведения непрерывных случайных марковских процессов. До этого времени (и в течение нескольких последующих лет) изучение случайных процессов опиралось на идеологию Колмогорова, когда случайный процесс рассматривался как зависящая от времени случайная величина. То есть рассматривались не некие случайные траектории перемещения, например, частицы под воздействием множества

[30] Подробнее об этом периоде развития математики можно узнать в [15] и [16]

случайных воздействий, а зависящая от времени мера, т.е. распределение вероятности случайной величины, которая соответствует (случайному) положению частицы в некоторый момент времени.

В своей последней работе В. Дёблин для исследования броуновского движения[31] (и связанного с ним процесса диффузии) и соответствующих уравнений применяет мартингалы[32]; также он использует свойства мартингалов, которые позднее были сформулированы как теоремы Дамбиса-Дубинса-Шварца (K. È. Dambis, 1965; L. E Dubins & G. Schwarz, 1965), а также Ямады и Ямады-Огуры (T. Yamada, 1973; T. Yamada & Y. Ogura, 1981).

В. Дёблин впервые записал стохастическое дифференциальное уравнение (в смысле Ито)[33].

Замечательно то, что форма записи стохастического дифференциального уравнения у В. Дёблина и у К. Ито практически идентична:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t a(s, X_s)\mathrm{d}s \quad - \quad \textit{Ито};$$

$$X_t = X_0 + \beta_{\left(\int_0^t \sigma^2(s, X_s)\mathrm{d}s\right)} + \int_0^t a(s, X_s)\mathrm{d}s \quad - \quad \textit{В.Дёблин};$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\mathrm{d}w_s + \int_0^t a(s, X_s)\mathrm{d}s \quad - \quad \textit{современная форма записи.}$$

Ито и В. Дёблин буквой B или β обозначали стохастический интеграл (говоря *очень упрощённо*, это интеграл вдоль траектории броуновского движения). Ныне броуновское движение в теории вероятностей носит название “винеровский процесс”, и, соответственно, в обозначение стохастического интеграла входит буква w.

Понятно, что при решении дифференциальных уравнений часто приходится делать замену переменной; в стохастическом дифференциальном уравнении формула замены переменной долгое время носила название “формула Ито”[34], однако теперь, после публикации последней работы В. Дёблина, эта формула всё чаще называется формулой Ито-В. Дёблина. Интересно, что независимо от Ито в несколько менее общих условиях эта же формула была выведена советским математиком И. В. Гирсановым (1934–1967) в [13][35].

Обнаружение и издание последней работы В. Дёблина привели к появлению большого количества исследований и публикаций о жизни и творчестве этого яркого учёного, успевшего так много сделать за свою недолгую жизнь (см., например, [1], [10], [11]). О жизни и достижениях В. Дёблина были сняты документальные фильмы, в которых его наследие было прокомментировано современными учёными.

Автор выражает глубокую благодарность Е. А. Асарину за помощь в работе над статьёй и А. Ю. Веретенникову, обратившему внимание автора на героя этой публикации.

---

[31] В современной теории случайных процессов броуновскому движению соответствует винеровский процесс, названный так в честь Н. Винера (Norbert Wiener, 1894–1964).

[32] Мартингалы – это специальный класс случайных процессов, чрезвычайно эффективный при исследовании поведения марковских процессов. Изучение и использование такого сорта процессов только начиналось в предвоенные годы; само название “мартингал” впервые появилось в публикации 1939-го года Ж. Вилля.

[33] К стохастическим дифференциальным уравнениям относят также обыкновенные дифференциальные уравнения, имеющие случайные параметры (иногда зависящие от времени) – решения таких уравнений также очень важны в практических приложениях, однако эти уравнения никак не связаны с диффузионными процессами и броуновским движением – см., например, [17].

[34] За свои работы в области случайных процессов Ито в 2006 г. получил премию Гаусса.

[35] Ситуация, когда тремя математиками разных стран *независимо* были получены практически эквивалентные результаты на протяжении довольно небольшого временн$\hat{1}'$ го периода, не кажется автору странной. Это вполне укладывается в неоднократно высказывавшуюся мысль, что именно практика является основой развития математики. Решение уже поставленных перед математиками прикладных задач и поиск способов формализации, математизации и последующего решения задач других областей знания, связанных как с развитием наук вообще, так и с развитием технологий, неизбежно влечёт создание новых математических понятий, теорий и методов – подробнее см. [14]

Библиографический список

1. *Bru, B. Yor, M.*, La vie de Wolfgang Doeblin, Lettre de l'Académie des sciences [текст] / B. Bru, M.Yor / no. 2, 2001, P.15-17.
2. *Bru, B.*, Notes de lecture du pli cacheté [текст] / B. Bru / C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 1103–1128, 2000
3. *Charmasson, T., Méchine, S., Petit, M.*, Archives et manuscrits de Wolfgang Doeblin [текст] / T. Charmasson, S.Méchine, M. Petit / Wolfgang Doeblin 's archives and manuscripts // Revue d'histoire des sciences, 2005, V.58, PP. 225-236.
4. *Cohn, H. (editor)*, Doeblin and modern probability [текст] / H.Cohn / AMS, Providence, 1993.
5. *Doeblin, W.*, Exposé de la théorie des chanes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états [текст] / W. Doeblin / Rev.Math.Union Interbalkanique. 2, 77-105 (1938).
6. *Doeblin, W.*, Sur l'équation de Kolmogoroff [текст] / W.Doeblin / Pli cacheté déposé le 26 février 1940, ouvert le 18 mai 2000, Comptes-Rendus a l'Académie des sciences de Paris, série 1, 331, 1031-1187, 2000.
7. *Lévy, P.*, W. Doeblin (1915-1940) [текст] / P. Lévy / Revue Histoire Sci. Appl. Bd. 8, 1955, S.107-115.
8. *Lindvall, T.*, Lectures on the Coupling Method [текст] / T. Lindvall / Wiley, New York, 1992.
9. *Lindvall, T.*, W. Doeblin 1915–1940 [текст] / T. Lindvall / The Annals of Probability, Bd.19, Nr.3, 1991, S. 929–934.
10. *Petit, M.*, Die verlorene Gleichung. Auf der Suche nach Wolfgang und Alfred Döblin ("L'équation de Kolmogoroff") [текст] / M. Petit / Eichborn, Frankfurt / M. 2005.
11. *Petit, M.*, L'équation de Kolmogoroff. Vie et mort de Wolfgang Doeblin, un génie dans la tourmente nazie [текст] / M. Petit / Ramsay, 2003.
12. *Ruszel, W. M.*,: Wolfgang Doeblin - Wegbereiter zum Itô Kalkül [текст] / W. M. Ruszel / Universität Potsdam, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Institut für Mathematik, Diplomarbeit, 2006.
13. *Гирсанов, И. В.*, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры [текст] / И. В. Гирсанов / Теор. вер. и ее прим., т. V, выпуск 3, 1960, С. 285-301.
14. *Зверкина, Г. А.*, О закономерностях развития математики [текст] / Г. А. Зверкина / Труды четвертых колмогоровских чтений. Ярославль, 2006, С. 339-347.
15. *Зверкина, Г. А.*, Теория вероятностей до А.Н. Колмогорова [текст] / Г. А. Зверкина / Труды шестых колмогоровских чтений. Ярославль, 2008, С.483-496
16. *Зверкина, Г. А.*, О реформировании математики в начале XX века в контексте логики развития математического знания [текст] / Г. А. Зверкина / Труды XI международных колмогоровских чтений. Ярославль, 2013, С. 27-45.
17. *Пугачев, В. П., Синицын, И. Н.*, Теория стохастических систем [текст] / В. П. Пугачев, И. Н. Синицын / М.: Логос, 2000.

О доказательстве теоремы Абеля

Н.В. Ингтем

Введение

Доказательство теоремы о неразрешимости в радикалах общих уравнений пятой степени, было представлено Абелем в статье [1] в 1826г. Как известно, одним из основных моментов её доказательства является так называемая «теорема о промежуточных радикалах»: «Если уравнение разрешимо алгебраически, то его корню всегда можно придать такой вид, при котором все входящие в него алгебраические функции могут быть представлены рациональными функциями корней заданного уравнения» ([1], стр. 65). Известно так же, что в своих исследованиях Абель опирается на результаты известного мемуара Лагранжа: «Рассуждения об алгебраическом решении уравнений» [2], (1770г.). Несмотря на то, что этой работе посвящено много публикаций, например: [3], [4], однако, на наш взгляд, ряд важных деталей, освещённых Лагранжем, остаются незамеченными. Это, в частности, вопрос, касающийся размышлений, приведших его к перестановке корней в функции корней заданного уравнения; а также вопрос о том, была ли цитируемая выше, сформулированная Абелем теорема, доказана Лагранжем.

В указанном труде, Лагранж представляет исчерпывающий анализ решения уравнений разрешимых в радикалах.

Об уравнениях третьей степени

В анализ методов решения уравнений третьей степени Лагранж включает методы, изобретённые Гудде, Чирнгаузом, Безу и Эйлером. Остановимся на исследовании метода Гудде. Как известно метод найден для неполного уравнения, записанного в виде:

$$x^3 + nx + p = 0, \tag{1}$$

и заключается в том, что при помощи функции: $x = y + z$, уравнение (1) приводится к квадратному уравнению относительно y^3:

$$y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0, при \quad условии: 3yz = -n \tag{2}$$

метод решения которого, хорошо известен.

К исследованию этого метода Лагранж подходит с двух сторон: С одной стороны — прямой подход — корни x', x'', x''', заданного уравнения, он выражает через y — корни уравнения (2).

$$\begin{gathered} x' = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \quad x'' = \alpha\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \beta\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}, \\ x''' = \beta\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}} + \alpha\sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}. \end{gathered} \tag{3}$$

где 1, α, β — корни уравнения $x^3 - 1 = 0$.

Он замечает, что поскольку y принимает шесть значений, величина x должна принимать столько же. Однако, x может иметь не более трёх различных значений. Исходя из этого наблюдения, Лагранж предполагает, что каждый корень уравнения (1) должен быть кратности два. Это предположение подтверждает проверка: заданное уравнение возвысилось в квадрат.

Прямой подход исследования приводит его к выводу: для получения корней заданного уравнения достаточно трёх значений $y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{q}}$, или $y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{q}}$, так как независимо от знака $\sqrt{q}$ в выражении y, три корня заданного уравнения всегда будут иметь одинаковые значения, что следует также и из представления корней (3).

С другой стороны Лагранж исследует, как корни упрощающего уравнения зависят от корней x', x'', x''' заданного. Это — обратный подход. Для большей общности Лагранж исходит из общего уравнения 3-й степени:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0, \quad корни\ которого, обозначает\ a, b, c. \tag{4}$$

$$y^6 + p'y^3 - \frac{n'^3}{27} = 0, -\text{его упрощающее уравнение} \qquad (5)$$

При этом автор подчёркивает, что коэффициенты n', p' являются рациональными функциями коэффициентов m, n, p заданного уравнения: $n' = n - \frac{m^2}{3}$, $p' = p - \frac{mn}{3} + \frac{2m^3}{27}$.

Опираясь на установленное в прямом подходе свойство, он выбирает три корня уравнения (5): $y = r$, $y = \alpha r$ и $y = \beta r$ и, полагая, что $r = \sqrt[3]{-\frac{p'}{2} + \sqrt{\frac{p'}{4} + \frac{n'^3}{27}}}$, записывает корни заданного уравнения:

$$a = -\frac{m}{3} + r - s, \quad b = -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}, \quad c = -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}, \quad \text{где} \quad s = \frac{n'}{3r} \qquad (6)$$

через которые выражает корень упрощающего уравнения:

$$y = r = \frac{a + \beta b + \alpha c}{3}, \qquad (7)$$

Заметим, что для исследования, Лагранж использует другое выражение, заменяет α на β, считая это допустимым, однако перестановка местами коэффициентов α и β, вызывает перестановку букв b и c, что, вызовет переход от r к s ([2], стр. 219). Такое несоответствие, тем неменее, не вызывает грубой ошибки (см. формулы (9), (10). Такое представление корня позволяет ему получить ответы на следующие вопросы:

1) Почему степень упрощающего уравнения непременно будет шестой;

2) Почему упрощающее уравнение решается по принципу квадратного уравнения.

Ответ на первый вопрос состоит в том, что т.к. коэффициенты упрощающего уравнения зависят от коэффициентов m, n, p заданного уравнения, являющихся симметрическими функциями корней a, b, c а не от самих этих корней непосредственно, то в выражении y корни a, b, c также могут располагаться произвольным образом, поэтому различных значений y будет столько, сколько их можно получить от всевозможных перестановок, допускаемых корнями a, b, c, т.е. должно равняться шести, ([2], стр. 216).

Представленный фрагмент исследований показывает, что Лагранж неслучайно решает переставлять корни в выражении y. Такой приём продиктован глубоким анализом свойств коэффициентов и корней заданного и упрощающего уравнений. Наблюдение, что коэффициенты уравнений, как симметрические функции корней, сохраняют своё значение, при любом расположении в них корней, на наш взгляд, подтолкнуло Лагранжа выразить корни упрощающего уравнения через корни заданного. Такое представление показало, что величина y, как алгебраическая функция коэффициентов уравнения (2) наследует расположение корней в коэффициентах, однако, как следует из (7) всякое изменение их расположения вызывает изменение её значения. Чтобы описать все значения y, Лагранж использует перестановки корней, и, по сути, устанавливает, что порядок симметрической группы подстановок 3-й степени равен $3! = 6$.

Ответ на второй вопрос Лагранж считает очевидным: потому, что уравнение (5) содержит только те степени y, показатели которых кратны 3, что вызвано неоднозначностью кубического радикала, из которой вытекает, что если r — одно из значений y, то в силу того, что $\alpha^3 = \beta^3 = 1$, αr и βr также его значения. В тоже время он приводит доказательство этого предложения. Суть доказательства состоит в том, чтобы построить упрощающее уравнение по его корням, выраженным рациональными функциями корней заданного уравнения, и проверить совпадает ли оно с уравнением (5), полученным прямым методом.

В приведённом ниже порядке, Лагранж выписывает все значения корней упрощающего уравнения, полученные от всевозможных перестановок выражений a, b, c ([2], стр. 216), принимая во внимание, что $\beta = \alpha^2$:

$$\begin{array}{lll} 1)(a+\alpha b+\alpha^2 c)/3 & 2)(a+\alpha c+\alpha^2 b)/3 & 3)(b+\alpha a+\alpha^2 c)/3 \\ 4)(b+\alpha c+\alpha^2 a)/3 & 5)(c+\alpha b+\alpha^2 a)/3 & 6)(c+\alpha a+\alpha^2 b)/3 \end{array} \qquad (8)$$

Анализируя эти выражения, он замечает следующее свойство: 1), умноженное на α, перейдет в 6), – умноженное на α^2 перейдёт в 4); 2), умноженное на α, перейдет в 3), – умноженное на α^2 перейдёт в 5), и т.д. Такое поведение корней подтверждает высказанное предположение: если r или s — один из корней упрощающего уравнения,

где $\quad r = a+\alpha b+\alpha^2 c,\quad$ Лагранж опускает знаменатель 3 (9)

а $\quad s = a+\alpha c+\alpha^2 b,$ (10)

то αr, $\alpha^2 r$, соответственно αs, $\alpha^2 s$, так же будут корнями этого уравнения.

Имея корни, он строит уравнение, что называет прямым способом построения упрощающего уравнения.

Так как $\prod_{i=0}^{2}(y-\alpha^i r) = y^3 - r^3$; $\prod_{i=0}^{2}(y-\alpha^i s) = y^3 - s^3$, то

$$(y^3 - r^3)\cdot(y^3 - s^3) = y^6 - (r^3+s^3)y^3 + r^3 s^3 = 0 \qquad (11)$$

есть искомое уравнение, записанное в терминах корней упрощающего уравнения.

$$r^3 = a^3+b^3+c^3+6abc+3\alpha(a^2b+b^2c+c^2a)+3\alpha^2(ab^2+bc^2+ca^2),$$

$$s^3 = a^3+b^3+c^3+6abc+3\alpha(a^2b+b^2c+c^2a)+3\alpha^2(c^2a+b^2c+a^2b),$$

Вводя, для упрощения записи коэффициентов, следующие обозначения:

$$r^3 = L+3\alpha M+3\alpha^2 N,\qquad s^3 = L+3\alpha N+3\alpha^2 M, \qquad (12)$$

где $L = a^3+b^3+c^3+6abc$, $M = a^2b+b^2c+c^2a$, $N = a^2c+b^2a+c^2b$. Лагранж приводит уравнение (11) к виду:

$$y^6 + (2L-3(M+N))y^3 + L[L-3(M+N)] + 9[(M+N)^2 - 3MN] = 0, \qquad (13)$$

анализ коэффициентов которого, приводит его к следующим заключениям (А) и Б)):

А) Величины L, $M+N$, MN должны задаваться коэффициентами m, n, p заданного уравнения, причём без применения к ним операции извлечения корней ([2], стр. 220), т.к. эти величины не должны изменяться, ни при какой перестановке корней a, b, c, т.е., они могут иметь только одно значение. Действительно, подсчитывая коэффициенты:

$L = -m^3+3mn-9p$, $\quad M+N = 3p-mn$, $\quad MN = n^3+p(m^3-6mn)+9p^2$ и подставляя их в (13), он показывает, что упрощающее уравнение запишется в терминах коэффициентов заданного уравнения:

$$y^6 + (2m^3-9mn+27p)y^3 + (m^2-3n)^3 = 0, \qquad (14)$$

Как видим это уравнение, с точностью до числового множителя (учитывая замечание, сопровождающее (9)), совпадает с уравнением (5), полученным по методу Гудде, что доказывает верность рассуждений Лагранжа относительно представления корня упрощающего уравнения.

В свете представленного доказательства можно сформулировать следующую теорему: Общее уравнение третьей степени всегда приводится к упрощающему уравнению 6-й степени, с коэффициентами, являющимися рациональными функциями коэффициентов заданного уравнения, которое решается по методу квадратного, причём его корнями будут рациональные функции корней заданного уравнения.

Об уравнениях 4-й степени

В анализ решения уравнений 4-й степени Лагранж включает методы Феррари, Декарта, Чирнгауза, Безу и Эйлера. Для решения поставленной задачи нам будет достаточно ограничиться исследованием анализа метода Феррари. Необходимо заметить, что в то время как метод Феррари найден для неполного уравнения 4-й степени, Лагранж, применяет его к полным уравнениям:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0. \tag{15}$$

Используя идею Феррари, он приводит заданное уравнение к следующему виду:

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y\right)^2 = \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right)x^2 + (my - p)x + y^2 - q. \tag{16}$$

которое, при выполнении условия:

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 + \frac{mp - q}{4}y + \frac{(4n - m^2)q - p^2}{8} = 0 - \text{упрощающее уравнение} \tag{18}$$

запишется в виде полных квадратов в обеих частях:

$$\left(x^2 + \frac{mx}{2} + y\right)^2 = \left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right)\left(x + \frac{my - p}{2\left(2y + \frac{m^2}{4} - n\right)}\right)^2. \tag{19}$$

Лагранж находит решение этого уравнения ([2], стр. 258):

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{m}{2} + \sqrt{2y + \frac{m^2}{4} - n} + \sqrt{-2y + \frac{m^2}{2} - n - \frac{\frac{1}{4}m^3 - mn + 2p}{\sqrt{2y + \frac{m^2}{4} - n}}}\right), \tag{20}$$

о котором замечает, что, в силу неоднозначности входящих в него радикалов, оно, очевидно, будет иметь четыре значения, которые и будут корнями заданного уравнения.

В тоже время, Лагранж отмечает, что т.к. y, являясь корнем уравнения (18) 3–й степени, имеет три значения, то, от подстановки каждого из них в решение (20), x приобретёт двенадцать значений, т.е. станет корнем уравнения 12-й степени[36]. Чтобы прояснить возникшее несоответствие, Лагранж ставит задачу найти это уравнение. Последнее, как мы увидим, позволит понять, что какое бы значение корня упрощающего уравнения не было выбрано, корни x, заданного уравнения всегда будут одними и теми же. Лагранж представляет строгое доказательство этого факта, причём подходит к вопросу с двух позиций, одна из которых, основана на принципе, при котором в ходе решения поставленной автором задачи исчерпывается вопрос о доказательстве теоремы, впоследствии сформулированной Абелем.

Это доказательство основано на применении обратного метода исследования.Чтобы воспользоваться им, нужно прежде найти для y удачную функцию корней заданного уравнения, для чего автор, воспользовавшись формулой разности квадратов, записывает уравнение (19) в виде:

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} + z\right)x + y + \frac{my - p}{2z} = 0, \tag{21}$$

[36] хотя в действительности, как известно, x должен быть корнем уравнения 24-й степени.

$$x^2+\left(\frac{m}{2}-z\right)x+y-\frac{my-p}{2z}=0, \quad где \quad z=\sqrt{2y+\frac{m^2}{4}-n}, \tag{22}$$

Лагранж подчёркивает, что решение последних двух уравнений непременно приведёт к 4-м корням, полученным выше, два из которых a и b, например, — решения (21), два других c и d — решения (22), считая, что a, b, c, d — корни заданного уравнения. Эти последние уравнения также позволяют ему получить и необходимые для исследования функции корней заданного уравнения. Учитывая соотношения Виета:

$$a+b=\frac{m}{2}-z; \qquad ab=y+\frac{my-p}{2z}; \qquad c+d=-\frac{m}{2}+z; \qquad cd=y-\frac{my-p}{2z},$$

y и z выражаются через корни заданного уравнения (15):

$$z=\frac{c+d-a-b}{2}; \qquad y=\frac{ab+cd}{2}. \tag{23}$$

Анализируя y ([2], стр. 263), Лагранж отмечает, что, претерпев все перестановки букв a, b, c, d, это выражение будет принимать только три значения (заметим, используя при этом современную терминологию, что инвариантная подгруппа не указана):

$$y=\frac{ab+cd}{2}, \qquad y=\frac{ac+bd}{2}, \qquad y=\frac{ad+cb}{2},$$

из чего он заключает, что эти значения, по сути, корни уравнения 3-й степени, которое должно иметь вид:

$$u^3-Au^2+Bu-C=0. \tag{24}$$

и показывает, что уравнение (24) полностью совпадёт с уравнением (18) с точностью до числовых коэффициентов

$$u^3-nu^2+(mp-4q)u-(m^2-4n)q-p^2=0. \tag{25}$$

Дальнейший ход доказательства схематически можно описать так: Лагранж строит цепочку уравнений, начиная с уравнения (25), корни которого совпадают с корнями упрощающего уравнения, полученного прямым способом и, заканчивая уравнениями, приводящими к корням заданного уравнения, причём каждое последующее уравнение в своих коэффициентах содержит рациональные функции корней предыдущего:

$u^3-nu^2+(mp-4q)u-(m^2-4n)q-p^2=0$, $u=ab+cd$ —его корень;

$t^2+ut+q=0$: $t'=ab$ и $t''=cd$ —корни этого уравнения;

$$x^2-\frac{p-mt'}{t'-t''}x+t'=0, \tag{26}$$

$$x^2-\frac{p-mt''}{t''-t'}x+t''=0, \tag{27}$$

a, b и c, d —корни двух последних уравнений соответственно.

Тем самым для уравнений 4-й степени доказана теорема, которую можно сформулировать следующим образом: Общее уравнение четвёртой степени, с помощью новой переменной, всегда приводится к виду, при котором обе части его становятся полными квадратами и решается по методу квадратного уравнения, причём приведение к полному квадрату порождает уравнение 3-й степени (упрощающее уравнение), коэффициенты которого, являются рациональными функциями коэффициентов заданного уравнения, а корни рациональными функциями корней заданного уравнения. Корни заданного уравнения, с учётом решения упрощающего уравнения, представлены выражением (20).

Библиографический список

1. *Abel, N. H.* Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré [текст] / N. H. Abel / Œuvres complètes de N. H. Abel, par Sylov et Lie T. 1 Imprimerie de Gröndahl & Son, Cristiania 1881.- P. 66–87.
2. *Lagrange, J. L.* Réflexions sur la résolution algébrique des équations [текст] / J. L. Lagrange / Œuvres de Lagrange T. 3 Paris Gauthier-Villars 1869.
3. *Guéridon, J. Diuedonné, J.* L'Algèbre et la géometrie jusqu'en 1840[текст] / J. Guéridon, J. Diuedonné/ J. Diuedonné Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900 Paris Hermann, 1974.- P.71–78.
4. *Bourbaki, N.* Éléments d'histoire des mathématiques [текст] / N. Bourbaki / Paris Collection Histoire de la pensée, Hermann 1969.
5. *Постников, М. М.* Теория Галуа [текст] / М. М.Постников / Москва Факториал Пресс 2003.

Исторический опыт развития школьного математического образования для совершенствования современной школы

Г.В. Кондратьева

Процесс модернизации системы образования, происходящий в настоящее время, требует четкого понимания стратегических направлений развития. Только видение перспектив, а не ситуационное реагирование без четко выделенных долгосрочных приоритетов позволит провести действительно эффективную модернизацию нашей школы. Очевидно, что определить перспективы развития нельзя, руководствуясь только потребностями сегодняшнего дня. Определение стратегических направлений развития актуализирует обращение к историческому опыту.

Считается, что исторический опыт прошлого всегда исключительно ценен: он может помочь избежать ошибок, добиться больших успехов с меньшими затратами при решении схожих задач в настоящем и будущем. Однако нередко это, скорее, декларируется, но не реализуется. Прямое использование исторического опыта, понимаемое как заимствование элементов педагогической практики прошлого (учебников, конкретных приемов), сталкивается с серьезным противоречием между уникальностью переживаемого момента и повторяемостью исторического процесса. Не всегда возможно и оправданно перенесение конкретных носителей педагогической практики прошлого (даже самых удачных) в современные школьные реалии. Тем не менее, без выявления вектора движения, без вскрытия основных тенденций невозможно определять перспективу будущего. Поэтому принципиально важно сверять проводимую модернизацию с опытом прошлого.

В современной отечественной научной литературе использование исторического опыта для совершенствования школьного математического образования ведется в рамках следующих направлений.

1. Собственно методическое 1.1.Использование методического наследия педагогов-математиков для совершенствования современного преподавания математики; 1.2. Изучение истории развития учебно-методической литературы для совершенствования современного учебника; 1.3. Изучения истории методики преподавания отдельных тематических линий школьного курса математики для совершенствования преподавания математики.

2. Профессионально-педагогическое. Использование материалов истории развития математического образования и методики обучения для совершенствования подготовки и повышения квалификации современных педагогических кадров.

3. Социально-образовательное. Использование исторического прошлого ради извлечения уроков для сегодняшнего дня с позиций совершенствования современной школы как важного общественного института, обеспечивающего социализацию личности, ее приобщение к общекультурным ценностям.

Нами предлагается несколько расширить последнее направление, раскрыв его в русле использования исторического опыта как основы для определения перспектив развития теории и практики школьного математического образования как части общего образования.

Естественно, возникает вопрос о выборе временного интервала для построения исторических параллелей. Отечественное математическое образование имеет богатую историю. Педагогическая практика советской школы достаточно хорошо известна: математике уделялось значительное внимание. Особенно показателен период 1930-1950-х гг., который стал «золотым веком» школьной математики: подавляющее большинство школьников показывали в это время весьма высокие результаты. «Временной промежуток, когда в школе действовали на постоянной основе учебники математики А.П.Киселева, оказался периодом стабильности отечественной школы и пошел на пользу стране. Поколение, учившееся в этот период, вышло в жизнь уважающим знания и умевшим их добиваться. Советский народ, получивший разностороннее и глубокое образование, превратил СССР в могучую индустриальную державу, победил в Великой Отечественной войне, запустил первый в мире искусственный спутник Земли, обеспечил полет Ю.А.Гагарина в космос и прославился еще многими и многими делами»[2].

Но советская школа была единой и трудовой, при несколько пониженной гуманитарной составляющей школьного образования. В современной же школе, напротив, реализуются идеи профильного обучения, активно проводится линия гуманитаризации образования, и поэтому здесь может оказаться востребованным опыт дореволюционной школы. В царской России существовали различные типы средних учебных заведений, каждое из которых осуществляло подготовку в рамках выделенного направления. Конечно, речь не может идти о переносе в современность практики столетней давности, но тем не менее некоторые подходы старой школы к решению современных задач обновления могут быть интересными, практически значимыми и сегодня.

Основными показателями, которые мы возьмем для рассмотрения при сравнительном анализе, будут 1. Содержание математического образования, 2.Время, отводимое на обучение. Это два основных показателя, которые характеризуют преподавание любой учебной дисциплины.

Начнем с содержания математического образования. Формально отечественная гимназия впервые получила общегосударственные программы только в начале1870-х гг. До этого она работала на основании инструкций, которые разрабатывались как в центре, так и на местах при учебных округах. Существовало распоряжение министра от 1852 г., в котором предлагалось распределение тем для преподавания математики в гимназиях. Некоторые изменения программы проводились в 1877, 1890 гг. Но в целом содержание принципиально не менялось. В содержание курса математики средних учебных заведений входили: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия.

Рассмотрим основные содержательные линии названных дисциплин. *Арифметика* включала в себя следующие разделы: Системы исчисления. Таблицы мер. Четыре основные действия над целыми числами (отвлеченными и именованными). Признаки делимости чисел. НОД. НОК. Дроби. Отношения, пропорции. Арифметика изучалась в первых трех классах, и в конце гимназического курса предлагался повторительный курс арифметики, на котором не только обобщалось и повторялось пройденное в первых классах, но и доказывались те положения, которые ранее не были доказаны (например, теория нахождения НОД, НОК).

Курс арифметики подводил учащихся к изучению алгебры. В *алгебре*, изучаемой в гимназиях, можно выделить следующие разделы: Расширение понятия числа. Алгебраические выражения. Уравнения, системы уравнений, неравенства. Прогрессии. Логарифмы. Элементы комбинаторики и бином Ньютона. Важное значение алгебры как предмета, изучаемого в гимназиях, рассматривалось в духе обобщения, который должен был господствовать при изучении данного предмета. Особое значение в связи с этим придавалось расширению представления о числе.

Курс *геометрии* включал в себя отделы планиметрии и стереометрии. Планиметрия представляла собой тесно переплетенные части: линии и фигуры. Стереометрия включала два раздела: 1.Плоскости, прямые и 2. Многогранники, тела вращения. В первом изучалось взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, углы, образуемые плоскостями. Во втором изучались сечения, измерение площадей поверхностей, объемов.

Курс *тригонометрии* изучался на протяжении одного года и включал в себя приложения прямолинейной тригонометрии к производству различных измерений на местности.

Объем изучаемого материала в реальных училищах в основном совпадал с объемом классических гимназий. Но за счет меньшей продолжительности обучения и одновременно большего количества часов в течение года программа реальных училищ оказывалась более насыщенной в каждом классе, чем программа гимназий. Кроме того, для реальных училищ была важна практическая ориентация курса, в гимназиях, напротив, принципиальным являлось освоение теории. В кадетских корпусах математика преподавалась в большем объеме, чем в гимназиях и реальных училищах: в последнем классе кадетского корпуса изучали начала аналитической геометрии. Несмотря на указанные различия, в целом объем изучаемого материала в перечисленных учебных заведениях был одинаков. Но существовали средние учебные заведения с пониженным курсом математики. Так, программа женских гимназий министерства народного просвещения была значительно растянута и упрощена по сравнению с программами мужских средних учебных заведений.

В современной школе содержание курса математики значительно расширено по сравнению с гимназиями. Учащиеся знакомятся с понятиями функции, изучают элементы математического анализа, недавно в курс школы введены элементы теории вероятностей. Курс геометрии дополнен элементами аналитической геометрии. Предлагаемая диаграмма (рис. 1) показывает содержание курса математики в старших классах современной школы (10-11-кл.) и в старших классах гимназий (7-8-й годы обучения, 9-й последний год практически полностью отводился на повторение и именно этот последний год в диаграмме не учтен). Диаграмма построена на основанииданных [1,3].

Таким образом, содержание современного курса математики значительно расширено по сравнению с дореволюционными гимназиями. Насколько оправданно подобное расширение курса? Имеет место не усложнение содержания, а, скорее, тенденция к его размыванию, что порождает угрозу постепенной утраты четкой структуры предмета математики, превращению его в мозаичный набор, достаточно слабо связанных между собой элементов, изучаемых на уровне понятий. «Мозаичность» курса не позволяет выстроить цельное логически связанное здание предмета. При этом количество информации, которым должен овладеть ученик, не уменьшается, а растет. От зубрежки математических доказательств мы пришли к зубрежке формул. Отсюда и перегрузки, раздражение учителей, непонимание учеников, обеспокоенность родителей. И в итоге приговор математике как вечному врагу ученика.

Отметим, выявленная тенденция к увеличению тем является общей для школьного образования. Так, в гимназии по Уставу 1864 г. было 11 учебных предметов, сегодня по ФГОС в нашей школе 28 учебных предметов.

Но есть ли смысл бороться с установившейся практикой, а именно отказаться от элементов аналитической геометрии и математического анализа, отвергнуть только что введенные элементы теории вероятностей? Теоретически, конечно, это возможно, но оправданно ли? Насколько бы ни был мозаичен наш курс, думается, что сегодня необходимо остановиться на нем и сконцентрировать усилия на тщательной методической проработке материала.

На повторительном курсе требуется остановиться особо. Последний класс дореволюционных гимназий целиком отводился на повторение пройденного Сегодня такого общего повторительного курса математики фактически нет: имеет место повторение в курсе геометрии и отдельно в курсе алгебры. А между тем именно серьезный повторительный курс мог бы решить проблемы систематизации материала. Сегодня учащиеся в первом полугодии 11-ого класса изучают такие фундаментальные понятия, как производная и первообразная, кроме того здесь имеется материал по тригонометрия и теория вероятностей. И это при условии одновременной подготовки к сдаче ЕГЭ! А ведь полноценный (по крайней мере, годовой) повторительный курс крайне необходим. Именно в нем можно устанавливать различные связи, углублять ранее изученный материал, рассмотреть решения задач разными способами, показать историю развития математического знания и, конечно, готовиться к ЕГЭ.

Перейдем к вопросу о времени на обучение математике. Естественно, что каждый учитель всегда будет настаивать на увеличении времени именно на свой предмет. Но сколько времени можно отвести на преподавание математики в контексте общего образования?

Попробуем ответить на этот вопрос с позиций исторического опыта. Время на математику в средних учебных заведениях второй половины XIX в. значительно различалось в зависимости от типа учебного заведения. Существовавшие гимназии, реальные училища, кадетские корпуса, а также женские учебные заведения отводили на математику разное число часов. Кроме того, и для конкретного типа учебного заведения количество часов на математику изменялось на протяжении времени. Предлагаемая ниже таблица 1 показывает динамику времени на изучение математики[4].

Таблица 1

Математика в средних учебных заведениях второй половины XIXв.

Название учебного заведения	Число лет обучения	Год введения	Число уроков математики к общему числу уроков (%)
Классическая гимназия	7	1864	14
	9	1871	14
	9	1890	14
Реальное училище/гимназия	7	1864	16
	7(осн.отд)	1872	16
	6(комм. отд)		12
Реальное училище	8(осн. отд)	1895	16
	7(комм. отд)		16
Военная гимназия	7	1866	21
	7	1882	20
Кадетский корпус	7	1889	20
Женская гимназия ведомства императрицы Марии	7		11
Женская гимназия ведомства Министерства	7	1870	14
Институт	7		12

Сегодня время на математику также варьируется в зависимости от школы. Федеральный компонент по желанию руководства может быть дополнен компонентом образовательного учреждения и элективными курсами. Если учитывать только федеральный компонент и базовый уровень в старших классах, то на математику отводится около 15% учебного времени, (подсчитывалось по приказу Минобразования РФ от 30.08.2010 № 889). Именно по данному базовому варианту процентная доля математики в современной школе оказалась сравнимой с положением математики в гимназии (14%) и в реальном училище (16%).

Однако на практике эти 15% конкретные современные школы выдерживают далеко не всегда. При этом отметим, что гимназии, как и все средние учебные заведения России, были элитными заведениями. Даже принимали в них по конкурсу, а ежегодные экзамены отсеивали неуспевающих. Современная школа не может позволить себе такой практики. Ведь ЕГЭ, ГИА по математике обязательны для учеников, а принимаем и учим всех. В этой связи 15% на математику можно рассматривать как минимум, который должен быть строго обязательным.

Подводя итоги вышесказанному, сделаем следующие выводы

1. Необходимо фиксировать современное содержание курса математики, не вводя в него новых тем и сконцентрировав усилия на установлении внутрипредметных связей между темами курса,
2. Увеличить продолжительность итогового повторения в выпускном классе,
3. Время, отводимое на математику на базовом уровне, должно быть не меньше 15% от всей учебной нагрузки.

Библиографический список

1. *Бурмистрова, Т.А.* Алгебра и начала анализа 10-11 кл. [Текст] / Т.А.Бурмистрова /: Программы общеобразовательных учреждений. М: Просвещение, 2009. 159 с.
2. *Колягин, Ю.М.* Школьный учебник математики в прошлом и настоящем [Текст] / Ю.М. Колягин /Математика в школе. 2003. № 3. С. 73.
3. Циркулярное предложение министра народного просвещения попечителям учебных округов относительно учебных планов и предметов гимназического курса [Текст] СПб., 1890.-С. 456-457.
4. Математика в средней школе у нас и за границей [Текст] // Педагогический сборник. 1898 № 5 С. 503-519.

Петербургский математик Николай Михайлович Матвеев (к 100-летию со дня рождения)

Л.В. Коновалова, М.М. Воронина

Николай Михайлович Матвеев родился 1 ноября 1914 г. в Вологодской области, станция “Дикая” в семье зажиточного крестьянина. В хозяйстве отца было две коровы. После революции 1917 года отца “раскулачили” и маленький Коля оказался сыном “кулака”. Было и другое печальное обстоятельство, повлиявшее на судьбу Николая Михайловича. А именно, его дядя — Анатолий Тимофеев, получивший хорошее техническое образование в Санкт-Петербурге, знавший несколько европейских языков, в 1918 г. эмигрировал из России во Францию. Там он занялся книготорговлей. Хорошее образование, знание языков и, наконец, природный ум привели к успеху. Он быстро разбогател и умер во Франции в возрасте более ста лет.

Николай Михайлович, блестяще окончив среднюю школу, особенно он отличался по математике, отправился в Ленинград поступать в Университете на математико-механический факультет. Однако, два обстоятельства: сын “кулака” и родственник эмигранта не позволили ему стать студентом. Некоторое время он был “вольнослушателем”, а потом по комсомольской путёвке вернулся домой в Вологду и стал учителем в школе. Три года Николай Михайлович учил школьников математике, физике и немецкому языку. В 1933 году он вновь отправляется в Ленинград поступать в Университет. Приобретя статус школьного учителя, Николай Михайлович смог поступить на математико-механический факультет. Ему очень повезло с учителями. Это были Николай Максимович Гюнтер (17.12.1871 - 04.05.1941) и Григорий Михайлович Фихтенгольц (05.06.1888 - 26.06.1959).

Николай Максимович Гюнтер - петербуржец, выпускник Петербургского университета (окончил в 1894г.), доктор чистой математики (1915г.). Его научные работы относятся к общей теории дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными. Большое число работ Гюнтера посвящено проблемам математической физики. Им написаны монографии по уравнениям с частными производными и по теории потенциала [1].

Григорий Михайлович Фихтенгольц - одессит, родился в Одессе, там же и закончил Университет. С 1918 г. он профессор Петроградского, а затем Ленинградского университета. Его научные интересы относятся к теории функций действительной переменной и к функциональному анализу. Трёхтомник Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления” - лучший учебник по математическому анализу. Григорий Михайлович Фихтенгольц - легендарная личность в Санкт-Петербурге, его очень любили студенты, а некоторые его остроумные замечания до сих пор повторяют преподаватели при чтении лекций.

Николай Михайлович Матвеев был очень талантливым студентом, его заметил Гюнтер и пригласил после окончания университета к себе в аспирантуру. Матвеев успешно защитил кандидатскую диссертацию и был оставлен на математико-механическом факультете в качестве ассистента самого Фихтенгольца. Отметим, что Николай Михайлович каким-то образом (он не говорил каким именно) поддерживал отношения со своим дядей, живущем во Франции. Ему удавалось снабжать Гюнтера математической и художественной литературой с помощью дяди А. Тимофеева. Во время войны Николай Михайлович работал в Свердловске в Уральском государственном университете. В 1944 году Матвеев возвращается в Ленинград, он - доцент кафедры дифференциальных уравнений математико - механического факультета ЛГУ. Николай Михайлович блестяще читает лекции по дифференциальным уравнениям, ведёт практические занятия, активно занимается научной деятельностью. Стоит заметить, что Николай Михайлович был очень дружен с Николаем Павловичем Еругиным (14.05.1907 - 12.02.1990), выдающимся советским математиком, академиком АН БССР. Еругин выпускник ЛГУ 1932 года, с 1935 по 1957 годы работал в Ленинградском университете. В 1957 году Николай Павлович уехал в Белоруссию и работал в институте математики АН БССР до конца своих дней. Основные его труды посвящены теории дифференциальных уравнений [1].

Еругин был частым гостем в доме Матвеева, его сын - Павел Николаевича Матвеев вспоминает, как Николай Павлович, будучи у них в гостях и узнав о каких-то его шалостях, “бил его палкой”, поскольку Николай Михайлович, по доброте душевной, подвергать сына физическим наказаниям не мог.

Николай Михайлович Матвеев автор более ста научных работ по теории дифференциальных уравнений, им написано большое количество учебников и задачников по теории дифференциальных уравнений. В 1955 г. в издательстве ЛГУ Матвеев выпускает замечательную книгу “Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений”, содержащую 655 страниц блестяще изложенного материала. В 1963 г. выходит 2-ое издание под названием “Методы интегрирования дифференциальных уравнений. Учебник для механико-математических специальностей университетов” в издательстве “Высшая школа”. В 1967 г. он публикует третье издание в том же издательстве в Москве.

Учебник великолепный и очень востребованный и в Минске в 1974 г. вышло его четвёртое издание. В 1969 г. Николаю Михайловичу была присвоена учёная степень доктора физико-математических наук.

Работу над своим знаменитым “Сборником задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям” Матвеев завершил к началу 1960 года, и в том же году задачник был опубликован в издательстве ЛГУ. Второе издание задачника выходит в Москве в 1962 г., затем третье издание в Минске в 1967 г.. Задачник так хорош и так востребован, что его переиздают в 1970, 1977, 1987 и, наконец, 2002 г. выходит седьмое издание в Петербурге в издательстве “Лань”. Отметим, что кроме курса теории дифференциальных уравнений Николай Михайлович Матвеев читает на мат.-мехе блистательный курс “Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений”, который, все студенты, специализирующиеся по кафедре “Дифференциальные уравнения”, слушали с восторгом. В шестидесятые годы Матвеев разработал и читал ещё один курс “Асимптотическая теория дифференциальных уравнений”, который так же все студенты посещали, настолько интересно и доходчиво излагал материал Николай Михайлович.

Несколько лет Матвеев был председателем предметной комиссии по математике на мат.-мехе, в связи с этой работой он издаёт в помощь поступающим в университет целый ряд пособий. Например, в 1965 г. Николай Михайлович совместно со старшим сыном разработал и опубликовал “Сборник задач по математике в помощь поступающим в вузы” в издательстве Казанского университета. Сборник пользовался большой популярностью у абитуриентов и трижды был переиздан. Его трудолюбие и трудоспособность потрясают. Он пишет большое количество пособий по дифференциальным уравнениям для заочников. В шестидесятые годы было модным “учебное телевидение”. Николай Михайлович откликается и на это веяние времени и издаёт ряд учебных пособий в помощь слушателям учебного телевидения.

Наряду с большим педагогическим талантом Николай Михайлович Матвеев обладал даром организатора. Известно, что Постановлением Совета Министров СССР от 10 октября 1969г. был образован в ЛГУ факультет Прикладной Математики - Процессов Управления, первым деканом которого стал профессор Владимир Иванович Зубов. Этому событию предшествовало колоссальная работа, проделанная Николаем Михайловичем. Именно благодаря его энергии, его организаторскому таланту появился в университете новый факультет. Десять лет с 1969 г. по 1979 г. Матвеев был бессменным руководителем кафедры высшей математики факультета ПМ-ПУ. Чтобы факультет с первый дней своего существования полноценно работал необходимо наличие, с одной стороны, студентов, а с другой - квалифицированных преподавателей. И здесь Николай Михайлович проявил свой незаурядный талант организатора и своё удивительное человеколюбие. А именно, он лично изучил дела студентов, отчисленных с мат.-меха., и, выбрав из них наиболее способных, (имевших хорошие оценки до отчисления), лично написал каждому из них письмо с предложением восстановиться в университете, но на новом факультете ПМ-ПУ. Тем самым он, во-первых, изменил к лучшему судьбы многих способных молодых людей, во-вторых, создал возможность для полноценной работы нового факультета. Печален тот факт, что на протяжении всех десяти лет Николай Михайлович был лишь исполняющим обязанности заведующего кафедрой высшей математики.

В 1979 г. Матвеев покинул ЛГУ и возглавил кафедру математического анализа в ЛГПИ им. А.И. Герцена. С 1979 по 1989 годы Николай Михайлович занимал должность заведующего кафедрой математического анализа, а с 1989 по 1994 годы был профессором кафедры, на посту заведующего кафедрой его сменил Владимир Петрович Одинец.

В эти годы Матвеев опубликовал свой известный курс “Аналитическая теория дифференциальных уравнений” в издательстве ЛГПИ им. А.И. Герцена. Николай Михайлович являлся основателем и бессменным руководителем городского семинара по дифференциальным уравнениям и математической физике. Семинары проводились еженедельно по понедельникам. Семинары были необыкновенно интересные, их посещало большое количество народа. Это были и студенты старших курсов, и аспиранты, и инженеры, у которых возникали проблемы, связанные с тематикой семинара. Много преподавателей из разных городов России приезжали на семинар. Все получали помощь в решение своих проблем. Кроме того, Николай Михайлович возобновил в ЛГПИ семинар по истории математики и методике преподавания. Семинар проводился раз в месяц. На этом семинаре по личному приглашению Николая Михайловича неоднократно выступали с докладами ведущие историки математики страны: С.С. Демидов, А.Н. Боголюбов. Отметим, что первый же доклад Сергея Сергеевича Демидова произвел на участников семинара такое сильное впечатление, что многие из них (автор статьи в том числе) начали серьезно заниматься историей математики.

Под редакцией Матвеева и при его прямом участии с 1986г. по 1992 г. ежегодно выходил межвузовский сборник научных трудов “Дифференциальные уравнения в частных производных” [2] в издательстве ЛГПИ. С 1982 г. по 1993 г. также под редакцией Николая Михайловича ежегодно выходил межвузовский сборник “Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания математики” [3]. Сборники “Математическая физика” [4], “Качественная теория сложных систем” [5] регулярно выходили под его редакцией с 1984 по 1987 годы. В перечисленных изданиях печатались такие известные петербургские математики как В.С. Виденский, Г.А. Леонов, В.Ф. Зайцев, В.Ф. Кузютин, М.М. Смирнов; москвичи: С.С. Демидов, А.Н. Филатов, В.В. Шершков и многие другие ученые практически со всех вузов России. Николай Михайлович обладал неиссякаемой энергией и огромной любовью к людям. Во многих городах России благодаря его активной деятельности были открыты аспирантуры. Он подготовил к защите кандидатских диссертаций более 50 аспирантов, вырастил 6 докторов наук. Матвеев – заслуженный деятель науки Российской Федерации, награжден медалью Ушинского, являлся действительным членом международной Академии Наук Высшей школы.

Круг его интересов был необычайно широк, но наибольший интерес для Николая Михайловича представлял человек. Он искренне любил каждого своего студента и всеми силами пытался каждому помочь. О нём рассказывают легенды, которые являются истиной правдой. Приведу несколько примеров. Его аспирантка Нина Михайловна Репникова должна была защищать диссертацию, а Николай Михайлович в Военно–медицинской академии за день до защиты перенёс тяжелейшую полостную операцию. Так вот, добравшись до телефона в ординаторской в день защиты, Матвеев, весь в дренажных трубках, контролировал Нинину защиту. Многие аспиранты рассказывали, что Николай Михайлович ставил свою фамилию в их работах (рядом с фамилией автора), чтобы ускорить напечатание статьи, а в последний момент, после принятия статьи в печать, отсылал в редакцию телеграмму с настоятельной просьбой исключить свою фамилию, поставленную по ошибке. И таких примеров можно привести много.

Николай Михайлович был талантлив во всем. Он прекрасно пел, у него была природная постановка голоса, очень красивый тенор. Помню, я сдавала кандидатский минимум по математике, нас было человек пятнадцать. Мы пришли в назначенное время, но оказалось, что экзамен начнётся лишь через полтора часа. Все сидели в аудитории бледные в страшном напряжении. Вдруг пришёл Николай Михайлович и сказал: “Я буду вам петь арии из редко исполняемых опер и старинные русские романсы, а вы будете угадывать имена композиторов”. Напряжение спало, и мы с изумлением слушали дивное пение Николая Михайловича.

В 1994 году Николай Михайлович Матвеев ушел из Петербургского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена (в 1990 году институт получил статус университета) и возглавил кафедру высшей математики в Ленинградском Государственном Университете им. А.С. Пушкина. Там он проработал до конца своих дней. Умер Николай Михайлович Матвеев 8 декабря 2003 г., похоронен на кладбище под Пушкином. Каждый год в день рождения Николая Михайловича Матвеева на могилу приходят ученики почтить его память.

Библиографический список

1. *Бородин, А.И.* Биографический словарь деятелей в области математики [Текст] / А.И. Бородин, А.С. Бугай/ – Киев: Изд-во “Радянська школа”, 1979. – 606 с.
2. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] Межвузовский сборник научных трудов. – Л.: Изд-во ЛГПИ, 1986.
3. Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания математики [Текст] Межвузовский сборник научных трудов. – Л.: Изд-во ЛГПИ, 1988.
4. Математическая физика [Текст] Межвузовский сборник научных трудов. – Л.: Изд-во ЛГПИ, 1984.
5. Качественная теория сложных систем [Текст] Межвузовский сборник научных трудов. – Л.: Изд-во ЛГПИ, 1986.

Абрам Миронович Лопшиц – учёный и педагог (Памяти Учителя посвящается)

Н.И. Коршунова

Тридцать лет назад ушёл из жизни выдающийся учёный, блестящий педагог и любимый Учитель – Абрам Миронович Лопшиц.

А. М. Лопшиц (1897 – 1984) родился в мае 1897 г. в г. Одессе в семье учителя народных училищ. Окончив в 1915 г. гимназию, он поступил на физико-математический факультет Новороссийского (г. Одесса) университета, в 1919 г. закончил сдачу экзаменов, предусмотренных учебным планом. Ещё будучи гимназистом, а затем студентом, он испытал влияние выдающихся учёных Самуила.Осиповича Шатуновского (1859 – 1929) и Вениамина.Фёдоровича Кагана. (1869 – 1952).

В 1923 г. Абрам Миронович поступает на последний курс физико-математического факультета Московского Государственного университета. По окончании факультета, в 1924 г. он был принят в аспирантуру при Научно-исследовательском институте математики и механики при МГУ, которую закончил в 1929 г. Руководил работой молодого учёного профессор В.Ф. Каган, тоже переехавший в Москву.

Самостоятельная научная деятельность А.М. Лопшица начинается в 1925 г. Она была тесно связана с работой Семинара по векторному и тензорному анализу, одним из создателей и самых активных участников которого он был. Будучи членом Бюро Семинара, на его заседаниях Абрам Миронович сделал более 50-и докладов, многие из которых опубликованы в «Трудах» этого семинара. Руководителем Семинара и главным редактором его «Трудов» был изначально профессор В.Ф. Каган, создатель и главная движущая сила этого солидного математического сообщества. Затем его сменил профессор МГУ Пётр Константинович Рашевский, выдающийся учёный и талантливый педагог.

Увлечённо занимаясь научными исследованиями, Абрам Миронович не стремился оформить полученные результаты с целью защиты кандидатской диссертации. Он, в частности, считал, что главной задачей аспиранта является не написание диссертации, а получение знаний. «По окончании аспирантуры я бы сразу стал платить большую зарплату, а диссертации должны защищать единицы», - говорил Абрам Миронович. Учёную степень кандидата физико-математических наук он получил в 1938 г. за совокупность напечатанных к тому времени научных работ.

В течение многих лет научные друзья А.М. Лопшица безуспешно пытались склонить его к написанию докторской диссертации. Как писал профессор, доктор физико-математических наук Я.С. Дубнов: «Однако, всякий раз как А.М. принимался за эту работу, на пути к её выполнению вставал интерес автора к новым задачам и обобщениям. В результате вместо диссертации появлялись новые доклады, рукописи, иногда статьи. Но даже того только, что А.М. Лопшиц опубликовал, вполне достаточно, чтобы поставить его в один ряд с нашими активно работающими профессорами и докторами наук» (28.04.56).

Учёное звание профессора Абрам Миронович получил также за совокупность научных работ и как преподаватель, имеющий учеников, успешно защитивших диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

Следует отметить, что А.М. Лопшиц владел четырьмя иностранными языками: немецким, английским, французским, итальянским. Он не только писал на них математические статьи, но и перевёл 4 книги и был научным редактором переводов семи монографий. Любовь к работе с научной литературой в оригинале, к серьёзному изучению иностранных языков он прививал и своим ученикам. В результате этого, некоторые его ученики успешно читали лекции в вузах зарубежных стран (И.Л. Кантор – Швеция, А.В. Ястребов – США, Куба, Б.З. Райхштейн и в настоящее время живёт, преподаёт и занимается активной научной деятельностью в США, сотрудничает с учёными ряда европейских стран).

Впервые в учебную аудиторию в качестве преподавателя Абрам Миронович вошёл в 1919 г. Педагогическую деятельность в высшей школе он начал в 1923 г в должности преподавателя физики и математики на Рабочем факультете МГУ. Дальше были Московское высшее техническое училище, Московский энергетический институт, Инженерно-техническая академия связи, Московский государственный педагогический институт им. К. Либкнехта и Московский государственный педагогический институт им. В, И. Ленина. Работал он в должности доцента, профессора, заведовал кафедрой (ИТАС), руководил работой аспирантов. Отметим, что его первым аспирантом был Левон Сергеевич Атанасян.

В 1949 году Ярославский педагогический институт принял в свою дружную семью А. М. Лопшица. В конце сороковых годов XX в. решение предоставить работу опальному преподавателю, взявшему на себя заботу о детях репрессированного друга, было очень и очень непростым. Однако, Леонид Михайлович Рыбаков (1907 – 1964), заведовавший в это время кафедрой высшей математики, сделал выбор, продиктованный ему совестью учёного.

К моменту прихода в ЯПИ Абрам Миронович был уже известным учёным, участником Всероссийского и двух Всесоюзных математических съездов, активным членом Семинара по векторному и тензорному анализу, автором почти трёх десятков серьёзных содержательных научных работ, нескольких учебных пособий и оригинального учебника по аналитической геометрии. В названном учебнике впервые в учебной литературе в полном объёме используется аппарат векторной алгебры и, так называемый, прямой бескоординатный метод. Геометрические факты, имеющие метрический характер, отделены в нём от фактов, принадлежащих аффинной геометрии. «Аналитическая геометрия» А. М. Лопшица не утратила своей привлекательности и в наши дни.

Приход Абрама Мироновича на физмат совпал с периодом подъёма факультета. В 1948 году открылась математическая аспирантура. Первым ярославским аспирантом А. М. Лопшица стал Владимир Михайлович Майоров, который многим из нас хорошо известен как всеми любимый декан физико-математического факультета.

О профессоре Лопшице можно много говорить и как о Человеке (с большой буквы), и как о Математике (тоже с большой буквы). Людей, имевших счастье общаться с Абрамом Мироновичем, поражали его неиссякаемая энергия, искреннее дружелюбие, поистине юношеский интерес к окружающему миру во всех его проявлениях, широта и глубина знаний, научная прозорливость, многогранный талант педагога.

Научные интересы профессора Лопшица были весьма разнообразны. Риманова геометрия и теория упругости, гармонический анализ и вычислительная математика, начертательная геометрия и векторная алгебра, интегральные и разностные уравнения, история и методика математики, конечные геометрии и многое другое.

Большая часть его работ посвящена разработке, развитию и популяризации прямого (бескоординатного) метода. Вначале прямой метод был применён к изучению геометрии конечномерных пространств. Строятся бескоординатная тензорная алгебра и тензорный анализ. Идеей прямого метода Абрам Миронович увлёк своих учеников. А. К. Тимофеев, А. М. Комиссарук, М. А. Иванова, С. М. Бахрах, В. К. Кропина, В. В. Секацкий, А. В. Ястребов, Л. Б. Вассерман, Э. Ф. Реуцкая, Н. И. Качурина и другие использовали и развивали его в своих работах.

Вскоре прямой метод приводит А. М, Лопшица к мысли вообще отказаться от аксиомы размерности. Оказалось, что в отличие от аксиомы параллельности, значительно обогащающей содержание евклидовой геометрии, роль аксиомы размерности во многих вопросах не столь велика.

Следующим этапом было введение понятия безразмерного пространства, безразмерной геометрии. Всё это неизбежно потребовало построения аппарата безразмерной алгебры. Впервые результаты в этом направлении Абрам Миронович опубликовал в 1948 году в «Трудах семинара по векторному и тензорному анализу» [19 - 21]. Результаты, относящиеся к геометрии безразмерного пространства, были доложены им на Третьем Всесоюзном математическом съезде [21], который состоялся в Москве в 1956 году.

Работа А. М. Лопшица по изучению линейной и полилинейной алгебры безразмерных векторных пространств была продолжена его учениками Ш. Д. Трупиным [13, 22, 23], Б.З. Райхштейном [14, 24, 30 - 34], Т.Д. Спасской, В.В. Секацким [25 – 27], Ю. И. Большаковым [28 - 34].

Более десятка научных работ профессора А. М. Лопшица в той или иной степени носит линейно-алгебраический характер. Часть из них получила продолжение в трудах его учеников. Так, весьма плодотворной оказалась общая идея факторизации линейных преобразований, действующих в евклидовых пространствах. Она позволила сформулировать и решить достаточно большое число нетривиальных задач, относящихся к теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитным скалярным произведением. В совместных работах его учеников Б. З. Райхштейна и Ю. И. Большакова, а также их зарубежных коллег из США, Голландии и Италии идея факторизации в Н-унитарных пространствах получила новое звучание: были сформулированы и решены многие задачи, касающиеся линейных отображений пространств с индефинитным скалярным произведением. Итак, идеи А.М. Лопшица перешагнули рубежи его Родины. Работают в других странах и некоторые из его учеников: Б.З Райхштейн – профессор католического университета в Вашингтоне (США), И.Л. Кантор (1936 – 2006) большую часть года проводил в г. Лунде (Швеция), где занимался преподавательской и научной работой. Солидная часть работ Исая Львовича Кантора посвящена группам и алгебрам Ли, йордановой алгебре, изучению алгебраических свойств различных пространств. Живой интерес у всех присутствующих вызвал доклад, прочитанный Исаем Лвовичем на конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Абрама Мироновича Лопшица (1997 год, Ярославль, ЯГПУ). Тема доклада - суперматематика.

Ученик А.М. Лопшица профессор Владимир Емельянович Кондрашов был одним из первопроходцев, сумевших по достоинству оценить роль электронно-вычислительной техники. Владимир Васильевич Афанасьев, один из последних аспирантов профессора Лопшица, получил содержательные результаты в области конечных геометрий. По его словам, интерес к теории графов и её приложениям во многом пробудил в нём также Абрам Миронович. Весьма примечательным является использование В.В. Афанасьевым теории графов в решении задач теории вероятностей, а также внедрение такого подхода в учебный процесс. Связанные с этим вопросы изложены им в ряде научно-методических пособий, а также в монографии «Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач" (г. Ярославль, 1996). В настоящее время член РАЕН, доктор педагогических наук, профессор В.В. Афанасьев руководит одним из крупнейших педагогических ВУЗов страны (ЯГПУ) и возглавляет в нём кафедру геометрии и алгебры.

То, что два ученика А.М. Лопшица В.В. Афанасьев и А.В. Ястребов, всерьёз увлеклись вопросами методики преподавания математики и стали докторами педагогических наук, не случайно. Сейчас они сами имеют учеников, успешно защитивших кандидатские диссертации. Учителя продолжаются в своих учениках. Надееися, что этот процесс не прервётся.

Абрам Миронович не только сам обладал педагогическим даром, но и умел разглядеть его в других. Каждое своё занятие, будь то беседа с аспирантами, семинар или студенческая лекция, он превращал в дискуссию, делая слушателей своими соавторами. А ничто так не убеждает как личный пример! Сейчас сотни его бывших студентов трудятся во всех уголках нашей Родины, десятки бывших аспирантов преподают в ведущих ВУЗах страны, заведуют кафедрами.

Большое внимание профессор Лопшиц уделял содержанию школьного и вузовского математического образования. Свои взгляды он изложил в своём известном учебнике «Аналитическая геометрия» [40], ряде учебных пособий, статьях для «Детской энциклопедии» (Изд-во АПН РСФСР, 1965, Т.2) и журнала «Квант» [36 - 39].

Нельзя не отметить высокие человеческие качества любимого Учителя, широту интересов и глубину знаний в самых различных областях. Изобразительное искусство, литература и, конечно, музыка. Любовь к искусству он прививал и своим ученикам. Посещение концертов, музеев, выставок, обсуждение прочитанных книг и журнальных статей (не только математического содержания) входило в курс обучения его аспирантов.

Список научных трудов А.М. Лопшица, составленный его учениками, содержит 72 наименования. В архиве Абрама Мироновича, сохранённом его семьёй, содержится большое число неопубликованных работ, общий объём которых составляет около пятнадцати печатных листов. До последнего вздоха он оставался Учёным! А. М. Лопшиц передал своим ученикам преданность избранному жизненному пути, широту взглядов, неравнодушное отношение ко всему, что нас окружает. Спасибо, Учитель!

Библиографический список

1. *Лопшиц, А.М.* Векторное решение задачи о симметрично сдвоенных матрицах [Текст] / А.М. Лопшиц /Труды Всероссийского съезда математиков.-М., 1927. С. 186.
2. *Лопшиц, А.М.* Параллельное перенесение в пространствах с неквадратичным мероопределением [Текст] / А.М. Лопшиц / Там же. С. 241.
3. *Лопшиц, А.М.* Абсолютные (бескоординатные) методы изучения многомерных пространств [Текст] / А.М. Лопшиц / «Труды семинара по векторному и тензорному анализу». - М.: Изд-во МГУ. Вып.I. 1935 г.
4. *Лопшиц, А.М.* Тензорное интегрирование в двухмерном римановом многообразии [Текст] / А.М. Лопшиц / «Труды семинара по векторному и тензорному анализу». – М.: Изд-во МГУ. Вып. II – III. 1935 г. С. 200.
5. *Лопшиц, А.М.* О римановых пространствах, содержащих поле параллельных площадок [Текст] / А.М. Лопшиц / Там же. С. 327.
6. *Майоров, В.М.* Инвариантная характеристика обобщенно-потенциальной сети [Текст] / В.М. Майоров / ДАН, т. 90, 1953, С. 965-968.
7. *Майоров, В.М.* Инвариантные характеристики некоторых сетей [Текст] / В.М. Майоров / Уч. зап. Яросл. пед-та, вып. 34, ч. 2, Математика, Ярославль, 1960, С. 125-154.
8. *Смирнова, Т.С.* О некоторых аполярных сетях [Текст] / Т.С. Смирнова / Уч. зап. ЯГПИ, вып. 64, 1970.
9. *Смирнова, Т.С.* Сети, чебышёвские геодезические кривизны которых аддитивно-диагональны относительно данной сети [Текст] / Т.С. Смирнова / Уч. труды Новосибирского гос. пед. ин-та, вып. 94, 1974.
10. *Лопшиц, А.М.* Тензорная характеристика римановых пространств первого класса [Текст] / А.М. Лопшиц / Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М., 1941, Вып. 5, С. 16.
11. *Лопшиц, А.М.* Конформно-евклидовы пространства первого класса [Текст] / А.М. Лопшиц / Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М., 1941, Вып. 5, с. 17.

12. *Лопшиц, А.М.* Римановы пространства, имеющие осевую симметрию [Текст] / А.М. Лопшиц / Там же. Вып. 5, С. 18.
13. *Трупин Ш.Д.* Об одном обобщении теоремы о делимости полилинейной функции в линейном безразмерном пространстве [Текст] / Ш.Д. Трупин / Уч. зап. Латв. ун-та, т. 28, вып. 4, 1959.
14. *Райхштейн, Б.З.* Некоторые теоремы о поливекторах [Текст] / Б.З. Райхштейн / ДАН, т. 167, 1966, С. 992- 995.
15. *Качурина, Н.И.* Конформно-евклидовы гиперповерхности риманова пространства постоянной кривизны [Текст] / Н.И. Качурина / Геометрия и топология. Постоянно действующий межвузовский (республиканский) тематический научный сборник. Вып. 1, 1974, С. 43-51.
16. *Качурина, Н.И.* Пространства Эйнштейна первого и обобщенного первого класса [Текст] / Н.И. Качурина / Рукопись деп. в ВИНИТИ 31.10.74, № 2772-74.
17. *Качурина, Н.И.* Конформно-евклидовы гиперповерхности конформно-евклидова пространства [Текст] / Н.И. Качурина / Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. XVIII, - М., 1978, С. 321-328.
18. *Розенсон, Н.А.* Об инвариантной характеристике конформно-евклидовых пространств класса I [Текст] / Н.А. Розенсон / Труды Ленинградского политехнического института, 1941, С. 60-66.
19. *Лопшиц, А.М.* Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах [Текст] / А.М. Лопшиц / Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1948, Вып. 6, С. 365 – 419.
20. *Лопшиц, А.М.* Некоторые вопросы проективной, аффинной и начертательной геометрии в безразмерном пространстве [Текст] / А.М. Лопшиц / Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. М., 1956, Т.2, С.140.
21. *Лопшиц, А.М.* Основная теорема теории гиперповерхностей в безразмерном евклидовом пространстве [Текст] / А.М. Лопшиц / Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. М., 1959, Т. 4, С.77.
22. *Трупин, Ш.Д.* К вопросу о коллинеарности и компланарности аффиноров в линейном безразмерном пространстве [Текст] / Ш.Д. Трупин / Известия АН Латв.ССР, № 8, 1958.
23. *Трупин, Ш.Д.* Об одном обобщении теоремы о делимости полилинейной функции в линейном безразмерном пространстве [Текст] / Ш.Д. Трупин / Уч. зап. Латв. ун-та, т. 28, вып. 4, 1959.
24. *Райхштейн, Б.З.* Некоторые теоремы о поливекторах [Текст] / Б.З. Райхштейн / ДАН, т. 167, 1966, С. 992-995.
25. *Секацкий, В.В.* Некоторые вопросы геометрии безразмерных пространств [Текст] / В.В. Секацкий / Кандидатская диссертация, Ярославль, 1970.
26. *Секацкий, В.В.* Бесконечномерное конформно-евклидово пространство [Текст] / В.В. Секацкий / Ученые записки ЯГПИ, вып. 64, геометрия, ч. 2, Ярославль, 1969, С. 76-80.
27. *Секацкий, В.В.* О симметрии в безразмерном римановом пространстве [Текст] / В.В. Секацкий / Известия ВУЗ, математика, № 8, 1970, С. 94-102.
28. *Большаков, Ю.И.* Псевдополярное разложение линейного оператора [Текст] / Ю.И. Большаков / Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Межвуз. тематич. научн. сб., вып.13,, изд. ЯрГУ, Ярославль, 1994, С. 23 - 32.
29. *Большаков, Ю.И.* Линейные операторы, действующие в пространстве с индефинитным скалярным произведением [Текст] / Ю.И. Большаков / Математика в Ярославском университете, сб. обзорных статей к 20-ти летию математического факультета, изд. ЯрГУ, Ярославль, 1996, С. 21 - 29.
30. *Bolshakov, Y.* Polar decompositions in finite dimensional indefinite scalur product spaces [Текст] / Y. Bolshakov, C. V. M. van der Mee, A. C. M. Ran, B. Reichstein and L. Rodman, / Special cases and applications Recent

Developments in Operator Theory and its Applications, I. Gohberg, P.Lanraster, P.N.Shivakumar, eds., OT 87, Birkhauser, Basel,1996, pp.1-94.

31. *Bolshakov, Y.* Polar decompositions in finite dimensional indefinite scalur product spaces [Текст] / Y. Bolshakov, C. V. M. van der Mee, A. C. M. Ran, B. Reichstein and L. Rodman, Errata for / Special cases and applications, Integral Equations and Operator Theory, 27, 1997 , Birkhauser, Basel,1997, pp. 497 - 501.
32. *Bolshakov, Y.* Polar decompositions in finite dimensional indefinite scalur product spaces [Текст] / Y. Bolshakov, C. V. M. van der Mee, A.C.M. Ran, B. Reichstein and L. Rodman / General Theory, Linear Algebra and Applications, New York, 261:91-141 (1997).
33. Bolshakov, Y. *Extension of isometries in finite dimensional indefinite scalur product spaces and polar decompositions [Текст] / Y. Bolshakov, C. V. M. van der Mee, B. Reichstein and L. Rodman / in SIAM J. of Matrix Anal. Appl., Philadelphia, Vol 18, No.3, pp 752-774, 1997.*
34. *Bolshakov, Y.* Unitary equivalence in an indefinite scalar product [Текст] / Y. Bolshakov, B. Reichstein / An analogue of singular value decomposition, Linear Algebra and its Applications, New York, 222: 155-226 (1995).
35. *Лопшиц, А.М.* Аффинные отображения многомерного евклидова пространства, подобные кратно-перспективным, и обобщенная теорема Польке-Шварца [Текст] / А.М. Лопшиц / Геометрия. Вып.57. Ярославль, 1967, С. 93-123.
36. *Лопшиц, А.М.* Функциональные уравнения [Текст] / А.М. Лопшиц / Квант, 1975, № 1, С. 30 – 34.
37. *Лопшиц, А.М.* Задача Мебиуса и ее продолжение [Текст] / А.М. Лопшиц / Квант, 1977, № 3.
38. *Лопшиц, А.М.* Площади ориентированных фигур [Текст] / А.М. Лопшиц / Квант, 1978, № 3.
39. *Лопшиц, А.М.* Векторное решение геометрических задач [Текст] / А.М. Лопшиц / Квант, 1979, № 8.
40. *Лопшиц, А.М.* Аналитическая геометрия [Текст] / А.М. Лопшиц / – М.: Учпедгиз, 1948.

М.В.Ломоносов в переписке с Л.Эйлером

Л.В.Кудряшова

Л.Эйлер и М.В.Ломоносов не встретились в Петербурге:
Л.Эйлер летом 1741г. уехал в Германию, для Петербургской Академии он остался главным консультантом по физико-математическим наукам, редактировал математический раздел «Комментариев», рассматривал работы, присланные на конкурс.

Ломоносов в город на Неве вернулся в июне как студент Академии.

В Берлине Эйлер проработал 25 лет, после чего вернулся в Петербург в 1766г., когда Ломоносова уже не стало.

Возникновение переписки между ними обязано И.Д.Шумахеру, библиотекарю и советнику Канцелярии Академии.

Отношения у Ломоносова с Шумахером были сложными. После возвращения Ломоносова из Германии Шумахер с покровительством относился к молодому русскому ученому, учитывая, что в той обстановке недовольства засильем иностранцев в Академии, это может сослужить ему хорошую службу. Михаил Васильевич принят, участвует в составлении каталога в Минералогическом кабинете, переводит на русский язык статьи для

«Примечаний на Ведомости», по собственной инициативе начинает работу над первым систематизированным руководством на русском языке по горному делу (чему он и учился в Германии), составляет программу исследований в области естественных наук, впервые выступает в печати как поэт.

В начале января 1742г. Ломоносов получает звание адъюнкта физического класса, что дает ему право на самостоятельную научную работу и возможность участия в работе Академического собрания.

В это время Шумахер подписывал все исходящие бумаги, стал председательствовать и в Конференции: «науками в Конференции ведать». Началась кампания против самоуправства И.Д.Шумахера. Подано доношение в Сенат. Ломоносов поддержал жалобщиков, и Шумахер никогда ему этого не простил.

Елизавета Петровна (пришедшая на престол 25 ноября 1741г.) распорядилась назначить следственную комиссию). Следственная комиссия летом 1743 г. полностью оправдала Шумахера и вынесла решение о наказании тех, кто на него жаловался. Ломоносова исключили из Академического собрания, ему грозило битьё батогами и ссылка в солдаты.

В декабре 1743г., когда Елизавета вернулась после коронации из Москвы, Ломоносов написал первую оду, посвященную новой императрице. Ода была, видимо, замечена императрицей. Похоже, именно она спасла Ломоносова от ссылки в солдаты, а за грубые выпады против профессоров Елизавета обязала его произнести публичное извинение перед Академическим собранием, что он и выполнил.

Несмотря ни на что, Ломоносов в этот год вел плодотворную научную работу. Написаны «Размышления о причине теплоты и холода», «О вольном движении воздуха, в рудниках примеченном», проводил физические опыты. По объему и уровню работ Ломоносов мог претендовать на профессорское звание. В 1745г. Ломоносов прочитал в Академическом собрании диссертацию «О металлическом блеске», за которую было решено избрать его профессором химии.

Шумахер продумывает, как ограничить действия Ломоносова, лишить его инициативы в научной и академической деятельности, контролировать работу химической лаборатории, руководимой Ломоносовым.

Чтобы подобный контроль над Ломоносовым был бы как-то внешне оправдан, надо было посеять сомнение в научной квалификации нового профессора химии. В момент, когда Ломоносов уже начал активную работу по организации химических исследований, были выделены средства на строительство лаборатории, Шумахер решает нанести ему чувствительный удар.

Ломоносов вспоминал в 1764г.: «Для отнятия сего всего умыслил советник Шумахер, чтобы мои, опробованные уже диссертации в общем Академическом собрании, послать в Берлин к профессору Ейлеру, конечно, с тем, чтобы их он охулил»,

Ломоносовские диссертации, однако, были уже посланы в Берлин решением Канцелярии от 7 июля 1747г. Этим действием Шумахер оскорблял не только Ломоносова, но и Академическое собрание, ставя под сомнение компетенцию всех работавших в Петербурге академиков: работы были представлены для публикации в «Комментариях». Теперь этого оказалось недостаточно. Найдя общий язык с новым академическим руководством, Шумахер решает Ломоносовские диссертации «послать к почетным Академии членам Эйлеру, Бернулию и другим, какое об оных мнение дадут и можно ли оные напечатать, ибо о сем деле из здешних профессоров ни один основательно рассудить довольно не в состоянии». То есть советник Канцелярии выступил против всех ученых.

Шумахеру пришлось пережить сильнейшее разочарование и досаду, когда через четыре месяца он получил от Эйлера ответное письмо: «Я чрезвычайно восхищен: эти диссертации по большей части столь превосходны, что «Комментарии» Академии наук станут многим более замечательны и интересны, чем труды других академий».

К письму Эйлер приложил еще и отдельный отзыв о диссертациях Ломоносова: «Все сии сочинения не только хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен в точности его доказательств. При сем случае я должен отдать справедливость Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие Академии были в состоянии показать такие открытия, которые показал господин Ломоносов».

Отзыв Эйлера переведен самим Ломоносовым. С этим тоже связана некая история. Письма приходили в Канцелярию, то есть попадали в руки Шумахеру. Ломоносову передали письмо тайком, на очень короткое время (снять копию) и «скорее забрать злополучные листки неукоснительно назад и никому, особливо Шумахеру, не показывать».

Теперь Шумахер все свои зловредные нападки вел только со стороны административно-хозяйственной: слишком велик был авторитет Л.Эйлера.

Сам Ломоносов в начале февраля 1748г. направил Эйлеру благодарственное письмо, в котором радость от того, что всемирно известный ученый своим мнением поддержал его, равняется радости от того, что эта поддержка не по личным мотивам, а по справедливости (Эйлер не был с ним знаком): «Письмо Ваше, знаменитейший муж, на имя его сиятельства нашего президента, где вы соблаговолили отозваться наилучшим образом о моих работах, доставило мне величайшую радость. Считаю, что на мою долю не могло выпасть ничего боле почетного и более благоприятного, чем то, что мои научные занятия в такой степени одобряет тот, чьё достоинство я должен уважать, а оказанную мне благосклонность ценить превыше всего, тот, у кого велики в ученом мире и заслуги и влияние. Поэтому, прочитав переданное нашим почтеннейшим коллегой Тепловым свидетельство Ваше обо мне, я решил, что нельзя было не осудить меня, если бы я обошел молчанием столь великое Ваше одолжение. Отплатить за Ваше благодеяние не могу ничем иным, как только тем, что, храня благодарную память, буду продолжать дело, которое Вы по Вашей исключительной доброте одобряете, и непрестанно прославлять во всяком месте и во всякое время Вашу справедливость в оценке чужих трудов».

Последовал незамедлительный ответ Эйлера лично Ломоносову от 23 марта 1748г.: « Сколь много проницательству и глубине Вашего остроумия в изъяснении претрудных химических вопросов я удивлялся, так незамедлительно Ваше ко мне письмо было принято. Из Ваших сочинений с превеликим удовольствием я усмотрел, что Вы в истолковании химических действий далече от принятого у химиков обыкновения отступили и с особенным искусством в практике высочайшее основательной знание физики везде проявляете. Почему не сомневаюсь, что нетвердые и сомнительные основания сея науки приведете к полной достоверности…».

Между ними завязалась переписка, что было не менее важным в те времена для обмена информацией, чем публикации в журнале.

Поэтому ответное письмо Ломоносова Эйлеру от 5июля 1748г. можно назвать самостоятельным научным произведением. В нем Ломоносов, подводя итоги более чем тысячелетнему развитию физических представлений о неуничтожимости материи и движения, формулирует свой «всеобщий закон природы» в простых терминах: «…все случающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимется от чего-либо другого,.. сколько материи прибавляется какому-либо телу столько же теряется у другого. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения, ибо тело, движущее своею силою другое, столько же оные у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает».

В этом же письме: «Всю систему корпускулярной философии мог бы я опубликовать, однако боюсь: может показаться, что даю ученому миру незрелый плод скороспелого ума, если я выскажу много нового, что по большей части противоположно взглядам, принятым великими мужами…выслушайте благожелательно то, что я предлагаю…заметив пункты, недостаточно у меня обоснованные, не поставьте себе в труд откровенно указать мои ошибки».

Излагая всеобщий закон природы, Ломоносов не разделяет мир на физический и человеческий: человек- часть природы.

Эйлер заинтересованно следил за исследованиями Ломоносова, всегда восхищавшими его неожиданностью предлагаемых решений. Он еще не успел получить письма Ломоносова с выражением благодарности, а уже 31 января 1748г. послал в Петербург письмо о намечаемом Берлинской Академией конкурсе в 1749г. на лучшую работу о происхождении селитры, особо оговаривая желательность участия в этом конкурсе Ломоносова: «Я не сомневаюсь, чтобы об этом кто-нибудь мог представить лучше, чем г.Ломоносов, которого я прошу убедить взяться за эту работу. Было бы, конечно, весьма почетно, если бы член Академии, да к тому же русский, удостоился нашей премии».

26 апреля 1749 г. Эйлер нетерпеливо осведомляется в письме к Шумахеру: « Я слышал от нашего химика, что из присланных на соискание премии о селитре статей одна очень хороша и основательна. Автор ее мне неизвестен, но я хотел бы, чтобы им был господин Ломоносов. Поскольку все статьи присланы недавно и в одно время, хотелось бы знать, уверен ли господин Ломоносов, что рукопись получена, и имеет ли он в этом расписку».

Эйлер относился к Ломоносову как к своему открытию, следил за его успехами, сохраняя о нем высокое мнение.

В январе 1750г. в письме к Шувалову Эйлер выразил своё восхищение похвальным словом Ломоносова Елизавете Петровне, которое было произнесено на латинском языке в публичном собрании Академии наук 26 ноября 1749г.: «Мне было очень приятно узнать о блестящем успехе последней публичной ассамблеи императорской Академии: речи, произнесенные по этому случаю, заслужат похвалы всего ученого мира. Это особенно относится к «Панегирику» г.Ломоносова, который мне представляется настоящим шедевром в своем роде».

Эйлер аккуратно отвечал на все письма Ломоносова.

Ломоносов же сдержал данное Эйлеру обещание прославлять во всяком месте и во всякое время его научную справедливость.

В 1749г. он перевел на русский язык предисловие к знаменитому трактату Эйлера «Корабельная наука», эта работа Ломоносова была утеряна и опубликована только в 1983 г. в 11 томе его Полного собрания сочинений (Панькина Н.М., Тюлина И.А. Научные контакты Ломоносова и Эйлера по проблемам механики. Вестник Пермского университета. Вып.4. Пермь: изд. ПГУ, 2006. с. 167 – 172.)

В конце семилетней войны Ломоносов через канцлера М.И.Воронцова выхлопотал Эйлеру возмещение убытков, понесенных им во время штурма Берлина Русскими войсками.

Ломоносов делился с Эйлером своими идеями и замыслами: «…я сооружаю плотину, мельницу и лесопилку, над которой возвышается самопишущая метеорологическая обсерватория (описание которой опубликую)», «…душою я блуждаю в древностях российских».

Получилось, что мысль Шумахера направить диссертации Ломоносова на отзыв Эйлеру не оказалась напрасной. Отзывы и участие Эйлера сыграли счастливую роль в судьбе Михаила Васильевича, который приобрел вес в Академии, поднялся в глазах президента, стал не по зубам противникам.

Библиографический список

1. *Ломоносов, М.В.* Полное собрание сочинений [Текст] / М.В.Ломоносов / Т 10. Служебные документы и письма 1736 – 1765 г.г. М, - Л.: АН СССР. 1957, С. 436 – 598 , 799 – 887 (Письма № 9, 11, 41, 47, 72, 88, 102).

Математический документ (предположительно Григория Котошихина, 1666-1667 гг.) в Шведском государственном архиве (Стокгольм)

Ингрид Майер, Р.А. Симонов, Ю.Э. Шустова

Предварительные замечания

Котошихин Григорий Карпов (ок. 1630 – XI. 1667) хорошо известен в историографии благодаря своему труду «О России в царствование Алексея Михайловича», был подьячим Посольского приказа. Летом 1664 г. он бежал в польские пределы, не желая участвовать в придворной интриге (по его словам). После скитания по ряду стран Котошихин в начале 1666 г. прибыл в Стокгольм. Здесь он написал в 1666-1667 гг. свой труд о русских обычаях и структуре Московского государства. В конце указанного периода, проживая у переводчика с русского языка Даниила Анастасиуса, в пьяной драке Котошихин убил хозяина и тяжело ранил сестру его жены. Суд приговорил Котошихина к смертной казни, приведенной в исполнение в пригороде Стокгольма, тело анатомировано в Упсале. О творческом «наследстве» Котошихина, кроме текста «О России в царствование Алексея Михайловиыа», ничего в историографии как будто бы не сообщалось[37].

Предлагаемый вниманию читателей математический документ, не имеющий наименования, может быть назван «таблицей чисел», предположительно составленной Котошихиным. Документ входит в состав рукописи, хранящейся в Шведском национальном архиве в Стокгольме, в фонде «Extranea»[38]. Рукопись состоит из восьми листов формата 227x167 мм. Первый и последний листы не содержат никакого текста, но имеют рамку величиной 153x110 мм, разделенную на две колонки. На лицевой стороне листа 2 имеется кириллический алфавит в двух разновидностях: сначала прописные буквы, затем строчные. Следующие три страницы содержат рамку, подобную указанной на пустых страницах, однако разделенную на пять колонок: первая содержит буквы кириллического алфавита в латинской транскрипции; вторая - те же буквы, но кириллицей, с их названиями латиницей; третья – русские названия букв. Последние два столбца не содержат никакого текста. Мы предполагаем, что автор планировал добавить там инструкции, как произносить русские звуки, примерно как это было сделано в печатном издании *Alfabetum Rutenorum* («Русская азбука»), первом учебнике русского языка как иностранного, напечатанного печатником Петром фан Селовым в Стокгольме без указания года, но примерно в конце 1630-х – начале 1640-х гг.[39]

На следующих страницах не обнаруживается никакого соответствия между печатной и рукописной версией. Там, где в печатной версии *Alfabetum* идут три страницы со слогами (ба ва га …, бе ве ге…, бла вла гла … бле вле гле…), рукопись содержит две страницы скорописных букв – подобное, разумеется, было бы невозможно в любом печатном издании. Автор рукописи владел исключительно широким спектром вариантов букв. Для каждой из

[37] *Смирнов И.П.* Котошихин Григорий Карпов // Словарь книжников и книжности Древней Руси. Вып. 3 (XVII в.), часть 3. СПб., 1993. С. 186-190. Трагическая судьба постигла еще одного известного русского – резидента в Швеции князя А.Я. Хилкова (1676-1716), написавшего в начале XVIII в. в шведском плену получившую в историографии отклик и неоднократно переиздававшуюся книгу «Ядро российской истории». А.Я Хилков скончался в Швеции на острове Висингё, тело покойного выдано России и похоронено в Александро-Невской Лавре (*Долгова С.Р.* Князь А.Я. Хилков – автор книги «Ядро российской истории» // XIII Международная научная конференция по проблемам книговедения «Книга в информационном обществе»: В 4 ч. М., 2014. Ч. 1. С. 46-49).

[38] Riksarkivet, Extranea 157: 6.

[39] Подробнее см.: *Maier Ingrid*. Wer war der Autor von *Alfabetum Rutenorum* (Stockholm ohne Jahr)? // Schittpunkt Slavistic. Ost und West im wissenschaftlichen Dialog. Festgabe fur Helmut Keipert zum 70. Geburtstag / Hrsg. Irina Fodtergera. Teil 3. Bonn. S. 333-357.

букв *а, б, в* представлена целая строка вариантов (19 для *а*, 21 для *б*, 23 для *в*). Большинство оставшихся букв представлено вариантами, занимающими лишь половину строки (обычно по 7-12 вариантов). Буква *фита*, однако, опять представлена целой строкой вариантов, а также «дублетные буквы» *юс малый*, йотированное *а* и *я* (здесь рассматриваемые, очевидно, как варианты одной буквы, формы которых постепенно переходят в другую графему) вместе занимают целую строку.

На л. 5 начинается очень короткий лютеранский катехизис (в левой колонке): сначала «Отче наш», после чего следует «Символ веры» и «Десять заповедей», в принципе как в печатном *Alfabetum* (там имеются еще и другие части катехизиса). Однако правая колонка, содержащая в печатном издании соответствующие шведские тексты, осталась пустой. Причиной тому может быть то, что автор оставил эту колонку для того, чтобы ее заполнил кто-то другой. Возможно, он не мог прочесть (или, по крайней мере воспроизвести) готический шрифт шведского текста в печатном учебнике. Первые две части катехизиса написаны полууставом, весьма похожим на печатную версию. Тем временем, последняя часть, "Десять заповедей", исполнена приказной скорописью. Наша таблица с числами помещена на последнем листе (лицевая сторона 8 листа; оборотная сторона 8 листа пустая).

Таблица чисел

Числовая таблица занимает почти всю лицевую сторону 8-го листа рукописи, поделенную на две колонки (рис. 1). Левая колонка имеет 14 строк, в первых четырех строках воспроизводится по пять чисел, а в последующих 10-ти содержится по четыре числа. Правая колонка заполнена на 9 строк, в первых 8-ми приводится по четыре числа, в последней, 9-й строке, – два. Свободная от чисел нижняя часть правого столбца заполнена декоративной виньеткой (своеобразной «загогулиной»). Текст представляет собой сводку древнерусских «буквенных цифр» и записанных на их основе чисел, которые использовались в России вплоть до Петровской поры, постепенно вытесняясь современными индоарабскими.

Текст. Дополнительные сведения: графемы XVII в. переданы индоарабскими цифрами, в скобках указаны современные значения; переход на новую строку обозначен косой чертой; выносные буквы даются на строке в круглых скобках; знак тысяч имеет форму косой черты с двумя перечеркиваниями, к графемам присоединяется снизу, с наклоном влево, в нашей публикации заменяются словами в скобках *знак тысяч* или обозначениями *з.т.*; титла имеют вид горизонтальных черточек, в нашей публикации опускаются; между «буквенными числами» встречается разделительный значок в виде точки, иногда он виден слабо или незаметен.

Левая колонка: а (1) в (2) г (3) д (4) е (5) / s (6) з (7) и (8) *0* (9) i (10) / аi (11) вi (12) гi (13) дi (14) еi (15) / si (16) зi (17) иi (18) *0*i (19) к (20) / ка (21) кв (22) кг (23) кд (24) / ке (25) кs (26) кз (27) ки (28) / к*0* (29) л (30) ла (31) *и прочаа* / м (40) ма (41) *и про(ч)* н (50) / на (51) *и про(ч) кси* (60) *кси*а (61) *j про(ч)* / о (70) оа (71) *j про(ч)* п (80) / па (81) *j про(ч)* ч (90) ча (91) *j про(ч)* / р (100) с(200) т (300) у (400) / ф (500) х (600) *пси* (700) *от* (800) / ц (900) (*знак тысяч*)а (1000) (<u>*з.т.*</u>)в (2000) (*з.т.*)г (3000).

Правая колонка: (*з.т.*)д (4000) (*з.т.*)е (5000) (*з.т.*)s (6000) (*з.т.*)з (7000) / *(з.т.)*и (8000) (*з.т.)0* (9000) (*з.т*)і (10000) (*з.т.*)а (*з.т.*)і (11000) / (*з.т.)*в (*з.т.*)і (12000) (*з.т.*)г (*з.т.)*і (13000) (*з.т.)*д (*з.т.*)і (14000) (*з.т.)*е (*з.т.*)і (15000) / (*з.т.*)s (*з.т.*)і (16000) (*з.т.*)з (*з.т.*)і (17000) (*з.т.*)и (*з.т.*)і (18000) (*з.т.)0* (*з.т.*)і (19000) / (*з.т.*)к (20000) (*з.т.*)л (30000) (*з.т.*)м (40000) (*з.т.)*н (50000) / (*з.т.*)кси (60000) (*з.т.*)о (70000) (*з.т.)*п (80000) (*з.т.)*ч (90000) / (*з.т.)*р (100000) (*з.т.*)с (200000) (*з.т.*)т (300000) (*з.т.)*у (400000) / (*з.т.*)ф (500000) (*з.т.)*х (600000) (*з.т.)пси* (700000) (*з.т.)от* (800000) / (*з.т.*)ц (900000) заключительный символ: *аз* (1) с тысячным знаком, расположенный внутри кружка (о его значении речь пойдет позже).

Значение публикуемого математического документа состоит в том, что до сих пор не были известны «рабочие» справочные материалы, связанные с практикой записи чисел российского государственного делопроизводства середины XVII в. Судить о такого рода потребностях можно по деятельности Посольского приказа, которая свидетельствует, что переводчикам и писцам этого важного государственного учреждения постоянно приходилось сталкаваться с крупными числами. О масштабах чисел говорят переводы газетных статей, делавшиеся в Посольском приказе, где шла речь о численности армий и жертв среди солдат, исчислявшихся тысячами. Или же они имели дело со списками товаров, привозимых на судах в Голландию из Восточной Индии, где перечислялись тысячи фунтов сахара, перца или неграненых алмазов. Например, в одном таком списке 1671 г. сообщалось о 539208 фунтах черного перца, 174 410 фунтах малакского олова, 34350 штук крашеных полотен и пр.

Время написания рукописи, ее атрибуция Григорию Котошихину и назначение

Анализ филиграней (водяных знаков бумаги рукописи) дал довольно точный результат. На втором листе помещена верхняя часть филиграни «голова шута» с пятью бубенчиками (или зубцами?), ее нижняя часть оказалась на седьмом листе; на третьем и восьмом листах имеется также контрамарка с литерами «PHO». Этот водяной знак «голова шута» с пятью бубенчиками (или зубцами) и контрамаркой «PHO» неоднократно упомянут в научной литературе. Первым его документировал Wibiral (1877 г.): 167, № 3k (не позже 1669 г.) и № 3l (примерно 1670 г.), потом Laucevicius (1967 г.): № 2646 (1668 г.), Ruden (1968 г.), приложение № 27 (1664-1668 гг.), Guadriault (1995 г.): № 1020 (1665 г.) и Lindberg (1998 г.): A85, № 418 (1668 г.). По словам последнего, бумага произведена бумажником Пьерром Омо (Pierre Homo) из Кана в Нормандии (Lindberg, A 179). Ее широко использовали в Стокгольме во второй половине 1660-х гг., как свидетельствует скрупулезное исследование У. Рюдена, посвященное анализу филиграней в музыкальной коллекции Duben-a, хранящейся в Библиотеке Упсальского университета[40]. Абсолютно все документы со знаком «голова шута» и контрамаркой «PHO», которые мы видели как в архивных документах, так и в

[40] Ruden U. 1968 г.

альбомах филиграней, относятся к периоду 1664-1670 гг.

Для того, чтобы атрибутировать рукопись, предположительно приписываемую Котошихину, нужно выявить писца, ранее работавшего в Посольском приказе в Москве и обладавшим выдающимся каллиграфическим мастерством. Наиболее известным (и, возможно, единственным) кандидатом на эту роль из тех, кто проживал в Швеции во второй половине 1660-х гг. и отвечает нашим критериям, является, очевидно, Григорий Котошихин. Он служил в Посольском приказе с 1658 по 1664 гг.[41], после чего покинул Россию и вначале отправился в Польшу, затем в Силезию, Пруссию и Любек, а затем, через Нарву, он, наконец, прибыл в Стокгольм 5 февраля 1666 г.[42] Еще в годы службы в Посольском приказе, благодаря своим каллиграфическим умениям, он получил указание создать чистовую копию письма Царя шведскому королю[43]. Сравнительный анализ филиграни «голова шута» в рукописи из Государственного архива Швеции с филигранями из второй части рукописной книги Котошихина «О России в царствование Алексея Михайловича» (а именно л. 191-249[44], ср.Pennington 1980: 8) позволяет установить, что среди них имеются совершенно идентичные, включая положение вержеров и понтюзо по отношению к самим филиграням. Следовательно, эта бумага рукописи, которая точно была использована Котошихиным, и бумага рукописи с математическим текстом относится к одной партии.

Конечно, установленный факт идентичности бумаги не указывает на то, что обе рукописи были созданы одним и тем же автором. Филигрань лишь позволяет установить временной интервал, когда рукописи были созданы. В связи с этим наш следующий шаг состоял в тщательном сравнении почерка в обеих рукописях, а также прочих деталей – таких, как использование художественных инициалов и орнаментики. Проблема почерка, вероятно, является наиболее сложной. Однако если сравнить, к примеру, запись чисел в рукописи книги о России Котошихина (в первую очередь, в указателях на л. 234-249, где есть большое количество примеров) с аналогичными записями чисел в рукописи из шведского архивного фонда Extranea, то не остается никаких сомнений, что именно Котошихин был автором второй рукописи. Даже “загогулины”, которые используются в рукописи его книги о России для заполнения страниц[45] – например, на л. 232 об., 241 об., 244 об., 245 об. – могут быть обнаружены также и в другой рукописи (л. 4 об., 8).

Назначение рукописи фонда Extranea может быть понятно из челобитной Котошихина Шведскому государственному совету от марта 1666 г., в которой он, помимо прочего, ходатайствует о выделении ему студента, который мог бы его учить шведскому языку. В свою очередь Котошихин учил бы его русскому, что в будущем позволило бы этому

[41] До того – наверное, уже примерно с 1645 г. – он служил в приказе Большого дворца; см.: *Беляков А.В.* Жизнь Григория Котошихина (по материалам архива Посольского приказа) (в печати).
[42] Pennington 1980: 3-5.
[43] *Беляков А.В.* Указ. соч.
[44] Упсальская университетская библиотека, сигн. Slav. 29.
[45] Ср. Pennington 1980: 9.

студенту служить Шведской Короне в качестве переводчика[46]. Котошихин мог создать свой «учебник русского языка как иностранного», используя печатный Alfabetum Rutenorum по собственной инициативе, либо по приказу шведских властей - именно с целью обучения будущего шведского переводчика. Так или иначе, нет никакого повода сомневаться в авторстве Котошихина.

В таком случае промежуток времени, когда рукопись могла быть создана, сокращается с 5-6 до полутора лет. Поскольку Котошихин прибыл в Стокгольм в феврале 1666 г., а в ноябре 1667 г. он был казнен, то за это время он должен был создать как чистовую копию рукописи своей книги о России, так и свой «учебник». Поскольку филигрань бумаги «учебника» и второй части большой книги одинаковая, нам кажется вероятным, что наша рукопись была создана в 1667 г., ближе к концу недолгой жизни Котошихина, а не в начале его «шведского периода».

Значение математического документа Котошихина

…..Для истории науки «таблица чисел» Котошихина может иметь следующее значение. Русских средневековых документов типа «цифровых алфавитов» сохранилось не так уж много, а связанных с именами известных персон – и того меньше. Невеликий ряд таких источников, по-видимому, можно начать с «Азбуки пермской» св. епископа Стефана Пермского, создавшего в XIV в. алфавит для предков зырян, одного из финно-угорских народов, проживающих на территории современной России. В историографии «Азбука пермская» до недавнего времени трактовалась, как исключительно буквенный алфавит. Однако помещение этого источника в историко-математический контекст позволило обосновать, что этот алфавит является одновременно и буквенным, и цифровым[47]. Например, в византийской письменной традиции буквенный алфавит короче (24 знака) цифрового (27 знаков). В кириллице ситуация противоположная – цифровой алфавит короче (27 знаков) буквенного (более 40 знаков).

По-видимому, по замыслу славянских первоучителей свв. Константина-Кирилла и Мефодия, глаголица задумывалась, как система из 36 знаков, которые одновременно выступали «в роли» и букв, и цифр. Такая трактовка происхождения глаголицы разделяется не всеми учеными, так как для полной определенности вывода не найдены / не сохранились необходимые источники. Тогда как соответствующие данные о «буквенных» пермских цифрах известны. Главным из таких источников является «Азбука пермская», которая содержит, кроме 27-ми букво-цифр, примечательный 28-й знак. Он представляет собой 27–й знак (имеющий числовое значение 900), к которому «привешен» тысячный знак. Это

[46] Челобитная Котошихина опубликована в книге: Pennington 1980: 761-762.

[47] *Морозов Б.Н., Симонов Р.А.* Об открытии цифровой системы Стефана Пермского (XIV в.) // Вопросы истории естествознания и техники. 2008, № 1. С. 3-31.

показывает, что 28-й знак выражает 900000. Следовательно, в «Азбуке пермской» основная система из 27 букво-цифр дополнена особым знаком (28-м), указывающим предельную числовую «мощность» этой 27-значной числовой системы – 900 тысяч.

Традиция указания «мощности» числовой системы сохранена и Котошихиным. Свою «таблицу чисел» он завершает особым символом в виде *аза* с тысячным знаком, обведенных окружностью. Предпоследний знак его «таблицы» выражает 900 тыс., поэтому на первый взгляд можно подумать, что следующим знаком будет 1 млн. Однако в 2000 г. был опубликован неизвестный ранее «цифровой алфавит», представленный в рукописной «Арифметике» нач. XVIII в. (ГИМ, Увар. № 762. Л. 62 об.). В нем начальная часть совпадает с числовой системой «учебника» Котошихина. Причем воспроизводимый Котошихиным *аз* с тысячным знаком в кружке в «цифровом алфавите» «Арифметики» несомненно имеет значение 1 миллиарда[48]. Следовательно, в свете традиции указывать для числовых систем их «мощность», у Котошихина был указан предел, до которого рассчитана приведенная им числовая система – 1 миллиард.

Однако основное историко-математическое значение «таблицы чисел» Котошихина состоит в другом. В Древней Руси последовательно (от века к веку) разрабатывалась система больших чисел, в которой каждый разряд, начиная с разряда тысяч, приобретал свое обозначение. Тысячи обычно передавались наклонной чертой, присоединявшейся к «буквенной цифре» слева или снизу. Со временем эта наклонная черта приобрела одно перечеркивание, затем – два, иногда – три. Десятки тысяч («тмы») записывались посредством обведения окружностью знаков первых девяти «буквенных цифр». Сотни тысяч («легионы») выражались аналогичным образом – окружностями из точек. Существовали особые знаки для миллионов («леодров»), десятков миллионов («воронов») и сотен миллионов («колод»). Эта система обозначений сложилась к 1643 году[49]. Сведения суммировались в так называемых «цифровых алфавитах», содержащих набор основных 27-ми «буквенных цифр», а также данные о дополнительных знаках для выражения разрядов больших чисел, начиная с тысяч. В историографии эта система получила название «малого числа». Б.В. Гнеденко также выделялась система «числа великого словенского»[50]. Однако названия «малое число» и «число великое словенское» в подлинных славяно-русских текстах не зафиксированы. Здесь все системы или способы выражения чисел буквенными знаками, начиная со знака р=100, именуются «великим числом»[51]. В введенном в 2000 г. в научный оборот «цифровом алфавите», представленном в рукописной «Арифметике» (ГИМ, Увар. № 726, кон. XVIII в.) термины тьма, легион, леодр, ворон, колода вводятся как степени миллиона. Было неизвестно, каким был «статус» этого алфавита – теоретической разработки

---

[48] *Симонов Р.А.* Новые материалы по истории математики Древней Руси // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2000. Вып. 5 (40). С. 260, рис. 4.

[49] *Симонов Р.А.* Загадка древнерусской системы чисел // Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль, 2005. С. 311-326.

[50] *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. 2-е изд. М., 2005. С. 229.

[51] *Симонов Р.А.* Новы материалы… С. 244-271.

или системы, реально использующейся на практике. Сравнение «таблицы чисел» Котошихина с «цифровым алфавитом» «Арифметики» из ГИМа показывает, что обе системы совпадают в своей начальной части. Это значит, что “пособие” Котошихина, очевидно, отражавшее приказную практику России середины XVII в. в записи чисел, подтверждает государственное использование числовой системы того типа, который представлен в «Арифметике» из ГИМа. В этом заключается/состоит важность «таблицы чисел» Котошихина для истории науки. При этом не только русской истории науки, но и общеевропейской. Дело в том, что в ряде западноевропейских стран (например, Франции) с конца XV в. «вводятся термины биллион, триллион, квадриллион и т.д. для степеней миллиона…»[52]. Аналогичная система, но на архаичной «буквенной» основе, складывалась и в России, как показывает «учебник» Котошихина. Это свидетельствует об определенной тенденции к сближению в области математики России с Западом - за полстолетие до Петровских преобразований.

«Таблица чисел» Котошихина в контексте трактовки «русских чисел» иностранцами, посещавшими Россию в первой половине XVII в.

Довольно развернутое изложение данных о русских числах дается в «Разговорнике» Тонни Фенне 1607 года[53]. Здесь на стр. 545-552 в разделе «Число рюскую» приводятся названия русских числительных в трех колонках: в левой – полоуставом (кириллица), переходящим в скоропись, в центральной – латиницей с элементами готического шрифта, в правой - индоарабскими цифрами. Сплошная последовательность числительных идет до ста, затем следует поразрядный счет: двести, триста,…, девятьсот, тысяча, тма (10000), легион (100000), «легиодръ» Legiodr 1000000 (т.е. леодр) (с. 551-552). Далее происходит возвращение к началу, и счет ведется вновь от единицы, но уже по пяткам до ста – как прежде, в три столбца. Завершается перечень сведениями о записи числительных с приставкой «пол-», например: полтора (1½), полтретьи (2½), полчетверты (3½),…, «полъодинатцаты» (10½) (с. 553-554). Затем заголовок повторяется - «Число рускую» (с незначительным изменением в записи), и идет материал о начертании русских «буквенных чисел» с параллельным указанием их значения в индоарабской нумерации. Завершают текст данные о выражении больших чисел. Десятки тысяч (тмы) даются поразрядно – в сплошных окружностях, сотни тысяч (легионы) – также поразрядно - в окружении пяти изогнутых черточек, похожих на тильды, миллион («легиодръ») – в виде «аза», окруженного шестью

---

[52] *Юшкевич А.П.* История математики в России… С. 13.

[53] Tonnies Fenne’s Low German Manual of Spoken Russian Pskov 1607 / Edited by L.L. Hammerich, Roman Jakobson, Elizabeth van Schooneveld, T. Starck and Ad. Stender-Petersen. Volume I. Facsimile Copy. Copenhagen, 1961. P. 545-559; см. о числовой системе памятника: *Симонов Р.А.* Русская средневековая система больших чисел // История и методология естественных наук. Выпуск IX. Математика, механика. М., 1970. С. 213-214.

мелкими кружками, разомкнутыми наружу (с. 557-559)[54].

Запись чисел содержит признаки, позволяющие датировать представленную в «Разговорнике» Тонни Фенне традицию. Так, в этой числовой системе используется *юс малый* в значении 900. Рубежом применения на Руси этого знака (как 900) является конец XIV – начало XV вв. В конце XIV в. на Руси уже употребляется знак *цы* в значении 900, а *юс малый* продолжал использоваться в том же качестве и в XV в. Значит, указанная примета (*юс малый*=900) выводит на XIV-XV вв. Еще одним датирующим показаелем, указывающим примерно на то же время, XIV-XV вв., является предельное число миллиона (леодра в форме «легиодръ»). Однако решающим датирующим признаком будет использование *юса малого* в значении 900. Дело в том, что в Пскове с 1425 г. стал стабильно применяться знак *цы*=900 на государственных печатях, и с 1447 г. на печатях псковских пригородов[55]. Значит, числовая традиция, представленная в «Разговорнике» Тонни Фенне, не могла появиться позже середины 1-й половины XV в. Это согласуеится с выводами Ф.Л. Хорошкевич о том, что в основу «Разговорника» Тонни Фенни легли псковские источники XVI, а также XV веков[56]. Значит, ко времени составления «Разговорника» Тонни Фенни – 1607 г., - представленная в нем информация о числах устарела, особенно в части крупных разрядов, начиная с 900.

Данные о русских числах также были представлены в «Словаре - дневнике» (1618-1619 гг.) англичанина Ричарда Джемса[57]. Числовой материал Ричарда Джемса по объему значительно скромнее, чем у Тонни Фенне, но по содержанию несколько новее. Во всяком случае 900 у него выражается знаком *цы*. Числительные он записал так, как воспринял на слух: 1 - «первой», 2 – «другой», 3 – «трее», 4 – «чатира», 5 – «пете», 6 – «шесте», 7 – «сем», 8 – «восема», 9 – «девет» и т.д. Большие числа доводятся Ричардом Джемсом всего лишь до 60000, предельным числом указывается *тьма тысяч* в значении миллиона (a million). Однако это неверно, так как 10000x1000=10000000, то есть 10 млн. Б.А. Ларин, который тщательно комментировал почти каждое слово у Ричарда Джемса, это место оставил без внимания. Возможно, он не заметил ошибки.

Материалы как Тонни Фенне, так и Ричарда Джемса - исключительно ценные исторические и лингвистические источники, но они требуют к себе внимательного подхода, ибо представленная в них информация может быть не во всем безупречной. Так, если ее сравнивать с “таблицей чисел” Котошихина, то видно, что в одном случае она будет более полезной (чем у Тонни Фенне), а в другом – достовернее (чем у Ричарда Джемса). Причину этого нетрудно усмотреть в том, что наблюдения иностранцев о русской культуре были, скорее, любительскими и неизбежно поверхностными, так как делались со стороны. Котошихин же излагал, по существу, свои профессиональные знания и как бы делал это

19

20*Янин В.Л.* Вислые печати Пскова // Советская археология. 1960, № 3. С. 237-261.

[56] *Хорошкевич А.Л.* Быт и культура русского города по словарю Тонни Фенне 1607 г. // Новое о прошлом нашей страны. М., 1967. С. 201, 215-216; см. также: *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М., 1977. С. 82-83.

[57] *Ларин Б.А.* Русско-английский словарь-дневник Ричарда Джемса. Л., 1959. С. 100-102, 370-371.

изнутри российского культурного процесса.

На наш взгляд, шведам, изучавшим русский язык, крайне не повезло, что в августе 1667 г. Котошихин во время пьяной драки нечаянно убил своего собутыльника. Если бы этого не произошло, то несколько поколений переводчиков в Швеции могли иметь в качестве наставника этого носителя русского языка, который владел громадным опытом, обретенным за годы службы в московских приказах.

Математическая таблица из рукописного учебного пособия по русскому языку для шведов (Стокгольм, 1667 г.)*

И. Майер, Р.А. Симонов, Ю.Э. Шустова

Предлагаемая вниманию читателей математическая таблица, или «таблица чисел», входит в состав рукописи, хранящейся в Шведском национальном архиве в Стокгольме[58]. Рукопись состоит из восьми листов формата 227х167 мм. Первый лист и оборот последнего не содержат никакого текста, но имеют рамку величиной 153х110 мм, разделенную на две колонки. Уже на основе этого внешнего сходства с изданием *Alfabetum Rutenorum*, первым печатным учебником русского языка как иностранного (Стокгольм: печатник фан Селов, б.г. (прим. кон. 1630-х – нач. 1640-х гг.)[59], можно сделать вывод, что рукопись как-то связана с этим печатным изданием; по содержанию оба учебных пособия тоже большей частью совпадают.

На л. 2 имеется кириллический алфавит в двух разновидностях: сначала прописные буквы, затем строчные. Следующие три страницы содержат рамку, подобную указанной на пустых страницах, однако разделенную на **пять** колонок: первая содержит буквы кириллического алфавита в латинской транскрипции; вторая – те же буквы, но кириллицей, с их названиями латиницей; третья – русские названия букв. Последние два столбца не содержат никакого текста. Мы предполагаем, что автор планировал добавить там инструкции, как произносить русские звуки, примерно как это было сделано в печатном оригинале, *Alfabetum*.

На следующих страницах не обнаруживается никакого соответствия между печатной и рукописной версией. Там, где в *Alfabetum* идут три страницы со слогами (ба ва га…, бе ве ге…, бла вла гла…, бле вле гле…), рукопись содержит две страницы скорописных букв – подобное, разумеется, было бы невозможно в любом печатном издании. Автор рукописи владел исключительно широким спектром вариантов букв. Для каждой из букв *а, б, в* представлена целая строка вариантов (19 для *а*, 21 для *б*, 23 для *в*). Большинство оставшихся букв представлено вариантами, занимающими лишь половину строки (обычно по 7–12 вариантов). Буква *θ*, однако, опять представлена целой строкой вариантов, а также «дублетные буквы» ѧ, йотированное *а* и *я* (здесь рассматриваемые, очевидно, как варианты одной буквы, формы которых постепенно переходят в другую графему) вместе занимают целую строку.

На л. 5 начинается очень короткий лютеранский катехизис (в левой колонке): сначала «Отче наш», после чего следует «О вере» (т.е., символ веры) и «Десять заповедей», в принципе как в печатном *Alfabetum* (там имеются еще и другие части катехизиса). Однако правая колонка, содержащая в печатном издании соответствующие шведские тексты, осталась пустой. Причиной тому может быть то, что автор оставил эту колонку для того,

[58] Riksarkivet, Extranea 157: 6.

[59] Подробнее см.: *Maier Ingrid*. Wer war der Autor von *Alfabetum Rutenorum* (Stockholm ohne Jahr)? // Schittpunkt Slavistik. Ost und West im wissenschaftlichen Dialog. Festgabe für Helmut Keipert zum 70. Geburtstag / Hrsg. Irina Podtergera. Teil 3. Bonn, 2012. S. 333–357.

чтобы ее заполнил кто-то другой. Вероятно, он не мог прочесть (или, по крайней мере воспроизвести) готический шрифт шведского текста в печатном учебнике. Первые две части катехизиса написаны полууставом, весьма похожим на печатную версию. Тем временем, последняя часть, «Десять заповедей», исполнена приказной скорописью. Наша таблица с числами помещена на последнем листе (лицевая сторона восьмого листа; оборотная сторона листа пустая); см. рис. № 1.

Когда, кем и для какой цели была написана рассматриваемая рукопись?

В уже упомянутой работе И. Майер (ср. прим. 2) были описаны результаты тщательного анализа бумаги рукописи, проведенные, в частности, на основе ее водяных знаков. Стокгольмская рукопись содержит (на л. 2 и 7 соответственно) филигрань «голова шута» с пятью зубцами; контрамарка с литерами «PHO» имеется на л. 3 и 8. Знак «голова шута» с пятью зубцами и контрамаркой «PHO» неоднократно упомянут в научной литературе[60]. По словам А. Линдберга[61], бумага произведена бумажником Пьерром Омо (Pierre Homo) из Кана в Нормандии. Ее широко использовали в Стокгольме во второй половине 1660-х гг., как свидетельствует скрупулезное исследование Й.У. Рюдена, посвященное анализу филиграней в музыкальной коллекции Дюбена (Düben), хранящейся в Библиотеке Упсальского университета[62]. Абсолютно все документы со знаком «голова шута» и контрамаркой «PHO», которые мы видели как в архивных документах, так и в альбомах филиграней, относятся к периоду 1664–1670 гг. – впрочем, филигрань не только похожа, но **идентична** филиграни на бумаге последних листов (л. 191–249[63]) рукописной книги Григория Котошихина «О России в царствование Алексея Михайловича», хранящейся в упсальской университетской библиотеке (сигн. Slav. 29), то есть, бумага в книге Котошихина и бумага рукописи из стокгольмского архива (с математической таблицей) относится к одной партии.

Кем была написана рукопись? Для того, чтобы атрибутировать рукопись, нужно выявить писца, ранее работавшего в Посольском приказе в Москве и обладавшим выдающимся каллиграфическим мастерством. Вероятно, единственным кандидатом на эту роль из тех, кто проживал в Швеции во второй половине 1660-х гг. и отвечает нашим критериям, является уже упомянутый Григорий Котошихин. Он служил в Посольском приказе с 1658 по 1664 гг.[64] В 1664 г. он был отправлен в Польшу (с которой в то время шла война); там он покинул своего начальника и после долгого странствования (через Силезию, Пруссию, Любек и

[60] См. подробно в работе *Maier I.*, Wer war der Autor von Alfabetum Rutenorum ...?

[61] См.: *Lindberg N.J.* Paper Comes to the North. Sources and Trade Routes of Paper in the Baltic Sea Region 1350–1700. A Study Based on Watermark Research. Marburg; Lahn, 1998. P. A 179.

[62] *Rudén J.O.* 1968. Vattenmärken och musikforskning: presentation och tillämpning av en dateringsmetod på musikalier i handskrift i Uppsala universitetsbiblioteks Dübensamling. Vol. 2 (Bilaga), Vattenmärken med motiv Narr i Uppsala universitets Dübensamling (1650–1690) [Licentiat-Dissertation, Universität Uppsala, 1968]. Работа в доступна: http://www.ordommusik.se/duben

[63] Ср.: *Pennington A.E.* Kotošichin, G. O Rossii v carstvovanie Alekseja Mixajloviča: text and commentary A.E. Pennington. Oxford, 1980. P. 8.

[64] До 1658 г. – наверное, уже примерно с 1645 г. – он служил в приказе Большого дворца; см.: *Белокуров С.А.* О Посольском приказе. М., 1906. С. 50 (прим. 2).

Нарву) прибыл в Стокгольм 5 февраля 1666 г.[65] Еще в годы службы в Посольском приказе, благодаря своим каллиграфическим умениям, он не раз получал указание создать чистовую копию письма Царя шведскому королю[66].

Конечно, установленный факт идентичности бумаги не указывает на то, что обе рукописи были созданы одним и тем же автором. Филигрань лишь позволяет установить временной интервал, когда рукописи были созданы. В связи с этим наш следующий шаг состоял в тщательном сравнении почерка в обеих рукописях, а также прочих деталей – таких, как использование инициалов и орнаментики. Проблема почерка, вероятно, является наиболее сложной. Однако если сравнить, к примеру, запись чисел в рукописи книги о России Котошихина (в первую очередь, в указателях на л. 234–249, где есть большое количество примеров) с аналогичными записями чисел в нашей математической таблице, то не остается никаких сомнений, что именно Котошихин был автором стокгольмской рукописи, учебного пособия для шведов. Даже «загогулины», которые используются для заполнения страниц в его рукописной книге о России – прежде всего, на л. 232 об. и 249 об. – характерны также для рассматриваемой нами рукописи (л. 4 об., 8; ср. рис. 1).

Назначение стокгольмской рукописи может быть понятно из челобитной Котошихина Шведскому государственному совету (март 1666 г.), в которой он, помимо прочего, ходатайствует о выделении ему студента, который мог бы его учить шведскому языку. В свою очередь Котошихин учил бы его русскому, что в будущем позволило бы этому студенту служить Шведской Короне в качестве переводчика[67]. Очевидно, Котошихин создал свое «учебное пособие русского языка для шведов» (используя печатный *Alfabetum Rutenorum*) либо по собственной инициативе, либо по приказу властей – именно с целью обучения будущих шведских государственных переводчиков. Как нам кажется, скорее всего он выполнял государственный заказ: во-первых, рукопись написана на бумаге из той же партии, что и последние листы рукописной книги; во-вторых, он получал зарплату как сотрудник архива, так что от него несомненно ожидалась какая-то польза (когда работа над книгой подходила к концу, или была уже закончена); в-третьих, учебное пособие сохранилось именно в Шведском государственном архиве – место работы Котошихина где-то с апреля 1666 г. Так или иначе, нет никакого повода сомневаться в авторстве Котошихина[68].

В таком случае промежуток времени, когда рукопись могла быть создана, сокращается с 5–6 до полутора лет. Поскольку Котошихин прибыл в Стокгольм в феврале 1666 г., а в

[65] См: *Pennington A.E.*, Kotošichin, G. O Rossii... P. 3–5. Самой подробной работой о Котошихине до сих пор является монография: *Маркевич А.И.* Григорий Котошихин и его сочинение о московском государстве в половине XVII века. Одесса, 1895.

[66] В Шведском государственном архиве имеется не одно письмо царя, написанное Котошихиным (в фонде Muscovitica, № 618), а также много других документов, написанных им.

[67] Челобитная Котошихина опубликована в книге: *Pennington A.E.* Kotošichin, G. ... P. 761–762.

[68] Все аргументы, говорящие за авторство Котошихина, подробнейшим образом изложены в работе: *Maier I.* Grigorij Kotošichin als Russischlehrer für zukünftige Übersetzer der schwedischen Krone? (в печати).

ноябре 1667 г. он был казнен, то за это время он должен был создать как чистовую копию рукописи своей книги о России, так и свой «учебник». Поскольку филигрань бумаги «учебника» и конечных листов большой книги одинаковая, нам кажется вероятным, что наша рукопись была создана в 1667 г., ближе к концу недолгой жизни Котошихина, а не в начале его «шведского периода».

Учебное пособие еще не было доведено до конца (остались пустые страницы и пустые колонки), когда 25 августа 1667 г., Котошихин, придя домой в пьяном состоянии, нечаянно убил своего – тоже пьяного – коллегу и хозяина квартиры. Если бы этого не произошло, то несколько поколений переводчиков в Швеции могли иметь в качестве наставника этого носителя русского языка, который владел громадным опытом, обретенным за годы службы в московских приказах.

Таблица чисел из учебного пособия Котошихина

Рис. № 1. Таблица чисел из стокгольмской рукописи

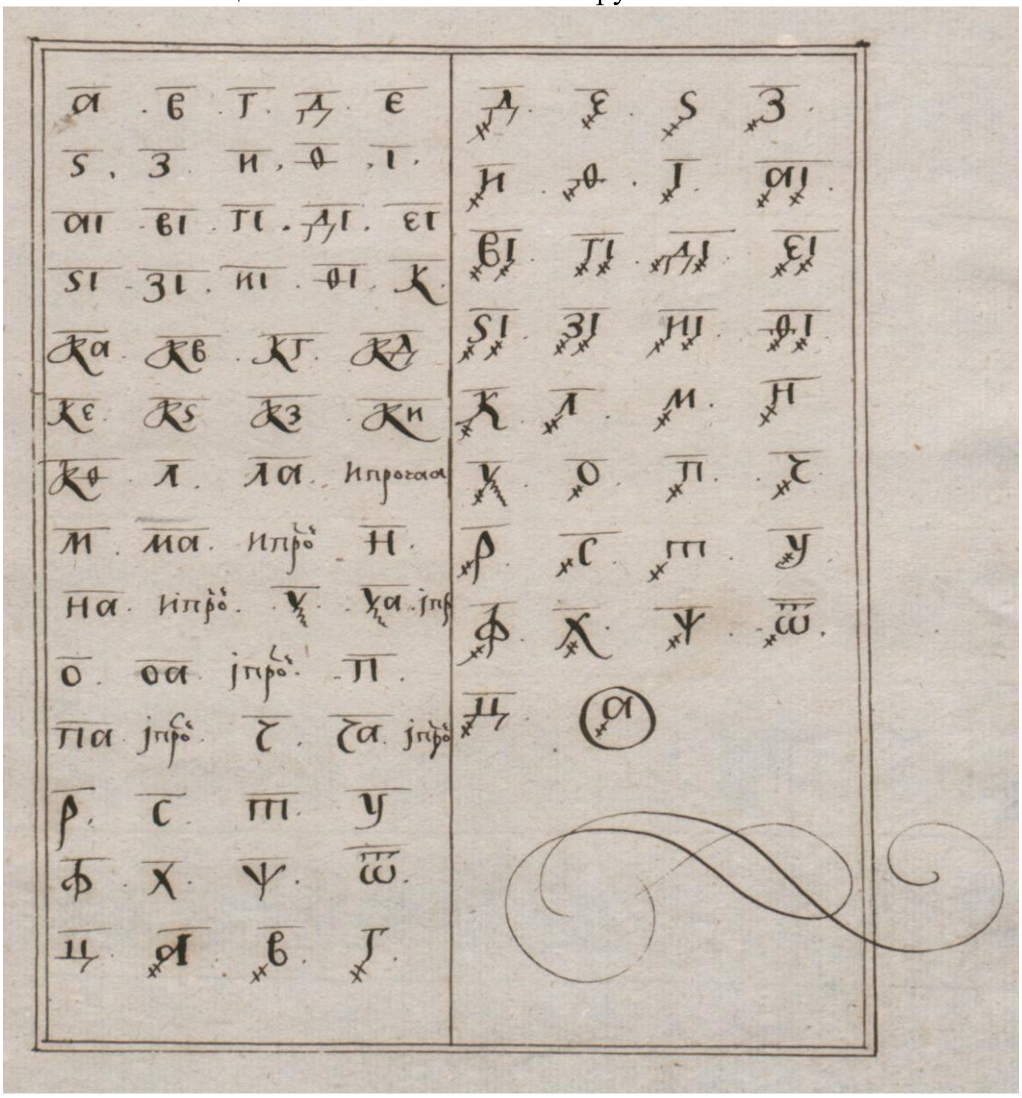


Таблица занимает почти всю лицевую сторону восьмого листа, поделенную на две колонки; свободная от чисел нижняя часть правого столбца заполнена декоративной виньеткой. Левая колонка имеет 14 строк, в первых четырех строках воспроизводится по пять чисел, а в последующих 10-ти содержится по четыре числа. Правая колонка заполнена на 9 строк, в первых 8-ми приводится по четыре числа, в последней, 9-й строке, – два.

Таблица представляет собой сводку «буквенных цифр» и записанных на их основе чисел, которые использовались в России вплоть до Петровской поры, постепенно вытесняясь современными индоарабскими.

а҃ (1) · в҃ (2) · г҃ (3) · д҃ (4) · є҃ (5)	҂д҃ (4000) ҂є҃ (5000) ҂ѕ҃ (6000) · ҂з҃ (7000)
ѕ҃ (6) · з҃ (7) · и҃ (8) · ѳ҃ (9) · і҃ (10)	҂и҃ (8000) · ҂ѳ҃ (9000) · ҂і҃ (10000) · ҂а҃҂і (11000)
а҃і (11) · в҃і (12) · г҃і (13) · д҃і (14) · є҃і (15)	҂в҃҂і (12000) · ҂г҃҂і (13000) · ҂д҃҂і (14000) · ҂є҃҂і (15000)
ѕ҃і (16) · з҃і (17) · и҃і (18) · ѳ҃і (19) · к҃ (20)	҂ѕ҃҂і (16000) · ҂з҃҂і (17000) · ҂и҃҂і (18000) · ҂ѳ҃҂і (19000)
к҃а (21) · к҃в (22) · к҃г (23) · к҃д (24)	҂к҃ (20000) · ҂л҃ (30000) · ҂м҃ (40000) · ҂н҃ (50000)
к҃є · (25) к҃ѕ · (26) к҃з · (27) к҃и · (28)	҂ѯ҃ (60000) · ҂о҃ (70000) · ҂п҃ (80000) · ҂ч҃ (90000)
к҃ѳ · (29) · л҃ (30) · л҃а (31) и прочаа	҂р҃ (100000) · ҂с҃ (200000) · ҂т҃ (300000) · ҂у҃ (400000)
м҃ (40) · м҃а (41) и проч. н҃ (50)	҂ф҃ (500000) · ҂х҃ (600000) · ҂ѱ (700000) · ҂ѿ҃ (800000)
н҃а (51) и проч. ѯ҃ (60) · ѯ҃а (61) і пр.	҂ц҃ (900000) · (҂а)
о҃ (70) · о҃а (71) і проч. п҃ (80)	
п҃а (81) і проч. ч҃ (90) · ч҃а (91) і проч.	
р҃ (100) · с҃ (200) · т҃ (300) · у҃ (400)	
ф҃ (500) · х҃ (600) · ѱ (700) · ѿ҃ (800)	
ц҃ (900) · ҂а҃ (1000) · ҂в҃ (2000) ·҂г҃ (3000)	

Значение публикуемой таблицы состоит в том, что до сих пор не были известны «рабочие» справочные материалы, связанные с практикой записи чисел российского государственного делопроизводства середины XVII в. Судить о такого рода потребностях можно по деятельности Посольского приказа, которая свидетельствует о том, что переводчикам и писцам этого важного государственного учреждения постоянно приходилось сталкиваться с крупными числами. О масштабах чисел говорят переводы газетных статей, делавшиеся в Посольском приказе, где шла речь о численности армий и жертв среди солдат, исчислявшихся тысячами. Или же переводчики имели дело со списками товаров, привозимых на судах в Голландию из Восточной Индии, где перечислялись тысячи фунтов сахара, перца или неграненых алмазов. Например, в одном таком списке 1671 г. сообщалось о 539208 фунтах черного перца, 174 410 фунтах малакского олова, 34350 штук крашеных полотен и пр.[69]

Значение математической таблицы Котошихина

Для истории науки «таблица чисел» Котошихина имеет большое значение, поскольку русских средневековых документов типа «цифровых алфавитов» сохранилось не так уж

[69] РГАДА, ф. 155, оп. 1, 1671 г., ед. хр. 7, л. 165 (из издания «Вести-Куранты», в подготовке).

много, а связанных с именами известных персон – и того меньше. Немногочисленный ряд таких источников, по-видимому, можно начать с «Азбуки пермской» св. епископа Стефана Пермского, создавшего в XIV в. алфавит для зырян, одного из финно-угорских народов, проживающих на территории современной России. В историографии «Азбука пермская» до недавнего времени трактовалась, как исключительно буквенный алфавит. Однако помещение этого источника в историко-математический контекст позволило обосновать, что этот алфавит является одновременно и буквенным, и цифровым[70]. Например, в византийской письменной традиции буквенный алфавит короче (24 знака) цифрового (27 знаков). В кириллице ситуация противоположная – цифровой алфавит короче (27 знаков) буквенного (более 40 знаков).

«Азбука пермская» содержит кроме 27-ми букво-цифр, примечательный 28-й знак. Он представляет собой 27-й знак (имеющий числовое значение 900), к которому «привешен» тысячный знак (҂). Это показывает, что 28-й знак выражает 900000. Следовательно, в «Азбуке пермской» основная система из 27 букво-цифр дополнена особым знаком (28-м), указывающим предельную числовую «мощность» этой 27-значной числовой системы – 900 тысяч.

Традиция указания «мощности» числовой системы сохранена и Котошихиным. Свою «таблицу чисел» он завершает особым символом в виде ҂а в картуше. Этот знак можно интерпретировать двояко. Так как предпоследний знак его «таблицы» выражает 900 000, поэтому последний знак в этой системе может иметь значение 1 миллион – особенно учитывая факт, что мы имеем дело с учебным пособием для шведов, которые просто не могли сделать другого вывода[71]. Второе возможное прочтение этого знака – указание на «предел» использования данной системы обозначения «больших чисел» – 1 миллиард.[72] Возможно, в свете традиции указывать для числовых систем их «мощность», Котошихин указал предел, до которого рассчитана приведенная им числовая система. Окончательные выводы о значении знака ҂а в картуше в «таблице чисел» Котошихина требуют дальнейших изысканий и в особенности изучение практики обозначения больших чисел в Посольском приказе.

Однако основное историко-математическое значение «таблицы чисел» Котошихина состоит в другом. В Древней Руси последовательно (от века к веку) разрабатывалась система больших чисел, в которой каждый разряд, начиная с разряда тысяч, приобретал свое обозначение. Тысячи обычно передавались наклонной чертой, присоединявшейся к

---

[70] *Морозов Б. Н., Симонов Р. А.* Об открытии цифровой системы Стефана Пермского (XIV в.) // Вопросы истории естествознания и техники. 2008, № 1. С. 3–31.

[71] См. цит. выше работы И. Майер.

[72] В другом неизвестном ранее «цифровом алфавите», представленном в рукописной «Арифметике» нач. XVIII в. (ГИМ, Увар. № 762, л. 62 об.) и совпадающем в начальной части с числовой таблицей Котошихина, тот же знак ҂а в картуше имеет значение 1 миллиарда. Подробнее см.: *Симонов Р.А.* Новые материалы по истории математики Древней Руси // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2000. Вып. 5 (40). С. 260, рис. 4.

«буквенной цифре» слева или снизу. Со временем эта наклонная черта приобрела одно перечеркивание, затем – два (҂), иногда – три. Десятки тысяч («тмы») записывались посредством обведения окружностью знаков первых девяти «буквенных цифр». Сотни тысяч («легионы») выражались аналогичным образом – окружностями из точек. Существовали особые знаки для миллионов («леодров»), десятков миллионов («воронов») и сотен миллионов («колод»). Эта система обозначений сложилась к 1643 году[73]. Сведения суммировались в так называемых «цифровых алфавитах», содержащих набор основных 27-и «буквенных цифр», а также данные о дополнительных знаках для выражения разрядов больших чисел, начиная с тысяч. В историографии эта система получила название «малого числа». Б.В. Гнеденко также выделял систему «числа великого словенского»[74]. Однако названия «малое число» и «число великое словенское» в славяно-русских текстах не зафиксированы. Здесь все системы или способы выражения чисел буквенными знаками, начиная со знака р҃ (100), именуются «великим числом»[75]. В «цифровом алфавите» нач. XVIII в., представленном в рукописной «Арифметике» (см. прим. 15), термины тьма, легион, леодр, ворон, колода вводятся как степени миллиона. Было неизвестно, каким был «статус» этого алфавита – теоретической разработки или системы, реально использующейся на практике. Сравнение «таблицы чисел» Котошихина с «цифровым алфавитом» «Арифметики» (ГИМ, Увар. № 7620) показывает, что обе системы совпадают в своей начальной части. Это значит, что пособие Котошихина (очевидно, отражавшее приказную практику России середины XVII в. записи чисел), подтверждает государственное использование числовой системы того типа, который представлен в «Арифметике» из ГИМа. В этом состоит важность «таблицы чисел» Котошихина для истории науки – при этом не только для русской истории науки, но и общеевропейской. Дело в том, что в ряде западноевропейских стран (например, Франции) с конца XV в. «вводятся термины биллион, триллион, квадриллион и т.д. для степеней миллиона…»[76]. Аналогичная система, но на архаичной «буквенной» основе, складывалась и в России, как показывает «учебник» Котошихина. Это свидетельствует об определенной тенденции к сближению в области математики России с Западом – за полвека до Петровских преобразований.

«Таблица чисел» Котошихина в контексте трактовки «русских чисел» иностранцами, посещавшими Россию в первой пол. XVII в.

Довольно развернутое изложение данных о русских числах дается в т.н. «Разговорнике Т. Фенне» (Tönnies Fenne)[77]. Этот разговорник, в свою очередь, был составлен на основе

---

[73] *Симонов Р.А.* Загадка древнерусской системы чисел // Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль, 2005. С. 311–326.
[74] *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. 2-е изд. М., 2005. С. 229.
[75] *Симонов Р.А*. Новы материалы… С. 244–271.
[76] *Юшкевич А.П.* История математики в России… С. 13.
[77] Мы тут сохраняем распространенное в научной литературе название «разговорник Т. Фенне», хотя фамилия молодого человека, для которого он был составлен, не Фенне, а Фонне; см. об этом, в частности, только что

гораздо более старых разговорников в 1607 г., в Пскове.[78] Здесь на стр. 545–552 в разделе «Число рюскую» (так!) приводятся названия русских числительных в трех колонках: в левой – полууставом (кириллица), переходящим в скоропись, в центральной – латиницей с элементами готического шрифта, в правой – индоарабскими цифрами. Сплошная последовательность числительных идет до ста, затем следует поразрядный счет: двести, триста…, девятьсот, тысяча, тма (10000), легион (100000), «легиодръ» Legiodr 1000000 (т.е. леодр) (с. 551–552). Далее происходит возвращение к началу, и счет ведется вновь от единицы, но уже по пяткам до ста – как прежде, в три столбца. Завершается перечень сведениями о записи числительных с приставкой «пол-», например: полтора (1½), полтретьи (2½), полчетверты (3½)…, «полъодинатцаты» (10½) (с. 553–554). Затем заголовок повторяется – «Число рускую» (с незначительным изменением в записи), и идет материал о начертании русских «буквенных чисел» с параллельным указанием их значения в индоарабской нумерации. Завершают текст данные о выражении больших чисел. Десятки тысяч (тмы) даются поразрядно – в сплошных окружностях, сотни тысяч (легионы) – также поразрядно – в окружении пяти изогнутых черточек, похожих на тильды, миллион («легиодръ») – в виде буквы *а*, окруженной шестью мелкими кружками, разомкнутыми наружу (с. 557–559).

Запись чисел содержит признаки, позволяющие датировать представленную в «Разговорнике Т. Фенне» традицию. Так, в этой числовой системе используется *юс малый* в значении 900. Рубежом применения на Руси этого знака (как 900) является конец XIV – начало XV вв. В конце XIV в. на Руси уже употребляется знак *ц҃* в значении 900, а *ѧ҃* продолжал использоваться в том же качестве и в XV в. Значит, указанная примета (*ѧ҃*=900) выводит на XIV–XV вв. Еще одним датирующим показателем, указывающим примерно на то же время, XIV–XV вв., является предельное число миллиона (леодра в форме «легиодръ»). Однако решающим датирующим признаком будет использование *ѧ҃* в значении 900. Дело в том, что в Пскове с 1425 г. стал стабильно применяться знак *ц҃*=900 на государственных печатях, и с 1447 г. на печатях псковских пригородов[79]. Значит, числовая традиция, представленная в «Разговорнике Фенне», не могла появиться позже середины 1-й половины XV в. Это согласуется с выводами А.Л. Хорошкевич о том, что в основу «Разговорника Фенне» легли псковские источники XVI, а также XV веков[80]. Значит, ко времени

вышедшую монографию: *Hendriks P.* Innovation in tradition. Tönnies Fonne's Russian-German phrasebook (Pskov, 1607). Amsterdam; New York, NY, 2014.

[78] См. факсимильное издание: Tönnies Fenne's Low German Manual of Spoken Russian Pskov 1607 / Ed. by L. L. Hammerich, R. Jakobson et al. Vol. 1: Facsimile Copy. Copenhagen, 1961. P. 545–559. См. также электронное издание (под ред. *Hendriks P.*, *Schaeken J.*; дата обращения: 26.05.2014): http://www.schaeken.nl/lu/research/online/editions/fenne11.pdf. О числовой системе памятника см.: *Симонов Р. А.* Русская средневековая система больших чисел // История и методология естественных наук. Вып IX: Математика, механика. М., 1970. С. 213–214.

[79] *Янин В.Л.* Вислые печати Пскова // Советская археология. 1960, № 3. С. 237–261.

[80] *Хорошкевич А.Л.* Быт и культура русского города по словарю Т. Фенне 1607 г. // Новое о прошлом нашей страны. М., 1967. С. 201, 215–216; см. также очень подробно в книге: *Hendriks P.* Innovation in tradition…; *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М., 1977. С. 82–83.

составления «Разговорника Фенне» – 1607 г., – представленная в нем информация о числах устарела, особенно в части крупных разрядов, начиная с 900.

Данные о русских числах также были представлены в «Словаре – дневнике» (1618–1619 гг.) англичанина Ричарда Джемса[81]. Числовой материал Ричарда Джемса по объему значительно скромнее, чем у Т. Фенне, но по содержанию несколько новее. Во всяком случае 900 у него выражается знаком ц҃. Числительные он записал так, как воспринял на слух: 1 – «первой», 2 – «другой», 3 – «трее», 4 – «чатира», 5 – «пете», 6 – «шесте», 7 – «сем», 8 – «восема», 9 – «девет» и т.д. Большие числа доводятся Ричардом Джемсом всего лишь до 60000, предельным числом указывается *тьма тысяч* в значении миллиона (a million). Однако это неверно, так как 10000х1000=10000000, то есть 10 млн. Б.А. Ларин, который тщательно комментировал почти каждое слово у Ричарда Джемса, это место оставил без внимания. Возможно, он не заметил ошибки.

Материалы как Т. Фенне, так и Р. Джемса – исключительно ценные исторические и лингвистические источники, но они требуют к себе внимательного подхода, ибо представленная в них информация может быть не во всем безупречной. Так, если ее сравнивать с «таблицей чисел» Котошихина, то видно, что в одном случае она будет более полезной (чем у Т. Фенне), а в другом – достовернее (чем у Ричарда Джемса). Причину этого нетрудно усмотреть в том, что наблюдения иностранцев о русской культуре были, скорее, любительскими и неизбежно поверхностными, так как делались со стороны. Котошихин же излагал, по существу, свои профессиональные знания и как бы делал это изнутри российского культурного процесса.

* Работа выполнена при поддержке грантов: RFP12-0055:1 (Jubilejnyj fond Shvedskogo nacional’nogo banka) ; РГНФ 13-06-00149а.

О структуре комбинаторного анализа к концу xx века

А.Е. Малых, В.И. Данилова

Специфика и сложность возникающих задач развития науки, техники и экономики оказывают влияние на изменение места и роли многих математических дисциплин. С конца XIX века опережающими темпами стала развиваться *дискретная математика*, важной составной частью которой является *комбинаторный анализ*. В нем решаются задачи выбора и упорядочения, в том числе частичного, элементов некоторого дискретного множества в соответствии с определенными правилами. Каждое из них задает способ построения конструкции из элементов рассматриваемого множества – *комбинаторного комплекса*. Поэтому в комбинаторном анализе изучаются проблемы их существования, установления числа, отыскания классов изоморфизма; создаются алгоритмы построения комбинаторных конфигураций и оптимизации последних.

Со второй половины XIX века теория комбинаторного анализа развивается особенно интенсивно. Результаты многочисленных исследований изучаются, обобщаются,

[81] *Ларин Б.А.* Русско-английский словарь-дневник Ричарда Джемса. Л., 1959. С. 100–102, 370–371.

публикуются в монографиях, специальных выпусках и переводятся на русский язык. Методы комбинаторного анализа получили широкое применение во многих разделах математики: теории чисел, теории вероятностей, алгебре, геометрии, большом круге задач теории планирования экспериментов, теории рядов, логике и других.

Усиление роли и значимости комбинаторного анализа стимулирует проявление интереса к его истории. Заметим, что еще на II Международном конгрессе математиков в Париже (1920) М. Кантор указал, что одним из важнейших направлений исследований является история отдельных математических дисциплин, так как именно они представляют основополагающие структурные части математики, и в их развитии и взаимодействии находят свое выражение ее жизнь как единого целого.

Цель статьи – дать краткий обзор важнейших направлений развития комбинаторной науки, которая сформировалась к концу XX столетия.

В первые десятилетия XIX в. были заложены основы ведущих разделов комбинаторного анализа. Центральной его частью является *теория перечисления*. Она – самая ранняя и наиболее оформленная в научном плане, по–прежнему сохраняет лидирующее положение. Ее развитие и расширение многочисленных приложений происходило на протяжении всего рассматриваемого периода. Заметное место при этом занимали проблемы исследования комбинаторных комплексов. Важный вклад в качественном и количественном направлениях был внесен комбинаторной школой немецких математиков под руководством К.Ф. Гинденбурга.

К тому же времени было решено большое число комбинаторных задач, в которых на элементы рассматриваемых множеств накладывались ограничения как на их повторение, порядок, так и частоту появления. Тогда же появились первые учебники по комбинаторному анализу [1].

С самого начала XIX столетия представитель школы К.Ф. Гинденбурга Г.А. Роте заложил основы комбинаторной теории перестановок [2]. Результаты работы в этом направлении практически привели к формированию отдельной дисциплины – *теории перестановок и подстановок*. Исследования способствовали созданию теоретических основ инверсий в перестановках и сочетаниях. Введение понятия *последовательностей в перестановках* и их графической интерпретации привело к появлению альтернированных и квазиальтернированных перестановок, изучению их свойств.

На протяжении всего XIX столетия не ослабевал интерес к решению так называемых *классических комбинаторных задач*. В частности, продолжались поиски общего решения одной из них – «задачи о встречах». Заметим, что оно было получено уже в 1710 г. и находилось в письме Н.I Бернулли к П.Р. де Монмору, однако по неизвестным причинам осталось незамеченным. В конце концов независимое решение было вновь дано, причем в разных дисциплинах. При этом ученые использовали различные комбинаторные методы: И. Вейраух (1872) в теории определителей на основе метода включения – исключения; С. Кантор (1883) при изучении комбинаторных видов соединений; А. Кэли (1890) при подсчете ($2\times n$)-латинских прямоугольников: $P_n^{(0)} = n!\sum_{r=2}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}$, где $P_n^{(0)}$ – число перестановок из n элементов, в которых ни один не сохраняет своей первоначальной позиции.

Значительное внимание уделялось частным случаям, разновидностям и обобщениям этой задачи. Родственными ей были задачи о «супружеских парах» и «о гостях». Поиски общего решения продолжались до 1934 г. (Д. Тушар). Были установлены связи между последней задачей и ($2\times n$) латинскими прямоугольниками порядка n: $K(2,n) = P_n^{(0)}$. Связь же между трехстрочными латинскими прямоугольниками являлась более сложной: общая формула установлена только в 1934 г.

В конце XIX в. стали разрабатываться общие подходы к решению класса перечислительных задач путем изучения соответствующих им схем ограничений. Актуальности подсчета различных видов комбинаторных комплексов способствовали прикладные задачи.

Методы решения комбинаторных задач в XIX столетии многочисленны и разнообразны. Они опирались на алгебраические средства исследования, технику оперирования со степенными рядами, общие постановки биномиальной и полиномиальной теорем. Особое место среди них занимали рекуррентные последовательности. Однако эти подходы были оттеснены введением *метода производящих функций*. Его развитый символический и аналитический аппарат позволяет оперировать классами последовательностей менее громоздкими аналитическими средствами. Применение метода характерно для всего XIX в. Имея продолжительную и богатую историю, метод производящих функций и в настоящее время интенсивно развивается и обогащается. Вместе с тем, заметим, что наряду с ним на протяжении XIX в. активно использовались и существовавшие прежде методы перечисления.

Приемы и методы комбинаторного анализа нашли приложение в *теории графов* с того времени, как была выяснена внутренняя структура последних, выделены их классы, прежде всего «деревья» (Г. Штаудт, 1847; А. Кэли, 1857). Параллельно решались вопросы их перечисления.

Теорию графов-деревьев А. Кэли создавал и развивал независимо от идей, приведших впоследствии к теории графов, и оказал на нее огромное влияние. При нахождении числа корневых деревьев с n ребрами он широко использовал производящие функции и процесс, названный им «унификацией». Кэли нашел производящие тождества для корневых непомеченных деревьев с n главными ветвями, для числа концевых вершин гомеоморфно несводимых деревьев с висячими вершинами, а также формулы подсчета m-деревьев, корневых деревьев с i висячими вершинами, помеченных графов с n вершинами [3].

К. Жордан ввел в теорию деревьев понятия *центра* и *бицентра*, изучая вопросы изоморфизмов и автоморфизмов графов, определил порядок группы симметрии графа и нашел такие порядки для частных случаев графов с большим количеством вершин. Независимо от него существование центра и бицентра открыл Дж. Сильвестр, подметив связи между изучением деревьев и некоторыми исследованиями в органической химии. Одним из стимулов формирования и дальнейшего развития теории графов послужили исследования по электричеству (Г. Кирхгоф).

Тесные связи комбинаторного анализа установились с *теорией определителей*. Успехи последней стали основой для развития линейной алгебры, матричного исчисления, алгебраической теории форм и их инвариантов. Исследования по теории определителей все чаще пополнялись результатами в *теории матриц*, получившей продвижение с середины XIX века.

На протяжении всего XIX века сохранялся интерес к построению и исследованию *числовых таблиц*, обладающих определенными свойствами.

В *теории латинских квадратов* важной составляющей является *проблема* их *ортогональности*, изучение частных видов, выяснение структуры. Эта проблема сформулирована Л. Эйлером (1782) как гипотеза о несуществовании пары ортогональных латинских квадратов порядка $n = 2(2k + 1)$, $k \in N$ и подтверждена Г. Тэрри для случая $n = 6$ (1901). Ошибочность гипотезы установили известные американские ученые, доказав невыполнимость ее для всех значений n, отличных от 2 и 6 (1969).

Числовые таблицы нашли применение в широком круге задач теории планирования экспериментов. Их использование приобрело актуальность и с середины XX в. при создании комбинаторных помехоустойчивых кодов.

Обобщением числовых таблиц являются *комбинаторные наборы*. Внимание к ним возникло с середины XIX века в связи с исследованиями в алгебраической геометрии.

Я. Штейнер (1853) сформулировал проблему существования $S(t, k, v)$ систем для $t = 3$, ставшую исходной в возникновении целого направления теории – *троек Штейнера*.

С середины XIX в. получила дальнейшее развитие теория *геометрических и комбинаторных конфигураций*. Некоторые из них, как выяснилось впоследствии, оказались *конечными геометриями*, более общими комбинаторными структурами или вкладывались в них. С другой стороны, сами конфигурации были удобными моделями для реализации различных видов групп подстановок, теория которых на протяжении столетия получила мощное развитие. Значительно продвинулась и теория графов как удобное средство для изучения конфигураций.

Дж. Сильвестр и А. Кэли, рассуждая о проблемах, касающихся соединений элементов, считали, что все они относятся к обширному разделу математики, названному Сильвестром «тактикой». Он изучил различные виды тактических систем; исследовал их в количественном направлении, выполнил обзор конкретных классов, дал решения ряда задач, сформулированных в терминах тактических расположений; разработал методы их решения, доказал ряд композиционных теорем; исследовал группы подстановок ряда тактических конфигураций, указал многочисленные задачи из алгебры, геометрии, теории групп, приводящие либо к изучению таких конфигураций, либо к использованию их при решении других проблем [3, 4].

Удобным способом представления конфигураций являются их схемы и таблицы инцидентностей, упрощающие нахождение автоморфизмов. Такое положение стимулировало изучение их в XIX–XX веках. Заметим, что конфигурации являются ярким примером взаимного проникновения геометрических, теоретико-групповых и комбинаторных идей.

Интенсивные исследования в XIX столетии выполнялись в комбинаторной *теории разбиений*. Она развивалась по следующим направлениям:

1. Выяснение комбинаторных свойств разбиений и вывод формул для:

а) подсчета размещений и сочетаний с определенными суммами;

б) получения рекуррентных формул количественной оценки разбиений. Было доказано большое число таких соотношений, причем многие неоднократно переоткрывались;

в) установления независимых формул, которые нашли применение в теории цепных дробей (М. Штерн), распределении связей между атомами (Ф. Франклин) и др.;

г) доказательства большого числа теорем и среди них *пентагональной*, сформулированной еще Л. Эйлером: $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k x^{\frac{3m^2\pm m}{2}}$ (1742).

Эйлер пытался получить и независимую формулу для нахождения числа разбиений, о чем свидетельствуют материалы его «записных книжек». Доказательство же пентагональной теоремы было выполнено А. Лежандром (1838). Независимая формула для нахождения числа разбиений натурального числа n на слагаемые была получена лишь в 1918 году С. Рамануджаном и Г. Харди [5].

2. Изучение различных видов разбиений, установление их свойств, зависимостей между разбиениями, поиски приложений. С середины XIX века их было найдено немало: циклические, сопряженные, совершенные, субсовершенные, типа магических квадратов, расчлененные, двудольные, модульные, многомерные, векторные и др. Вклад в разработку, изучение их и дальнейшее развитие теории внесли А. Кэли, Дж. Сильвестр, П.А. МакМагон, М. Матье, Е. Нетто и др.

3. Использование *точечных графов*, явившихся эффективным средством изучения разбиений, где каждому из них поставлен в соответствие граф Ферре. С середины XIX столетия введены нормализованные точечные графы и прямоугольные диаграммы, зигзагообразные графы МакМагона. Возможность разложения нормализованного точечного графа на максимальный квадрат и две остаточные диаграммы (В.П. Дарфи) заметно упростила многие доказательства.

4. Приложения теории разбиений наблюдается всюду, где производят либо подсчет, либо классификацию дискретных систем. Например, специалисты по непараметрической статистике изучают ограниченные разбиения, т.е. такие, в которых наибольшая часть не превосходит $\boldsymbol{n}$, а общее число частей не превышает $\boldsymbol{m}$. В теории вероятностей и математической статистике рассматривается проблема С. Ньюкомба, приводящая к задачам о перестановках. В физике частиц нашли применения асимптотики разбиений, комбинаторные тождества и др. Некоторые исследования в теории групп связаны через графические диаграммы Юнга с векторными разбиениями.

Как видим, XIX столетие – особый период в развитии комбинаторного анализа. В это время были созданы многие его современные разделы, разработан и усовершенствован комплекс методов: перечислительных, логических, экстремальных (асимптотических). Ряд комбинаторных проблем получил при этом настолько развитую форму, столь большой объем и далеко идущие результаты, что появилась возможность рассматривать их как самостоятельные научные дисциплины (теория графов, тактические конфигурации, блочно-схемный аппарат, конечные геометрии, теория разбиений и др.). Внутри же самой комбинаторной теории зарождались те абстрактные математические структуры, идеи и методы которых подняли ее в XX столетии на более высокий качественный уровень, позволили найти новые приложения.

Мощным стимулом к развитию метода производящих функций и комбинаторного анализа послужило развитие *теории инвариантов алгебраических форм*. Она заняла одно из центральных мест в математике второй половины XIX столетия. Ряд важных задач теории инвариантов сводился к вычислению количества разбиения чисел на слагаемые, а потому требовал использования метода производящих функций.

Значительный вклад в создание и формирование теории инвариантов внес Артур Кэли [3]. Многие его работы посвящены перечислению инвариантов и разбиений с использованием метода производящих функций. Ученый применял этот метод к решению и других задач теории перечислений. Именно на систематическом использовании указанного метода основана его *теория деревьев*, носящая перечислительный характер.

Такой же аспект преобладает и в комбинаторных работах Дж. Сильвестра [4]. Заметна близость их тематики с исследованиями А. Кэли.

Непосредственным продолжением комбинаторных исследований Кэли и Сильвестра, явилась обширная *комбинаторная доктрина* Перси Александера МакМагона, последовательно изложенная им в многочисленных статьях конца XIX – начала XX столетий, а также в большом двухтомном трактате «Комбинаторный анализ» 1915–1916 гг. [6]. Доктрина ученого носила перечислительный характер и основывалась на систематическом использовании *симметрических производящих функций,* а также *симметрических дифференциальных операторов Хаммонда.* Значительное место в исследованиях МакМагона занимала аддитивная теория разбиения натуральных чисел.

Теорию двухполюсных сетей МакМагон изложил еще в 1891 г. Она являлась непосредственным продолжением теории деревьев Кэли. Ему удалось установить соответствие между сетями и деревьями, что в дальнейшем привело к исследованию в области двоичного кодирования и декодирования деревьев. Продолжением комбинаторной доктрины МакМагона явились исследования Дж. Редфилда [7].

Перечислительный аспект имеет и известный «Учебник комбинаторики» [8] – это своеобразная краткая энциклопедия комбинаторного анализа до начала XX в. Задачи относились к алгебре (определители, инварианты, расстановка скобок), теории чисел (мультипликативная и аддитивная теории разбиений), химии (изомеры), физике (электрические цепи), а также к комбинаторным наборам (тройки Штейнера и системы Киркмана).

Исследования А. Кэли привлекли внимание химиков и математиков, положили начало целой серии публикаций конца XIX – середины XX столетий. К ним принадлежат и работы Д. Пойа тридцатых годов прошлого века, послужившие предпосылками для создания его *теории перечисления* [9]. Серия из пяти его статей (1935–1936) тогда уже известного математика получила в 1937 г. завершение в виде необычно большой статьи. В русском переводе она впервые опубликована в 1979 году [10, с. 36–159]. Теория перечисления Пойа получила значительное продвижение и на современном этапе развития комбинаторного анализа.

Одним из наиболее примечательных явлений не только для комбинаторного анализа, но всей современной математики является цикл работ, выполненных под руководством профессора Джиан-Карло Рота, его учеником Генри Крапо и коллегами. Речь идет о новой концепции построения единых теоретических основ для всего множества направлений комбинаторной части математики. С самого начала 60-х гг. XX в. была опубликована первая статья Рота [11], вызвавшая живой интерес среди научного сообщества. Спустя год появилась первая работа из задуманного цикла [12]. Она многое прояснила в структуре комбинаторного анализа, но вызвала и множество вопросов. В дальнейшем на протяжении пяти лет были опубликованы под тем же, но частично общим заголовком, еще восемь статей.

Интерес к работам Рота, выходящим в объявленной им серии, был велик и в последующие годы. Появилось множество других работ Дж.-К. Рота и его учеников, развивавших или разъяснявших отдельные составляющие ноых теоретических основ. В современной истории комбинаторного анализа его развитие происходило под заметным влиянием концепции Рота.

Конечные геометрии появились в самом конце XIX в., как удобные модели, на которых проверялись логические обоснования аксиоматических теорий. Интерес к ним не ослабевал ввиду обнаруженных впоследствии возможностей широкого применения в:

- **теории планирования экспериментов** (промышленность, сельское хозяйство, медицина);
- **широком круге задач, связанных с проблемой экспертных оценок** (знания учащихся, качество машин и механизмов, изделий и приборов; достоинство кинофильмов; установление эффективности лекарственных средств, ценности картин; дегустация пищевых продуктов, вин и т.д.);
- **теории информации** (построение помехоустойчивых кодов). Проблема построения такого кода приобрела актуальность в связи с появлением ракет, космических станций, спутников Земли и т.д.

Оказались они востребованными и при:

- **проектировании сложных систем и устройств на ЭВМ** (сокращает перебор, уменьшает затраты машинного времени);
- **решении ряда задач теории игр и теории графов** и др.

В процессе изучения истории комбинаторного анализа, его возникновения и развития, формирования отдельных частей, установления связей между ними и другими дисциплинами у авторов статьи появилась возможность представить его структуру, сложившуюся к концу прошлого столетия. Она, однако, не является исчерпывающей и приведена на схеме 1.

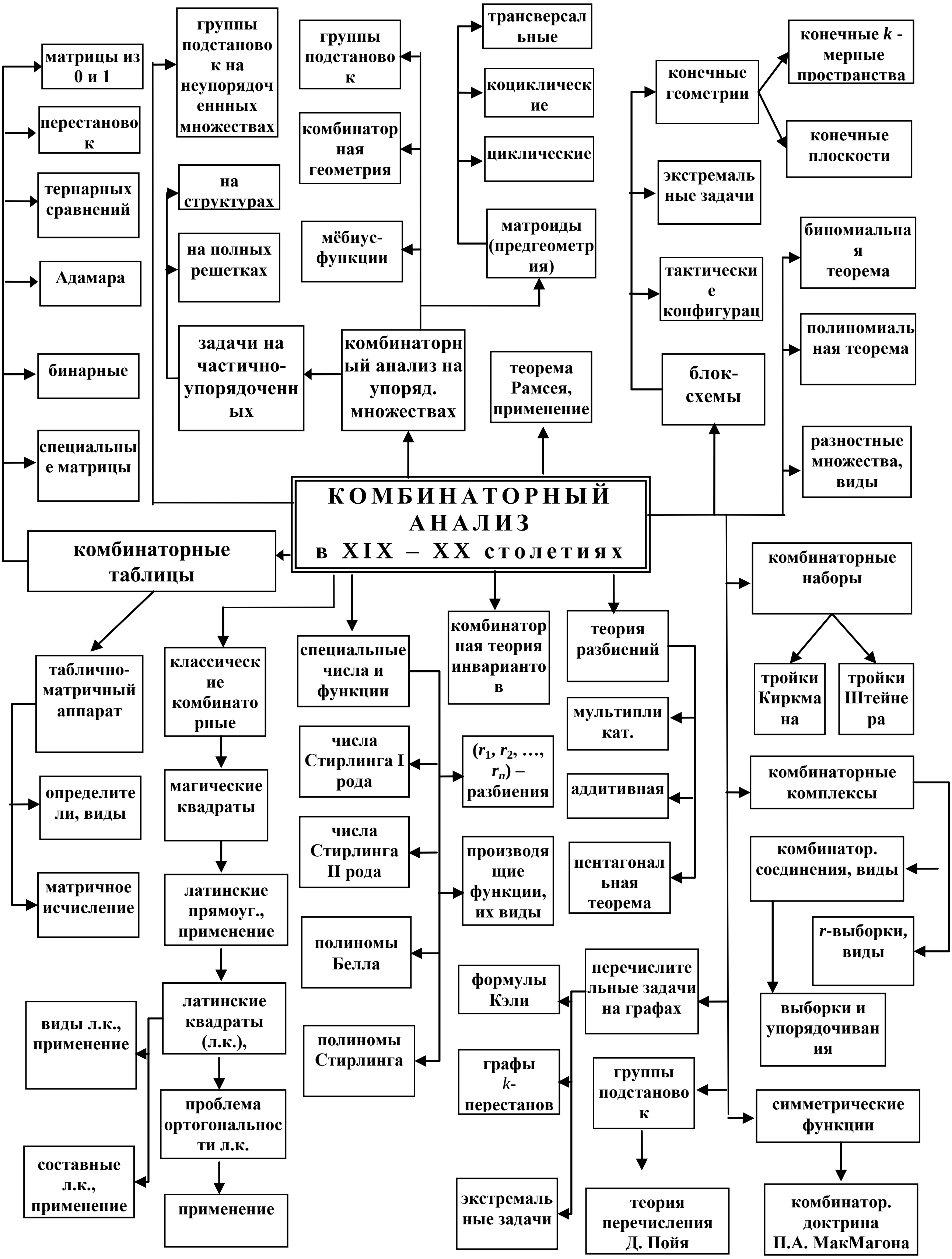


Схема 1. Структура комбинаторного анализа к концу XX столетия

Таким образом, авторы стремились описать процесс формирования первых построений общей комбинаторной теории (с начала XIX в.), результаты исследований в различных ее направлениях; выяснения структуры науки и ее приложений.

Библиографический список

1. *Oettinger, L.* Die Lehre von den Combinationen [Текст] / L.Oettinger / – Freiburg, 1837.
2. *Rothe, H.A.* Über Permutationen in Beziehung aut die Stellen ihrer Elemente [Текст] / H.A. Rothe / – Hindenburg C.F. / Zweite summlung combinatorich – analitisher Abhandlungen. – Leipzig, 1820. – S. 263–305.
3. *Cayley, A.* The collected mathematical papers [Текст] / A. Cayley / – Cambridge, 1889–1897. – Vols. 1–13.
4. *Sylvester, J.J.* The collected mathematical papers [Текст] / J.J. Sylvester / – Cambridge, 1904–1912. – Vols. 1–4.
5. *Hardy, G.N.* Asymptotic formula in combinatory analysis [Текст] / G.N. Hardy, S. Ramanujan / Proc. London Math. Soc., 1918. – Ser. 2. – V. 17. – P. 75–115.
6. *MacMahon, P.A.* Combinatorial Analysis [Текст] / P.A. MacMahon / – Cambridge Univ. Press. – 1915–1916. – Vols. 1–2.
7. *Редфилд, Дж. Г.* Теория распределений, приведенных по группе [Текст] / Дж. Г. Редфилд / В сб. переводов «Перечислительные задачи комбинаторного анализа» / Под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1979. – С. 9–35.
8. *Netto, E.* Lehrbuch der Combinatorik [Текст] / E. Netto / – Berlin, 1927. – 2-nd ed.
9. *Polya, G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen [Текст] / G. Polya / Act. Math., 1937. – № 68. – P. 145–254.
10. Перечислительные задачи комбинаторного анализа [Текст] / Под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1979.
11. *Rota, G.C.* The number of partitions of set [Текст] / G.C. Rota / Amer. Math. Monthly, 1963. – V. 71. – С. 498–504.
12. *Rota, G.C.* On the foundations of combinatorial theory. **1**. Theory of Möbius functions [Текст] / G.C. Rota / Zeitschrift für Wahrsheinlichkeits theorie, 1964. – Bd. 2. – № 4. – S. 340–364.

Об оренбургском периоде жизни М. Г. Попруженко

Г.П. Матвиевская, И.К. Зубова

Видный представитель развернувшегося в России в конце XIX – начале XX в. движения за реформирование математического образования Михаил Григорьевич Попруженко (1854–1917) отмечен в литературе как последовательный борец за введение начал анализа в учебную программу средней школы [1–3]. В многочисленных статьях, публиковавшихся в журналах «Вестник опытной физики и элементарной математики» и «Педагогический сборник» он пропагандировал идею сближения школьного образования с наукой и жизнью.

М.Г.Попруженко являлся одним из организаторов и активным участником Первого Всероссийского съезда преподавателей математики (27 декабря 1911 г. – 3 января 1912 г., Петербург), а на состоявшемся через два года в Москве Втором съезде его избрали председателем.

Он принял участие и в работе международной конференции по преподаванию математики в апреле 1914 г. в Париже.

Будучи профессиональным военным и занимая долгие годы руководящие должности в Главном управлении военно-учебных заведений, М.Г.Попруженко разработал новые программы по математике для кадетских корпусов и ввел в курс этих учебных заведений основы анализа.

Идеи М.Г.Попруженко нашли выражение в его работе «Материалы по методике анализа бесконечно малых», опубликованной в 1912 г., и в учебнике «Начала анализа», предназначенном для военно-учебных заведений. Впервые учебник был напечатан в 1913 г., а третьим изданием вышел в 1922 г. Несколько изданий выдержали также его «Сборник геометрических задач» и «Начала космографии».

Михаил Григорьевич Попруженко получил образование сначала в Петровско-Полтавской военной гимназии, а затем в Михайловском артиллерийском училище, которое окончил в 1875 г. с чином подпоручика. Он участвовал в русско-турецкой войне 1875 – 1877 гг. и за военные заслуги получил несколько орденов и чин штабс-капитана.

После войны М.Г.Попруженко поступил в Михайловскую артиллерийскую академию, окончив которую в 1881 г. по первому разряду, перешёл в военно-учебное ведомство. Он получил назначение в Воронежскую военную гимназию (позднее кадетский корпус), где сначала занял должность воспитателя, а затем преподавателя математики и космографии, предмета, включавшего описательную астрономию с приложением к картографированию.

В 1890 г. М.Г.Попруженко был переведен в Оренбургский Неплюевский кадетский корпус на должность инспектора классов, в 1898 г. назначен директором Киевского кадетского корпуса, а в 1905 г. перешёл в Главное управление военно-учебных заведений. Умер он 13 февраля 1917 г.

В биографических очерках М.Г.Попруженко наименее освещён восьмилетний оренбургский период его жизни, который принёс ему богатый педагогический опыт. Заполнить этот пробел можно с помощью документов из Государственного архива Оренбургской области (ГАОО), касающихся Оренбургского Неплюевского кадетского корпуса, в котором преподавал М.Г.Попруженко.

Это учебное заведение играло важную роль в культурной жизни Оренбурга – города-крепости, возникшего в 1743 г. на юго-восточной границе России, служившего для неё «окном в Азию» и ставшего административным центром огромного Оренбургского края. Оно было открыто в январе 1825 г. как Оренбургское Неплюевское военное училище, названное в честь первого оренбургского губернатора И.И.Неплюева (1693-1773) и отличавшегося от других значительным своеобразием. Наряду с военными и гражданскими чиновниками для многонационального края, оно должно было готовить переводчиков восточных языков, которые были необходимы пограничной администрации.

Поэтому среди обязательных предметов, изучавшихся воспитанниками Неплюевского военного училища в течение шести лет обучения, значились татарский, персидский и арабский языки. Вскоре, однако, выяснилось, что учебная программа слишком перегружена и непосильна для учащихся. Выход был найден в создании двух отделений училища – европейского и азиатского. Программа европейского отделения строилась по образцу программы кадетских корпусов и включала французский и немецкий языки. В азиатском отделении основное внимание было обращено на восточные языки, а общеобразовательные предметы преподавались в некотором сокращении.

Такое подразделение осталось и после того, как в 1844 г. училище было преобразовано в Оренбургский Неплюевский кадетский корпус: европейское отделение переименовали в 1-й эскадрон, а азиатское – во 2-й с сохранением специфики его учебной программы.

Только после реформы 1867 г., когда на базе корпуса была создана Оренбургская Неплюевская военная гимназия, преподавание восточных языков в ней прекратилось. В 1882 г. по указу императора Александра III все военные учебные заведения вновь стали именоваться кадетскими корпусами, и в восстановленном Оренбургском Неплюевском кадетском корпусе программа обучения уже не отличалась от прочих.

В 1890 г., когда М.Г.Попруженко был переведен в Оренбургский Неплюевский кадетский корпус, его возглавлял Феофил Матвеевич Самоцвет (1834-1905), который работал в этом учебном заведении с 1867 г. Сначала он занимал должность инспектора классов, а в 1876 г. был назначен директором.

В истории Неплюевского корпуса Ф.М.Самоцвет оставил глубокий след. Под его личным наблюдением велось строительство нового огромного здания корпуса, завершенное в 1873 г. В учебно-воспитательной работе стараниями этого высокообразованного человека, как писал его современник, «водворялись гуманные принципы 60-х годов, идеи Пирогова и Ушинского»[4]. По его словам, в результате деятельности Ф.М.Самоцвета, «создался тот Неплюевский корпус, который оказал неоценимые услуги как Оренбургскому краю, так и всему отечеству, выпустивши и продолжая выпускать немало полезных деятелей не только на военной, но и на других аренах жизни».

Сведения об Оренбургском периоде жизни М.Г.Попруженко обнаружены в хранящемся в ГАОО «Дневнике Неплюевского кадетского корпуса» [6], в котором, начиная с 1844 г., отмечались все значительные события, происходившие в этом учебном заведении.

Так, среди происшествий 1888 – 1889 учебного года особое место занимает страшный оренбургский пожар, о котором в приказе начальника военно-учебных заведений от 2 октября 1888 года сказано: «10 числа минувшего августа пожар, бывший в Оренбурге и истребивший большую часть города, угрожал и строениям Неплюевского кадетского корпуса. Только при содействии местного начальства и благодаря энергии и распорядительности чинов корпуса спасены от пожара здание и имущество корпуса, кроме некоторых хозяйственных построек».

Летом 1889 г. в «Дневнике» сообщается о болезни инспектора классов Фон Витторфа и в ноябре – о его уходе в отпуск для лечения: болезнь, по-видимому, оказалась серьёзной. В записи от 7 мая 1890 г. читаем: «Высочайшим приказом в 1-й день мая инспектор классов корпуса полковник Фон Витторф произведен в генерал-майоры с увольнением от службы с мундиром и пенсией и штатный преподаватель математики Михайловского Воронежского кадетского корпуса подполковник Попруженко назначен инспектором классов».

Из дальнейших записей видно, что 12 мая М.Г.Попруженко прибыл в корпус, а уже 10 июня на него были возложены обязанности директора в связи с отъездом Ф.М.Самоцвета в Уфимскую губернию до 6 августа. Замещать директора ему пришлось также в январе 1891 г. и не раз в последующие годы.

Время, когда М.Г.Попруженко жил в Оренбурге, было нелегким периодом истории города. После пожара 1888 г., истребившего более двух тысяч домов, в 1891 г. город постигло новое бедствие от сильного неурожая в Оренбургской губернии, а в 1892 г. свирепствовала эпидемия холеры. Но культурная жизнь находилась на подъёме: открывались многочисленные школы и училища, появлялись новые газеты, учреждались научно-просветительские общества.

Из учебных заведений, помимо Неплюевского кадетского корпуса, важное для города значение имели открытая в 1868 г. мужская гимназия, существовавший с 1832 г. Николаевский институт благородных девиц и учрежденный в 1878 г.учительский институт, на базе которого уже при М.Г.Попруженко, в 1894 г. было открыто реальное училище. Математику в этих учебных заведениях преподавали учителя с университетским образованием, например, М.В.Голубков, В.В.Толузаков, И.А.Галамиев, Н.М.Морозов, И.А.Кузменко-Кузмицкий и др.[7 – 8]. Таким образом, М.Г.Попруженко в Оренбурге находился в кругу профессионалов. Среди них он, несомненно, встретил немало единомышленников, которых, как и его, волновали проблемы реформы математического образования в России.

Будучи инспектором классов, М.Г.Попруженко одновременно преподавал в Неплюевском кадетском корпусе математику и космографию. Преподавателями математики были также И.А.Остроумов, который одновременно вел физику, П.П.Мей и В.А.Сикстель, а помощником инспектора классов – Ф.Е.Рождественский.

Среди важных для корпуса событий, происшедших в бытность М.Г.Попруженко, в рукописном «Дневнике» отмечено посещение корпуса 27 июля 1891 г. наследником престола, будущим императором Николаем II, который останавливался в Оренбурге, возвращаясь из путешествия по Японии и Китаю. Второе такое событие – торжественно отмечавшийся 5 ноября 1893 г. 200-летний юбилей И.И.Неплюева, имя которого носил корпус.

Как видно из «Дневника», в 1894 г. М.Г.Попруженко долгое время замещал директора: с 18 февраля по 13 апреля, когда Ф.М.Самоцвет уезжал по делам службы в Петербург и с 7 июня – во время его отпуска. В записи от 16 декабря этого же года отмечено, что М.Г.Попруженко награжден орденом Святого Владимира IV степени.

В 1897 г. он дважды уезжал в отпуск «по домашним обстоятельствам», а 7 июня 1898 г. в «Дневнике» записано: «Инспектор классов корпуса полковник Попруженко Высочайшим приказом, состоявшимся 18 минувшего мая, назначен директором Владимирского Киевского кадетского корпуса, куда сего числа и отправился».

Оренбургский период жизни М.Г.Попруженко, связанный с Неплюевским кадетским корпусом, закончился. Как заметил его биограф, «восьмилетнее пребывание в таком образцовом корпусе дало прекрасную школу молодому инспектору и вполне завершило педагогическую подготовку Михаила Григорьевича» [2, с.468].

Библиографический список

1. *Больсен, Е.М.* Михаил Григорьевич Попруженко [Текст] / Е.М. Больсен / Математика в школе. 1958. № 5. С. 59–61.
2. Памяти М.Г.Попруженко [Текст] // Педагогический вестник. 1917. № 5–6. С. 466– 472.
3. *Метельский, Н.В.* Очерки истории методики математики [Текст] / Н.В. Метельский / Минск: Вышэйша школа 1968. С. 117– 142.
4. *Гра, А.П.* Феофил Матвеевич Самоцвет [Текст] / А.П. Гра / Труды Оренбургской ученой архивной комиссии. Вып. XIX. 1907. С. 81–84.
5. *Митурич, М.В.* Краткий очерк истории Оренбургского Неплюевского кадетского корпуса [Текст] / М.В. Митурич / Оренбург, 1913.
6. Государственный архив Оренбургской области. Фонд 328. Опись 1. Д. 3.
7. *Матвиевская, Г.П.* Математическое образование в Оренбурге в конце XIX – начале XX вв. [Текст] / Г.П. Матвиевская, И.К. Зубова / XIX Уральские Бирюковские чтения. Материалы. Челябинск. 2010. С. 54–57.
8. *Матвиевская, Г.П.* Из истории образования в Оренбургском крае: Оренбургский учительский институт [Текст] / Г.П. Матвиевская / Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. 2011. № 3 (59). С. 86–104.
9. *Матвиевская, Г.П.* О математическом образовании в Оренбурге в конце XIX – начале XX века [Текст] / Г.П. Матвиевская / Математическое образование в Оренбургском крае. История и современность. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2011. С. 5 – 30.
10. *Матвиевская, Г.П.* Преподавание математики в Оренбурге в конце XIX-начале XX в. [Текст] / Г.П. Матвиевская, И.К. Зубова / Труды IX Международных Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. С. 298-301.

Об истории использования экономических задач в математическом образовании.

В.П. Одинец

В известном папирусе Ахмеса[82] ([1],[[2]) – древнеегипетском учебном руководстве по математике, которому около 4тысяч лет, есть задача №44. В современном изложении она звучит так:

[82] Папирус писца Ахмеса, найденный в Фивах, относится к периоду XII династии Среднего царства Египта, т.е. к 1985-1795 гг. до новой эры [2] и был переписан писцом около 1650 г. до н. э. Большая часть папируса находится в Британском музее (Лондон), а остальная часть – в Нью-Йорке. Поскольку первым владельцем папируса был британский офицер Райнда, то папирус часто называют папирусом Райнда (Rhind Mathematical Papirus).

Найти *количество зерна в мешках в амбаре*[83]*, если на две кубических меры объёма амбара можно поместить три мешка зерна. При этом 20 мешков содержат 100 единиц зерновой меры («хекаты»). Пусть длина, ширина и высота амбара одинаковы и равны 10 единицам длины.* ***Ответ****: 1500 мешков, содержащих 7500 хекат зерна.* В Московском папирусе[84], старшим на 200 лет, папируса Ахмеса, в задаче №24 в современном изложении ([3],c.31-32) *требуется определить: сколько хлебов и сколько кувшинов пива можно получить из одной меры зерна, если из 15 мер получено 200 хлебов и 10 кувшинов пива, при условии, что выход пива составляет 1/10 выхода хлеба.* ***Ответ:*** *20 хлебов или 2 кувшина пива.*

Как видим, и в Московском и в папирусе Ахмеса присутствуют задачи с экономическим содержанием, позволявшие обучать математике «значительную профессиональную группу», а именно, писцов ([4], с. 13), бывших одновременно « и законоведами, и статистиками, и вычислителями».

К периоду написания папирусов Московского и Ахмеса относится деятельность и самого известного царя вавилонской династии -Хаммурапи (1792-1750 гг. до н.э.), о которой до нас дошли тысячи клинописных текстов[85]. Как известно, (см., например, [4], [5]) система счисления с основанием 60 в Двуречье явилась продуктом денежно-весовой системы мер и связана с развитием торговли.

При этом к числу распространённых задач, в отличие от математических задач Древнего Египта, относятся задачи на «процент», хотя вавилонские ростовщические операции «рассчитывались не со ста, а с шестидесяти единиц: брали в год 12 шекелей с 1 мины, равной 60 шекелям» (см.[4], с.142).

Например, в одной из задач *требуется по данной величине уплачиваемых за год процентных денег (=1 мина 40 шекелей)*[86] *определить величину капитала*». **Ответ:** 8 мин и 20 шекелей.

Или другая задача: «*Один гур он отдал в рост. Через сколько лет он (гур) вырастет на самого себя?»*[87].

Кроме простого процента вавилонская математика была близка и к понятию сложного процента; при этом вычисления опирались на наличие вычислительных таблиц. Заметим, что вычислительные таблицы применялись и в задачах на расчет « фундамента здания, плотин, осадных насыпей и т. п.». ([4],с.233).

Если говорить о вавилонской геометрии, то вслед за О. Нейгебауером ([7], с.91) можно повторить, что в ней «задачи на площади и на объёмы не составляют самостоятельного раздела математических исследований, а являются только одним из многих приложений численных методов к практическим вопросам».

Впрочем, как отмечали греки, в частности, Геродот ([4], с.11; [8], с.184) у египтян геометрия возникла из практических потребностей землевладельцев: «Если же от какого-нибудь надела река *отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному*».

Необходимость точного предсказания разлива Нила привели египтян к идее постоянного календаря (12 месяцев по 30 дней плюс 5 дополнительных дней в конце каждого года).[88]

[83] Неявно предполагается, что амбар имеет форму прямоугольного параллелепипеда.

[84] Московский папирус принадлежит ко времени правления XI династии периода Среднего царства, и был составлен в 1850 году до н.э., т.е. либо при фараоне Сенусерте III, либо при фараоне Аменемхете III. Описание этого папируса сделал его первый владелец - русский египтолог Владимир Семенович Голенищев (1856-1947).

[85] Наиболее ранние клинописные тексты, дошедшие до нас, относятся к XXXV веку до н.э.

[86] Здесь речь идёт о простом проценте (см., например, [6]).

[87] Решение этой задачи фактически использует понятие суммы арифметической прогрессии.

[88] У вавилонян календарь был чисто лунный.

Другим вкладом египтян не только в астрономию, а прежде всего в практическую жизнь явилось разделение суток на 24 часа ([7], с.92). Очевидно, числа 12, 24, 30, 360, используемые при исчислении времени египтянами – это отголоски 60-ричного счисления вавилонян.

Удивительно, но в Древнем Китае уже в эпоху Шан-Инь (XVII – XII вв. до н. э.) солнечный год был также разделён на 12 месяцев (по 29 и 30 дней). Продолжительность года составляла 356 дней, но периодически вставлялись добавочные месяцы[89]. Поразительно сходство экономических задач, решавшихся математическими методами в Древнем Китае и в Древнем Вавилоне.

Так пятая книга древнекитайского сочинения « Математика в девяти книгах»[90], носившая название «Оценка работ» (шан гун), была посвящена расчёту трудозатрат при строительстве крепостных стен, валов, плотин, каналов, а также других земляных работ. При этом вычислялись объёмы различных тел: прямоугольного параллелепипеда, прямоугольной призмы, пирамиды, конуса и т.д., и одновременно постулировались объёмы выработки на одного человека в день, полученные на основе практики [10].

Например, в задаче №1 из пятой книги ([10], с.471) говориться: «*Имеется земляная яма объёмом в 10000 чи [3] .[91] Спрашивается, сколько будет утрамбованной и рыхлёной земли, каждой в отдельности, если объёмы выкопанной ямы, рыхлёной земли, утрамбованной земли и вынутой земли относятся как 4:5:3:4?».*

Ответ: утрамбованной земли будет 7500 чи^3, рыхлёной земли будет 12500 чи^3.

В книге VI «Пропорциональное распределение» из того же сочинения идёт речь и о распределении налогов (зерновых и стоимостных) между уездами и о пропорциональных «поставках людей» для выполнения повинностей.

К IV веку уже нашей эры относится китайский «Математический трактат пяти ведомств», в котором ставилась узкопрактическая задача: научить будущих чиновников решать с помощью математических методов те задачи, которые им встретятся при работе в ведомостях ([11], с.50).[92]

Вернёмся вновь на две тысячи лет назад (в 1700-1450 гг. до н.э.) в Средиземноморье на остров Крит. Это было время расцвета минойской цивилизации, связанное с именем легендарного критского царя Миноса. В окрестностях главного города Крита (Кносса) находился лабиринт, построенный по повелению Миноса архитектором Дедалом, в котором находилось чудовище (Минотавр), раз в 9 лет пожиравшеее 7 юношей и 7 девушек - дань Афин Миносу. Задача нахождения пути из лабиринта – это, говоря современным языком, задача теории графов. Математическое решение было предложено в 1895 году Гастоном Тарри [12][93]. В Древнегреческих мифах Тесей, убивший Минотавра, выходит из лабиринта с

---

[89] За тысячу лет до новой эры уже при династии Чжоу китайскими астрономами было установлено, что продолжительность солнечного года равна 365,25 суток, а лунный месяц равен 29,5 суток [9].

[90] «Математика в девяти книгах» - это классическое произведение, созданное в X – II веках до н. э. (См. [10].

[91] Единица длины в эпоху позднего Шан ,была равна 0.169 м.

[92] К практическим задачам, которые должны были решать чиновники с помощью математики, относились:
а) умение вычислять площади разной конфигурации;
б) определение количества и стоимости снаряжения и провианта для групп людей, посылаемых для выполнения разных работ;
в) умение осуществлять справедливый обмен зерна на те, или иные вещи, включая шёлк;
г) умение справедливо распределять налоги, как между структурными подразделениями (прежде всего уездами), так и между конкретными хозяйственными единицами.
д) умение вычислять трудозатраты при строительстве разных объектов и проведении земляных работ.

[93] *Чтобы выбраться из лабиринта, достаточно соблюдать следующее правило: «Никогда не проходить дважды по одному и тому же коридору в одном направлении; находясь на перекрёстке х, не выбирать того коридора, который привёл на перекрёсток х в первый раз, - если только имеется возможность другого выбора* ([13], с.77).

помощью клубка нити, данной ему заранее Ариадной, дочерью Миноса, и закреплённой одним из концов у входа в лабиринт.

К IX веку до н.э. (точнее к 826-814 гг. до н.э.) относится основание Карфагена (на территории современного Туниса) легендарной сестрой царя финикийского города Троя Дидоной, ставшей первой царицей Карфагена. При этом Дидона попросила у местного племени участок земли, который можно обхватить шкурой одного быка. После согласия племени и получения шкуры Дидона предложила разрезать шкуру на узкие ремни и связать их.

Далее, полученным канатом (конечной длины), концы которого закрепляются на прямолинейном побережье, требовалось в зависимости от формы каната и точек закрепления концов охватить наибольшую территорию[94]. Эта задача, решенная Дидоной, была исторически первой задачей вариационного исчисления.([14],с.13-14)

В рамках греческой культуры (VI век до н. э. – IV век новой эры), кроме создания математики как науки, решались и прикладные задачи, в том числе и с явно экономическим содержанием, которые в свою очередь стимулировали развитие математики. К ним можно отнести задачу квадрирования участка земли в форме круга, задачу удвоения (объёма) куба[95] (из золота), задачи по смешению (например, золота и серебра), и др. (См., например, [15] , [16] и [17]).

С VII века н. э. начинается расцвет арабской культуры, сопровождавшийся развитием и математики. Правда, новых экономических задач, способствовавших развитию математического образования, там не появилось. Принципиально новые экономические задачи, связанные с учетом, торговлей и страхованием появились в Европе, начиная с 13 века. Не случайно, это отразилось в творчестве Леонардо Фибоначчи (Fibonacci L.:1180-1240), Луки Пачоли (Pacioli L.:1445-1514) и Блеза Паскаля (Pascal B.:1623-1662). Работа 1763г. Франсуа Кенэ (Quesnay F.:1694-1774) по анализу экономической таблицы ([19], с.360-369) способствовала развитию уже в XX веке теории положительных матриц, а работа 1781 г.[20] Гаспара Монжа (Monge G.:1746-1818) – к развитию и совершенствованию теории транспортных задач, вплоть до создания в конце XX века идемпотентного анализа.

Библиографический список

1. *Ван дер Варден, Б.Л.* Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции [Текст] / Б.Л. Ван дер Варден / – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.
2. *Peet, T.E.* The Rhind mathematical papyrus [Текст] / T.E. Peet /– Liverpool: Hodder&Stoughton, 1923.
3. *Раик, А.Е.* Очерки по истории математики в древности [Текст] / А.Е. Раик /– Саранск: Мордовское книжное изд-во, 1977. -370 с.
4. *Выгодский, М.Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире [Текст] / М.Я. Выгодский / – М.: Наука, 1967. -369 с.
5. *Нейгебауер, О.* Лекции по истории античных математических Культур [Текст] / О. Нейгебауер / (Пер. с нем. С.Я. Лурье), т.I. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 242 с.
6. *Одинец, В.П.* Основы финансовой математики для Предпринимателей [Текст] / В.П. Одинец / – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2008. -112 с.

[94] Дидона предложила форму каната - полуокружность.

[95] Задача возникла не позже V века до н.э. По античной легенде на острове Делос вспыхнула эпидемия какой-то смертельной болезни. Дельфийский оракул сообщил жителям острова о том, что для остановки эпидемии нужно удвоить жертвенник святилища из золота, имеющий форму куба. Попытки решить задачу математически, используя только циркуль и линейку, не привели к решению. В 1837г. Пьер Ванцель (Pierre Wantzel: 1814-1848) показал, что с помощью циркуля и линейки задача удвоения куба решения не имеет. (См.[16]). Первое решение задачи удвоения куба, выходящее за рамки двух инструментов (циркуля и линейку), дал в конце V века до н.э. Гиппократ Хиосский. Другое решение, основанное на пересечении тора, конуса и кругового цилиндра, дал в начале IV века до н.э. Архит Тарентский (428-347гг. до н. э.).

7. *Нейгебауер, О.* Точные науки в древности [Текст] /О. Нейгебауер / (Пер. с англ. Е.В. Гохман; под ред. А.П. Юшкевича). – М.: УРСС, 2003. -240 с.
8. *Herodotis Halicarnassei* Historiariarum libri IX [Текст] / Herodotis Halicarnassei / - Lipsiae, 1828.
9. *Needham, J.* Science and Civilization in China [Текст] / J. Needham / Vol.1. – Cambridge: 1954.
10. *Берёзкина, Э.И.* О «Математике в девяти книгах» [Текст] / Э.И. Берёзкина / Историко-математические исследования. - М.: ГИТТЛ, 1957. - №10. – с.427- 538.
11. *Берёзкина, Э.И.* Математика древнего Китая [Текст] / Э.И. Берёзкина / – М.: Наука, 1980. – 312 с.
12. *Tarry, G.* Le problèm des Labyrinthes [Текст] / Tarry G. / Nouvelles Annales de Math. 14 (1895). - 187-189 с.
13. *Берж, К.* Теория графов и её применение [Текст] / К. Берж / (Пер. с фр. А. А. Зыкова; под ред. И. А. Вайнштейна) – М.: ИЛ, 1962.- 319 с.
14. *Тихомиров, В.М.* Рассказы максимумах и минимумах [Текст] / В.М. Тихомиров / – М.:Наука, 1986. – 192 с.
15. *Одинец В.П.* Зарисовки по истории математики [Текст] / В.П. Одинец / Учебное пособие. – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2005. – 232 с.
16. *Перельман, Я.И.* Знаете ли вы физику? [Текст] / Я.И. Перельман /– М. – Л.: ГИЗ, 1934.
17. *Прасолов В.В.* Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга [Текст] / В.В. Прасолов / – М.: Наука, 1992, - 80 с. 1
18. *Омар Хайям* Об искусстве определения золота и серебра в состоящем из них теле [Текст] / Омар Хайям / Историко-математ. исследования, 6 (1953). – с. 108-112.
19. *Кенэ, Ф.* Избранные экономические произведения [Текст] / Ф. Кенэ / – М.: Соцэгиз, 1960. – 421 с.
20. *Monge, G.* Déblai et remblai [Текст] / G. Monge / – Memoires de l’Ac des Sci, Paris, 1781.

Математический априоризм В.Я. Цингера

В.Я. Перминов

Профессор чистой математики Московского Императорского университета Василий Яковлевич Цингер (1836-1907) внес большой вклад в развитие российской математики и в разработку программ ее преподавания. Получили признание его работы по геометрии, по теоретической механике и по теории приближений. Впервые в России он начал читать систематический курс по проективной геометрии. Вместе со своими учителями Н.Д.Брашманом и А.Ю. Давидовым принимал активное участии в организации Московского математического общества, с 1886 по 1891 – президент этого общества. Известен также как ботаник. В 1880 году вышла его фундаментальная работа «Сборник сведений о флоре Средней России».

Особой чертой творческой деятельности В.Я.Цингера было стремление к углублению философских оснований математики. Он пытался уяснить природу очевидностей, лежащих в основе первых математических понятий, и найти приемлемое разрешение методологических трудностей, возникших в математике вследствие введения в нее абстрактных структур, таких как неевклидовы и многомерные геометрии, проективные пространства и кватернионы, т.е. структур, явно выходящих по характеру своих определений за рамки классической математики. В.Я.Цингер опубликовал три статьи, посвященные разработке этих вопросов: «Точные науки и позитивизм» (1874), «Об отношении математического познания к наукам опытным и философским» (1875) и «Недоразумения во взглядах на основания геометрии» (1894). В этих работах он затронул широкий круг вопросов, относящихся к философии науки, дал детальную критику позитивистской школы теории познания в лице О.Конта и

Дж.Ст.Милля и наметил обоснование кантовского априоризма как наиболее адекватной основы для понимания сущности математической науки. Здесь мы рассмотрим только аргументы Цингера, направленные на защиту кантовского априоризма, и ограничимся в основном анализом последней из указанных его статей, в которой эта тема является центральной.

Важно отметить, что Цингер защищал кантовскую теорию познания не в тех интерпретациях, которые давали ей его современники, но в ее собственно кантовских формулировках, а именно, в тех ее положениях, которые были подчеркнуты самим Кантом в качестве основополагающих. Это обстоятельство заслуживает внимания, поскольку в 70-х годах 19-го столетия, к которым относятся первые работы Цингера по философии математики, кантовская теория познания часто отвергалась, а еще чаще «исправлялась» в направлении, противоречащем ее духу. Никто не сомневался, конечно, что Кант – великий философ, но основная его идея, согласно которой человеческое познание базируется на априорных принципах, не зависящих от содержания мышления и, в своей сущности, вневременных, вызывала возражения: она представлялась скорее пережитком схоластики, чем описанием реальной логики познания. Естествоиспытатели 19-го столетия, привыкшие воспринимать принципы науки как зависимые от опыта, т.е. как относительные и подлежащие корректировке, не могли признать существования знания a priori как особого типа знания, не корректируемого и вневременного. Идея априорного знания очевидным образом противоречила также и духу эволюционного мировоззрения, которое завоевывало в эти годы все более широкое признание. С тем положением, что кантовская идея априорного знания не соответствует логике реального познания, соглашались также и философы. В теории познания мы видим естественное и неуклонное отступление от Канта. Мы видим это у Милля, Спенсера, Маха, Бергсона, Оствальда, т.е. почти у всех значительных философов 19-го столетия. Признавая наличие нормативной основы познания, о которой говорил Кант, все эти философы искали способы сведения этой нормативности к эволюционной и исторической парадигме. Неокантианцы, выдвинувшие лозунг «Назад к Канту», в действительности, также считали, что кантовская идея должна быть некоторым образом релятивизирована. В своей книге «Кантовская теория опыта» Г.Коген выдвинул положение, что кантовские априорные формы мышления представляют собой лишь предельно устойчивые гипотезы, продиктованные принятой в данную эпоху методологией научного мышления и, следовательно, подверженные изменению с изменением определяющих методологических установок. Можно сказать, что уже неокантианцы наметили движение от Канта к тому абсолютному релятивизму, который стал господствующим в теории познания 20-го века и который К.Поппер выразил в положении: « В структуре содержательной теории нет ничего абсолютного». Опасность соскальзывания к безбрежному релятивизму в теории познания почувствовал, по-видимому, только Э.Гуссерль, который в своих «Логических исследованиях» (1900) постарался показать абсурдность безбрежного релятивизма, но он не нашел понимания у современников. Можно сказать, что на протяжении двух столетий, прошедших после Канта, его теория в этом наиболее значимом для него пункте только отвергалась: и ученые, и философы были едины в своем стремлении ослабить ее абсолютизм и примирить ее с идеей относительности всех принципов. Философские сочинения В.Я.Цингера интересны для нас прежде всего тем, что они демонстрируют совершенно другое, отличное от общепринятого в его время, понимание кантовской философии. Задолго до Гуссерля В.Я.Цингер ясно осознал то обстоятельство, что релятивистские и позитивистские типы мировоззрения поверхностны в своей основе и заведомо не применимы к пониманию природы математического мышления.

Расширение математики за счет принятия новых, более абстрактных теорий, говорит Цингер, было полезным с точки зрения ее теоретической силы и возможностей приложения. Но здесь сразу же возникли методологические трудности. Некоторые математики стали утверждать, что признание неевклидовых геометрий доказывает ограниченность или неполную истинность евклидовой геометрии, что новые математические теории опровергают старые учения о пространстве как физической реальности, описываемой законами евклидовой геометрии. Возникло учение о математике, в соответствии с которым интуитивно ясные аксиомы евклидовой геометрии являются не истинами созерцания и не истинами, взятыми из опыта, а только конвенциями, сформировавшимися на основе опыта. Получил широкое признание тезис Римана, согласно которому вопрос о природе реального пространства может быть решен на основе опыта и измерений. Эти положения, считает Цингер, являются недоразумениями, искажающими истинную природу математического мышления. Наука, в действительности, имеет два источника: источник опыта и источник духа. Существует коренное различие между представлениями, данными сознанию a priori, и представлениями, которые навязаны нашему сознанию опытом. Основная и глубоко ошибочная догма эмпиризма, говорит Цингер, состоит «в отрицании духовной сущности сознания и духовного бытия вообще»[1].

Представления евклидовой геометрии, по Цингеру, - это представления a priori, идущие от духа, они никак не связаны с опытом в своем происхождении и, вследствие этого, они не могут быть поколеблены ни со стороны какого-либо опыта, ни со стороны других геометрических теорий. Здесь Цингер повторяет трансцендентальный аргумент Канта, состоящий в том, что допущение опытного происхождения геометрии лишает ее статуса науки, основанной на достоверных принципах. Собственный аргумент, который приводит здесь Цингер, проистекает из необходимой логической связи новых геометрий со старыми. Появление неевклидовых геометрий не может привести к отказу от каких-либо принципов евклидовой геометрии по той простой причине, что все новые геометрии являются обобщениями геометрии евклидовой и зависят от последней в том смысле, что все они в своих внутренних связях и построениях необходимо опираются на положения евклидовой геометрии: они не могут существовать без опоры на евклидову геометрию, которая получает свою достоверность из первичной интуиции сознания. «Верованием в опытное происхождение – пишет он, - можно только разрушить геометрию, лишить ее достоверности, определенности и точности»[2]. Как и Кант, Цингер убежден, что математика базируется на абсолютных основаниях и этот факт доказывает полную несостоятельность всех попыток ее эмпирического обоснования.

Цингер категорически возражает и против версии эмпиризма, которая была изобретена Дж.Ст. Миллем и стала известной под названием конвенционализма. Суть ее состоит в том, что геометрические понятия не являются априорными и не являются абстрагированными из опыта, а представляют собой некоторого рода интеллектуальные конструкции или идеализированные схемы, приближенные к опыту. С точки зрения Милля, не верно, что представление о шаре дано нашему сознанию априори и не верно, что оно формируется непосредственно в процессе чувственного восприятия круглых предметов. В действительности, считает Милль, образ шара возникает в нашем сознании как специфическая идеализация, через добавление к неопределенному чувственному образу круглого предмета ряда идеальных свойств, таких как непрерывность поверхности, абсолютно равное расстояние всех ее точек от центра и т.п., которых мы не находим непосредственно в данных опыта. Геометрические объекты, с точки зрения Милля, конструируются человеческим сознанием как идеальные схемы чувственных образов и признаются необходимыми для сознания вследствие их полезности для схематического отображения реальности. Историческая устойчивость и интуитивная ясность объектов евклидовой геометрии выводятся здесь не из чистого созерцания, а исключительно из статуса идеальных схем, как социально полезных и общепринятых установлений. Милль был убежден, что за каждой геометрической теоремой стоит предметная реальность, однако, оформленная в идеализированной форме. Мы не отказываемся и никогда не откажемся от определений евклидовой геометрии потому, что они близки к чувственным конфигурациям сознания и полезны для ориентации в сфере опыта.

По мнению Цингера, такая трактовка геометрических объектов покоится на заблуждении, ибо она вносит относительность в ту область знания, где царствует абсолютность. Понятие конвенции предполагает возможность ее пересмотра и знание, основанное на конвенциях – знание, несомненно, апостериорное и историческое. Представления же евклидовой геометрии, убежден Цингер, никак не связаны с опытом в своем происхождении и не подлежат какому-либо пересмотру. В случае арифметики и геометрии мы имеем дело не просто с идеализированным знанием, а со знанием a priori, идущим от субъекта, т.е. с особым знанием, имеющим абсолютный и вневременный статус. Подмена знания a priori знанием системой конвенцией, считает Цингер, является ошибкой, искажающей истинную природу математического мышления.

Является недоразумением и положение Римана, согласно которому, вопрос о действительной геометрии окружающего нас пространства может быть решен на основе опыта или измерений. Свой знаменитый доклад «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» Риман закончил следующими словами: « …Необходимым же следствием отсюда будет то, что теоремы геометрии не могут быть выведены из общих понятий о величине, но что те свойства, которыми отличается пространство от других мыслимых трекратно-протяженных величин, могут быть выведены только из опыта»[3]. Цингер считает, что опыт в принципе не может отвечать на такие вопросы. Даже если бы опыт принудил нас признать, что в некоторых реальных треугольниках сумма углов меньше двух прямых, то мы должны были бы только заключить, что наши физические углы и прямые в каких-то отношениях не соответствуют определениям евклидовой геометрии, но это никак бы не поколебало истинности евклидовой геометрии самой по себе и не дало бы никаких оснований утверждать, что наша пространство не евклидово. Этот опыт указывал бы всего лишь на неадекватность принятой интерпретации, но он не доказывал бы ни внутренней несостоятельности евклидовой геометрии и ни даже того, что не существует другой интерпретации прямых и углов, при которых те же самые данные опыта были бы вполне соединимы с этой геометрией.

Мы должны осознать то обстоятельство, считает Цингер, что установление геометрии пространства вообще не может быть достигнуто на основе каких-либо опытов или измерений. «Лобачевский думал, что можно непосредственными измерениями углов в очень больших треугольниках убедиться, равна ли сумма таких углов полуокружности или нет. Он даже действительно производил такую поверку в треугольниках, вершинами которых были два положения Земли и одна их неподвижных звезд, параллакс которой считался известным. Подобные измерения не могли, само собою разумеется, привести ни к какому результату, так как самый план наблюдений построен был на логической ошибке, которая называется ложным кругом; дело в том, что параллакс звезды, предполагаемый известным, определяется на основании поверяемой аксиомы как раз из тех наблюдений, которые по мнению Лобачевского, должны эту аксиому поверять. Но Лобачевскому вовсе не нужно было производить новых наблюдений: астрономы уже давно и неоднократно встречались с треугольниками, не удовлетворяющими требованиям Эвклидовой геометрии; но именно это несогласие повело их не к изменению аксиом геометрии, а к открытию рефракции, аберрации, собственного движения звезд и т.д. …Да и уноситься на звезды нет никакой надобности: измерения на земной поверхности также давали и дают результаты, более или менее уклоняющиеся от требований геометрии; но по этим уклонениям геодезисты судят однако не о степени верности 11-ой аксиомы»[4].

Основной тезис Цингера состоит в том, что расхождения геометрии с опытом и реальными измерениями не могут поколебать геометрию во внутренней согласованности ее принципов. Он считает также, что вопрос об истинной геометрии окружающего нас пространства вообще не является осмысленным. «…Опытные данные сами по себе, вследствие неизбежного недостатка точности, настолько податливы, что всегда могут быть приноровлены и к не-эвклидовой и ко всякой другой геометрии, а из этого еще с большей ясностью обнаруживается, что достоверность аксиом не может ни подтверждаться, ни опровергаться посредством опытной поверки»[5].

Мы видим, что Цингер последовательно проводит кантовский априористский взгляд на природу евклидовой геометрии. Евклидова геометрия абсолютно достоверна, и эта достоверность следует не из опыта и не из конвенций, а из созерцания пространства как необходимой формы чувственности. Кантовская философия берется как заслуживающая доверия во всех ее положениях. Единственное место, где он отступает от Канта – это вопрос об априорности механики. Для Канта ньютоновские принципы механики также априорны, как и аксиомы геометрии, и образуют сферу чистого естествознания. Один из вопросов «Критики чистого разума» состоит в том, чтобы выяснить, как возможно чистое естествознание. Цингер не разделяет этой идеи. Он соглашается с тем, что кинематика, основанная на геометрии, имеет априорный статус, но это не относится к принципам динамики. «Кинематические представления так близки и сродны с геометрическими, что очень часто для наглядности чисто геометрических исследований мы невольно прибегаем к представлениям перемещения, изменения формы и т.п. Но наше представление ничего не может нам указать, когда дело касается динамических вопросов; основные динамические законы лежат совершенно вне области чистого представления, которое оставляет полный простор произволу в этом отношении и само по себе ничего не решает относительно истины или вероятности динамических законов»[6].

С современной точки зрения мы можем поставить некоторые вопросы к самой концепции Канта и к философской установке Цингера, производной от нее. Можно спросить, как понимать знание от духа, о котором говорит Цингер, и как дух может порождать точные и непреложные структуры сознания типа евклидовой геометрии? Можно спросить также, каким образом структуры, которые, как мы предполагаем, совершенно не зависимы от опыта в своем становлении, столь естественно соединяются с ним в качестве средства описания? Остается не вполне ясным и следующий момент: если эмпирическое знание, как утверждает Цингер, податливо и соединимо с любой геометрией, то почему наша интуиция все-таки диктует нам аксиомы евклидовой, а не аксиомы какой-либо иной геометрии? Очевидно, что мы должны были бы приписать некоторые свойства самой субъективности, чтобы вывести из нее логику и принципы математики как априорные структуры знания именно в том виде, как они существуют. Кантовская теория не решает этих вопросов и Цингер также не дает на них ответа. В сущности, он исходит из Канта и не идет дальше его. В понимании генезиса математических истин он ссылается на кантовское чистое созерцание как на инстанцию, заключающую в себе бесспорную или абсолютную достоверность. Мистика кантовского априоризма остается не устраненной. Опираясь на установки Канта, Цингер дает последовательную критику эмпирического и конвенционалистского понимания математики, но он никак не продвигается в обосновании самих кантовских установок.

Это обстоятельство, однако, не дает нам оснований рассматривать усилия Цингера по прояснению природы математических понятий в качестве малозначимых или бесполезных. Исходя из кантовской концепции математики, он рассматривает проблемы, возникшие на совершенно другой стадии развития этой науки, и формулирует ответы, указывающие на ограниченность современной ему философии математики. Защита философской системы может быть реализована не только через углубление и разъяснение ее принципов, но также и через соединение ее с новым материалом, через демонстрацию ее способности быть основанием для решения новых методологических проблем. Это собственно и делает Цингер, рассматривая методологические недоразумения в математике своего времени. Ясное противопоставление различных подходов, даже если их основания остаются в тумане, выдвигает философию математики на новый уровень.

Новая идея в науке - это в особенности относится к философии - появляется обычно в очень смутном виде, без достаточных определений, с привлечением случайных и даже мистических допущений. Достаточно здесь вспомнить историю формирования принципа инерции, принципа наименьшего действия или законов сохранения энергии. В продвижении такого рода великих и по необходимости еще смутных идей бесценна роль последователей, которые в несовершенно выраженной идее способны почувствовать содержащееся в ней рациональное содержание, освободить идею от мистики, соединить с другим материалом и, может быть, выразить в более ясных понятиях. Последователь принимает новую идею без достаточного числа аргументов, скорее на веру как нечто близкое к своему мироощущению. Кантовское учение об априорности математики, конечно, не пережиток схоластики, как думают многие философы еще и сегодня, но интуиция гения, указывающая путь к новой философии. Нельзя сказать, что философы 19 столетия, пытающиеся исправить Канта, не понимали его идей. Дело не в понимании или непонимании философа, а в глубинной ориентации эпохи, ориентирующей на принятие или опровержение данного типа идей. Можно говорить здесь о бергсоновской способности *вчувствования*, непосредственно убеждающей в истинности идеи. Но для философского вчувствования нужна не только конгениальность личностей, но и конгениальность эпох. Позитивистская ориентация философии 19-го столетия ориентировала на безусловное отрицание априорного знания как знания не совместимого с идеей позитивной теории, основанной на опыте и корректируемой на основе опыта. Но в настоящее время становится все более ясным, что для философии математики и для теории познания вообще истинной основой является не эмпиризм, не конвенционализм, не эволюционная эпистемология, а именно априоризм, утверждающий абсолютность и вневременность истин, лежащих в основе человеческого мышления. Именно в этом плане мы можем осознать значение философии математики В.Я.Цингера. Мы видим здесь личность, каким-то образом прорвавшуюся через глубинные установки своей эпохи, через органически присущее ей восприятие природы и истоков человеческого знания. Достойно удивления, что, будучи математиком, он яснее, чем все современные ему философы, почувствовал полную несостоятельность эмпирической философии и недостаточность таких философских паллиативов как конвенционализм и позитивизм для понимания природы математики. То обстоятельство, что он не углубил понимание природы априорного знания, не может быть поставлено ему в вину. По большому счету, это все-таки проблема для философов. Здесь надо принять во внимание и то обстоятельство, что вопросы, связанные с обоснованием априористской теории познания не решены и сейчас и почти нет надежды на то, что они будут решены в обозримом будущем.

Библиографический список

1. *Цингер, В.Я.* Недоразумения во взглядах на основания геометрии [Текст] / В.Я. Цингер /М., 1894.- С.5.
2. *Цингер, В.Я.* Недоразумения во взглядах на основания геометрии [Текст] / В.Я. Цингер / М.: 1894.- С.8.
3. *Риман, Б.* О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии [Текст] / Б. Риман / В.кн.: Об основаниях геометрии. - Казань . - 1893.- С.67.
4. Недоразумения во взглядах на основания геометрии [Текст] С. 6 -7.
5. Недоразумения во взглядах на основания геометрии [Текст] С. 7.
6. *Цингер, В.Я.* Точные науки и позитивизм [Текст] / В.Я. Цингер / Издание Императорского Московского Университета. - 1874.- С.52.

Феномен провинции (очерк истории математики в Нижнем Новгороде)

Г.М. Полотовский

Иногда приходится слышать, что математика в России есть только в Москве и Санкт-Петербурге. При очевидной гиперболичности этого утверждения его источники понятны – это и всем известная центростремительность нашей культуры, и отражение того факта, что лишь в Москве и Санкт-Петербурге были «покрыты» (по крайней мере, до недавнего времени) практически все области математики. Тем не менее, не следует забывать, что и провинция внесла заметный вклад в развитие отечественной математики, что я и попытаюсь показать на примере Нижнего Новгорода. Естественно, термин «провинция» не несёт здесь никакого негативного оттенка, а означает лишь место, отличное от двух столиц.

Деятельность многих упоминаемых ниже математиков хорошо известна, о многих из них имеется более или менее обширная литература, поэтому ввиду недостатка места я ограничусь лишь ссылками на некоторые публикации и отдельными замечаниями.

Известные математики нижегородского происхождения.

Перечислю ряд математиков, родившихся на нижегородской земле: **Н.И. Лобачевский** (1792–1856) ([1] –[3]); **В.А. Стеклов** (1863–1926) ([4]); **Н.Н. Боголюбов** (1909–1992) ([5]); **А.Н. Боголюбов** (1911–2004) ([6]); **В.Е. Дьяченко** (1896–1954); **С.А. Лебедев** (1902–1974) ([7]); **С.П. Новиков** (род. в 1938 г.).

Напомню, что **Вадим Евгеньевич Дьяченко** – украинский математик, чл.-корр. АН УССР (1934), с 1926 г. работал в Киевском университете, а с 1934 г. – и в Институте математики АН УССР. Его основные труды относятся к математической физике, вычислительной математике, теории относительности, общей механике.

Сергей Алексеевич Лебедев – академик АН СССР (1953), под его руководством в 1948 – 1950 гг. была разработана первая в СССР и в континентальной Европе электронно-вычислительная машина (МЭСМ)[96].

Известные математики не нижегородского происхождения, в жизни которых были нижегородские периоды.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) ([9]) родился в Ярославле, но в 1870 г. он с матерью и братьями переехал в Нижний Новгород, где в 1876 г. окончил с золотой медалью гимназию. Математику и физику преподавал ему талантливый педагог и ученый А.П. Грузинцев, другим учителем, преподававшим математику Ляпунову, был Д.К. Гик.

Виктор Викторович Бобынин (1849–1919) – первый русский историк математики – родился в деревне Шили Рославльского уезда Смоленской губернии. После окончания с золотой медалью Тульской гимназии в 1867 г. он поступил на отделение естественных наук физмата Московского университета, а в 1868 г. перешёл на математическое отделение. По окончании университета в 1872 г. Виктор Бобынин не был приглашён в аспирантуру и поступил на службу в Нижегородскую военную гимназию преподавателем математики, физики и космографии. Именно в Нижнем Новгороде определился его интерес к истории математики. С осени 1882 г. В.В. Бобынин приступил к чтению курса истории математики в Московском университете в статусе приват-доцента. С 1917 г. он профессор Московского университета.

Иван Иванович Привалов (1891–1941), член-корреспондент АН СССР (1939), автор знаменитых учебников, среди которых «Введение в теорию функций комплексного переменного», родился в Нижнем Ломове Пензенской губернии. В 1904 г. вместе с семьёй И.И. Привалов переехал в Нижний Новгород, где в 1909 г. окончил гимназию, после чего поступил в Московский университет, который окончил в 1913 г. В 1915 г. И.И. Привалов стал вице-президентом Московского математического общества.

Выдающийся советский математик москвич **Пётр Сергеевич Новиков** (1901–1975), академик АН СССР (1960), несколько лет жил и работал в Горьком (так в 1932 – 1990 гг. назывался Нижний Новгород). Вот как вспоминала об этом профессор Е.А. Леонтович-Андронова (расшифровка аудиозаписи 1996 года): «*Пётр Сергеевич вообще работал в Москве, но одно время он в Москве пропадал. Пропадал потому, что у него была колоссальная педагогическая нагрузка, и он просто работать совершенно не мог. И*

---

[96]Сравнительно недавно стало известно (см. [8], с.57) , что на десять дней раньше, чем МЭСМ, была принята в эксплуатацию машина М-1, разработанная под руководством И.С. Брука и Б.И. Рамеева. М-1 была первой в мире ЭВМ, все логические схемы которой были сделаны на полупроводниках.

Александр Александрович [Андронов] *его вытащил. Он вытащил его сначала в Водный институт, а потом, по-моему, он был просто сотрудником нашего отдела. И Пётр Сергеевич сделал несколько работ и послал их в Москву. И Колмогоров* (*он ездил в Москву, Пётр Сергеевич*) *встретил его и сказал: "Вы там расцвели в Вашем Горьком" и пригласил его куда-то в академический институт*». Во время пребывания П.С. Новикова и его жены Л.В. Келдыш в Горьком родился их сын, будущий академик С.П. Новиков.

Начало развития математики в Нижнем Новгороде.

У истоков развития в Нижнем Новгороде математики как науки и университетской дисциплины стоял **Иван Романович Брайцев** (1870–1947). В 1896 г. он окончил физмат Московского университета, приват-доцентом которого стал в 1899 г. В 1900–1915 гг. работал в Варшавском политехническом институте, с 1908 г. – профессор Варшавского университета.

В 1915 г. Варшавский политехническим институт был эвакуирован в Москву, затем в 1916 г. был переведён в Нижний Новгород и в 1917 г. был переименован в Нижегородский. И.Р. Брайцев приехал в Нижний Новгород в 1916 г. вместе с Варшавским политехническим. На базе этого института, Нижегородского Народного университета и Нижегородских Высших сельскохозяйственных курсов в 1918 г. был создан Нижегородский государственный университет (тогда – НГУ). И.Р. Брайцев был инициатором создания и первым деканом (до 1939 г.) физико-математического факультета НГУ, одновременно преподавал и в других нижегородских вузах. В университете И.Р. Брайцев был первым заведующим кафедрой математического анализа, а с 1942 г. до конца жизни он заведовал кафедрой теории функций, созданной по его инициативе.

Значение педагогической деятельности И.Р. Брайцева трудно переоценить. Так, в книге [10], посвящённой жизни и деятельности И.Р. Брайцева, отмечается, что в 1937 г. в Горьком работало не менее 220 учителей, получивших у него математическое образование. Приведу не публиковавшийся ранее фрагмент из воспоминаний выпускника Горьковского университета Б.Н. Верещагина (1918–2008), ставшего впоследствии крупным дипломатом-китаистом: «*Основные курсы из области высшей математики читались профессором Иваном Романовичем Брайцевым и его учениками. Иван Романович читал математический анализ, теорию функций комплексного переменного, которая также была его предметом научной работы. В этой области у него были оригинальные научные результаты, часть из них даже впоследствии была "переоткрыта" весьма известным швейцарским математиком*[97]*. Брайцев, которому в те годы было около 70 лет, конечно, хорошо знал преподававшиеся им разделы математики, однако читал лекции довольно однообразно и скучновато. Иван Романович пользовался немалым уважением, он очень гордился тем, что занимается чистой математикой, и некоторых своих коллег, которые работали в области глубоко математизированных отраслей современной физики, творчески применяя и развивая соответствующие области математики, он математиками не считал, называя их "физиками", что в его понимании похоже было на то, что они "нематематики"*».

Научные интересы И.Р. Брайцева относились главным образом к теории аналитических функций, дифференциальным, интегральным и функциональным уравнениям. Многие из его учеников стали известными учёными, среди них ученик Р.И. Брайцева ещё по Варшавскому университету член-корреспондент АН СССР (1946) астроном М.Ф. Субботин (1893–1966) и крупный специалист по теории функций комплексной переменной член-корреспондент АН СССР (1970) А.Ф. Леонтьев.

[97] По-видимому, здесь имеется в виду математик венгерского происхождения Д. Пойя (1887–1985), в 1914 – 1940 годах работавший в Высшей технической школе в Цюрихе.

Алексей Фёдорович Леонтьев (1917–1987) родился в селе Яковцево Нижегородской губернии, в 1939 г. окончил Горьковский университет[98], в 1942 г. под руководством И.Р. Брайцева защитил кандидатскую диссертацию «Дифференциально-разностные уравнения». В 1945 г. он поступил в докторантуру к члену-корреспонденту АН СССР А.О. Гельфонду и в 1948 г. защитил докторскую диссертацию «О классе функций, определённых рядами полиномов Дирихле». В 1942 – 1954 гг. А.Ф. Леонтьев преподавал в ГГУ, затем заведовал кафедрой в МЭИ, с 1962 г. работал в МИ АН им. В.А. Стеклова. В 1971 г. А.Ф. Леонтьев переехал в Уфу, где под его руководством сформировалась известная школа по теории функций комплексной переменной.

Школа академика Андронова.

Ученик выдающегося физика академика Л.И. Мандельштама (1879–1944), академик АН СССР (1946) **Александр Александрович Андронов** (1901–1952) переехал в Нижний Новгород из Москвы в 1931 г. Об А.А. Андронове и о созданной им научной школе по теории нелинейных колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений написано очень много – укажу только [11]–[14].

А.А. Андронову удалось довольно быстро сплотить группу сильных учёных, которые через некоторое время воспитали исследователей следующего поколения. В результате образовалась научная школа настолько мощная, что, несмотря на наши достижения последних двадцати лет в области организации науки и образования, эта школа функционирует до сих пор и в значительной мере сохраняет свои мировые позиции. Нет никакого сомнения, что сам А.А. Андронов и его школа явились для Нижнего Новгорода основными наукообразующими факторами в области физики и математики.

В книге [12] приведено «генеалогическое дерево» школы Андронова, начинающееся от самого А.А. Андронова и доведённое до 2000 года. В это дерево[99] включено более трёхсот имён, и, хотя часть из них принадлежит физикам, ясно, что в настоящем тексте невозможно даже назвать всех математиков. По этой причине список упоминаемых ниже учёных ни в какой мере не претендует на полноту, а их выбор, конечно, отчасти субъективен, поэтому я приношу извинения тем, кого за недостатком места не смог упомянуть.

Ближайшими сотрудниками А.А. Андронова были его жена **Евгения Александровна Леонтович-Андронова** (1905–1997) ([15]–[17]) и **Артемий Григорьевич Майер**[100] (1905–1951), специалисты в области качественной теории дифференциальных уравнений. Отмечу, что во многом благодаря усилиям Е.А. Леонтович-Андроновой математическая часть школы Андронова была сохранена после безвременной смерти её лидеров А.А. Андронова и А.Г. Майера.

Из учеников А.А. Андронова, ставших затем его близкими сотрудниками, назову здесь **Николая Николаевича Баутина** (1908–1993) ([20], [21]) и **Юрия Исааковича Неймарка** (1920–2011) ([12]), одного из основателей и организаторов в Нижегородском университете первого в СССР факультета ВМК (1963). Назову ещё некоторых математиков следующих поколений: Л.Н. Белюстина (1919–1998), В.Н. Гольберг, С.Х. Арансон, Я.Л. Уманский (ученики Е.А. Леонтович-Андроновой), В.А. Брусин (1937–2003), Ю.И. Городецкий (1930–2006), Р.Г. Стронгин, М.Л. Тай, М.А. Федоткин, М.М. Коган, М.И. Фейгин, С.В. Шильман (1935–1995) (ученики Ю.И. Неймарка).

---

[98]Интересно, что А.Ф. Леонтьев в своей дипломной работе, выполненной под руководством Е.А. Леонтович-Андроновой, изучил основную бифуркацию рождения предельного цикла из сложного фокуса для 3-мерных аналитических систем. Эта работа осталась неопубликованной, а А.Ф. Леонтьев после окончания ГГУ сменил тематику.

[99]К сожалению, в нём имеются различные неточности.

[100]Единственный известный мне подробный текст о замечательном математике А.Г. Майере – это не опубликованная ещё статья по докладам [18], [19].

В 1962 г. после аспирантуры (руководитель Ю.И. Неймарк) **Леонид Павлович Шильников** (1934–2011) ([22]–[23]) защитил кандидатскую диссертацию «Рождение периодических движений из особых траекторий». Вскоре после этого Л.П. Шильников обнаружил принципиально новое явление: хаотичность систем, имеющих петлю сепаратрисы седло-фокуса с положительной седловой величиной. Очень быстро Л.П. Шильников становится одним из крупнейших в мире специалистов по теории бифуркаций многомерных динамических систем. Вокруг него концентрируется большая группа его учеников – Н.К. Гаврилов (1938–?), В.С. Афраймович, Л.М. Лерман, А.Д. Морозов, В.В. Быков, С.В. Гонченко, М.И. Малкин, Д.В. Тураев, И.В. Белых и др., – многие из которых продолжают активно работать, но не все в России. Л.П. Шильников был одним из организаторов и первым Президентом (1995 – 2001) Нижегородского математического общества.

Назову ещё группу исследователей, «происходящую» от С.Х. Арансона – В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка и др., продолжающих интенсивно работать в теории динамических систем.

К школе Андронова следует отнести и **Дмитрия Андреевича Гудкова** (1918–1992) ([24]–[26]): как неоднократно отмечал он сам, в 1948 г. именно А.А. Андронов предложил ему построить теорию грубости для плоских алгебраических кривых данной степени, а руководителем Д.А. Гудкова (впрочем, формальным) был А.Г. Майер. В результате многолетних исследований Д.А. Гудков решил (1969) задачу о топологической классификации неособых вещественных кривых степени 6 из первой части 16-й проблемы Гильберта и открыл (в виде гипотезы) сравнение по модулю восемь для *M*-кривых чётной степени, что послужило толчком к интенсивному развитию топологии вещественных алгебраических многообразий в последней четверти XX века. Из учеников Д.А. Гудкова этой тематикой продолжают заниматься Е.И. Шустин (Тель-Авивский университет), А.Б. Корчагин и Г.М. Полотовский (оба ННГУ). Отдельно следует отметить, что книга Д.А. Гудкова [1] фактически завершила исследования нижегородского периода биографии Н.И. Лобачевского, которыми в середине XX века занимались А.А. Андронов и созданная им для этого группа.

Исследования в других направлениях.

В Нижнем Новгороде работали ещё многие замечательные математики. Так, с 1944 г. в Горьком жил **Израиль Исаакович Гордон** (1910 – 1985), первый аспирант Л.С. Понтрягина. В 1935 г. в своей диссертации он ввёл кольцо когомологий. Таким образом, построение кольца когомологий было независимо и одновременно осуществлено тремя математиками – А.Н. Колмогоровым, Дж Александером и И.И. Гордоном, причём все трое сделали на эту тему доклады на международной топологической конференции 1936 года в Москве. Конструкция умножения когомологий, предложенная И.И. Гордоном, отличалась от конструкций А.Н. Колмогорова и Дж. Александера, которые были одинаковыми.

Александр Григорьевич Сигалов (1913–1969) ([27]) внёс вклад в исследование 19-й, 20-й и 23-й проблем Гильберта, причём в 1951 г. 20-я проблема была им решена. Его ученики Г.М. Жислин, В.И. Плотников (1922–1988), И.М. Сигал (в настоящее время работает в Торонто) стали известными математиками. Его учеником был и **Юрий Васильевич Глебский** (1927–1977) ([28]), открывший «Закон 0 или 1» в математической логике, создавший в Нижегородском университете школу по математической логике и дискретной математике, к которой относятся его ученики А.А. Марков (1937–1994), В.Н. Шевченко, В.А. Таланов, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький, Е.И. Гордон (сын И.И. Гордона, с 1999 г. работает в США) и др.

Назову ещё нескольких активно работающих нижегородских математиков с указанием основных областей их научных интересов: В.Е. Алексеев (теория графов), В.Н. Белых (теория бифуркаций), В.М. Галкин (алгебра, теория чисел), Н.И. Жукова (теория слоений), В.А. Калягин (ТФКП), М.И. Кузнецов (алгебры Ли), В.И. Сумин (оптимальное управление), М.И. Сумин (оптимальное управление), В.В. Чистяков (функциональный анализ), И.А. Шерешевский (математическая физика), Е.И. Яковлев (геометрия, топология, компьютерная топология).

Феномен провинции.

Попытаюсь в заключение кратко сформулировать некоторые выводы из обзора развития математики в Нижнем Новгороде, характерные, на мой взгляд, для математики в провинции.

1. Трудности информационного обмена (как получения информации, так и обнародования собственных достижений) и заметная изолированность от научного сообщества. Особенно сильно это проявлялось в советские годы виду политической закрытости государства Развитие Интернета несколько смягчило эти трудности, но все математики знают, что «правильное размахивание руками» при личном общении зачастую гораздо эффективнее штудирования толстых текстов.

2. Существенно неполное покрытие разделов математики. Ограничусь цитатой из А.М. Вершика [29]: «*Я не устаю повторять, что только позже, когда мы начали ездить по свету, мы поняли, что таких математических факультетов, как в ЛГУ, в мире было очень мало, а такого, как мехмат в МГУ, в мире просто не было нигде – по концентрации и по охвату всей математики, существующей на то время; по научному молодежному потенциалу»*

3. Наличие мощной научной школы в каком-то направлении, что, с одной стороны, позволяет концентрировать усилия, с другой – подымает уровень исследований и в других направлениях.

4. Разработка очень сложных и трудоёмких проблем. По-видимому, в провинции был другой ритм деятельности и не было такой острой соревновательности, как в столицах, что позволяло идти на риск занятий очень трудными задачами. Возможно, это частично объясняет факт крупного вклада нижегородских математиков в решение нескольких проблем Гильберта (см. выше о Д.А. Гудкове и А.Г. Сигалове).

5. Взаимодействие с математиками из столиц. В случае Нижнего Новгорода истоки этого взаимодействия идут от связей А.А. Андронова и Е.А. Леонтович с московскими учёными. Кроме того, здесь Нижнему Новгороду повезло и географически.

6. Математика в провинции ещё существует. Этот последний тезис можно рассматривать и как оптимистический, и как пессимистический.

Библиографический список

1. *Гудков, Д.А.* Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. [Текст] / Д.А. Гудков – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 241 с.
2. *Полотовский, Г.М.* Как изучалась биография Н.И. Лобачевского [Текст] / Г.М. Полотовский // Историко-математические исследования. Вторая серия. – 2007. – Вып.12(47). – С.32-49.
3. *Полотовский, Г.М.* К 220-летию со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского [Текст] / Г.М. Полотовский // Математика в высшем образовании. – 2012. – №10. – С.135-140.
4. *Губина, Е.В.* Владимир Андреевич Стеклов – учёный с нижегородской родословной [Текст] / Е.В. Губина // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. С.427-436.
5. *Полотовский, Г.М.* Штрихи к портрету (к 100-летию со дня рождения Н.Н. Боголюбова) [Текст] / Г.М. Полотовский // Математика в высшем образовании. – 2009. – №7. – С.161-172.

6. *Зубова, И.К.* Алексей Николаевич Боголюбов (к 100-летию со дня рождения) [Текст] / И.К. Зубова // Математика в высшем образовании. – 2011. – №9. – С.91-98.
7. *Малиновский, Б.Н.* История вычислительной техники в лицах [Текст] / Б.Н. Малиновский – Киев: «КИТ», ПТОО «А.С.К.», 1995. – 384 с.
8. *Одинец, В.П.* Зарисовки по истории компьютерных наук [Текст] / В.П. Одинец – Сыктывкар: Коми гос. пед. Инст., 2013. – 420 с.
9. *Шибанов, А.С.* Александр Михайлович Ляпунов [Текст] / А.С. Шибанов – М.: Молодая гвардия, 1985. – 336 с.
10. Иван Романович Брайцев. Серия «Личность в науке» [Текст] / Н.Б. Кузнецова (составитель) – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. – 192 с.
11. *Бойко, Е.С.* Школа академика А.А. Андронова [Текст] / Е.С. Бойко, М.: Наука, 1983. – 198 с.
12. *Неймарк, Ю.И.* Сухой остаток. К истории в лицах научной школы А.А. Андронова [Текст] / Ю.И. Неймарк – Н.Новгород, Нижегородский гуманитарный центр, 2000. – 142с.
13. Александр Александрович Андронов (1901–1952). Серия «Личность в науке» [Текст] / Н.В. Горская, Э.Е Митякова, О.И. Московченко, И.Г. Назина (составители). – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – 287 с.
14. *Губина, Е.В.* Академик А.А. Андронов и его школа (к 110-летию со дня рождения А.А. Андронова) [Текст] / Е.В. Губина // Математика в высшем образовании. – 2011. – №9. – С.73-82.
15. *Шильников, Л.П.* Леонтович-Андронова Евгения Александровна (1905-1996)[101] [Текст] / Л.П. Шильников – в кн. Личность в науке: женщины-учёные Нижнего Новгорода. Вып.2 – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. С. 83–102.
16. К 100-летию со дня рождения Евгении Александровны Леонтович-Андроновой (1905–1997) [Текст] / Л.П. Шильников // Вестник ННГУ, серия Математика. – 2005. – Вып. 1(3). – С.191-204.
17. *Shil'nikov, L.P.* Evgeniya Aleksandrovna Leontovich-Andronova (1905–1996)[3] [Текст] / L.P. Shil'nikov // AMS Translations, Ser.2. – 2000. – V.200 (Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics). – P.1–14.
18. *Polotovskiy, G.M.* Nizhni Novgorod mathematician Artemy Grigorievich Mayer and his course of the history of mathematics [Текст] / G.M. Polotovskiy – Attractors, Foliations and Limit Cycles, International conference dedicated to Yulij Ilyashenko's 70th birthday, Independent University of Moscow, Yanyary 13-17. – 2014. – P.18.
19. *Полотовский, Г.М.* Нижегородский математик Артемий Григорьевич Майер и его курс истории математики [Текст] / Г.М. Полотовский – Двадцатая первая международная конференция Математика. Компьютер. Образование. Тезисы. Москва-Ижевск, 2014. С.288.
20. *Андронова, Е. А.* К 95-летию со дня рождения Н.Н. Баутина [Текст] / Е.А. Андронова, Б. Н. Скрябин // Вестник ВГАВТ. Н. Новгород, 2004. – Вып. 9. – С.172-182.
21. *Андронова, Е. А.* Николай Николаевич Баутин (к 100-летию со дня рождения) [Текст] / Е.А. Андронова, Б. Н. Скрябин // Математика в высшем образовании. – 2008. – №6. – С.111-122.
22. *Afraimovich, V.S.* Leonid Pavlovich Shilnikov. On His 75th Birthday [Текст] / V.S. Afraimovich, L.M. Lerman, S.V. Gonchenko // Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – Vol. 15, Nos. 2–3. – P. 101-106. (На русском языке: Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №1, с.5-22.)
23. Editorial Leonid Pavlovich Shilnikov [Текст] // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – V.24. – No.8 (в печати).

101 Здесь ошибка – Е.А. Леонтович-Андронова скончалась 4 января 1997 г.

24. *Polotovskiy, G.M.* Dmitrii Andreevich Gudkov [Текст] / G.M. Polotovskiy // AMS Translations, Ser.2. – 1996. – Vol.173 (Topology of real algebraic Varieties and Related Topics). – P.1-9.
25. *Gordon, E.I.* Recollection of D.A. Gudkov [Текст] / E.I. Gordon // AMS Translations, Ser.2. – 1996. – Vol.173 (Topology of real algebraic Varieties and Related Topics). – P.11-16.
26. *Полотовский, Г.М.* Дмитрий Андреевич Гудков [Текст] / Г.М. Полотовский // Вестник ННГУ "Математическое моделирование и оптимальное управление" – 2001. – вып. 1(23). – С.5-16.
27. *Жислин, Г.М.* О работах А.Г. Сигалова по математической физике (к 100-летию со дня рождения) [Текст] / Г.М. Жислин // Математика в высшем образовании. – 2013. – №11. – С.105-114.
28. *Лиогонький, М.И.* О законе «0 или 1», открытом Ю.В. Глебским, и связанных с ним результатах, полученных на кафедре математической логики и алгебры ННГУ [Текст] / М.И.Лиогонький, В.А.Таланов // Математика в высшем образовании. – 2014. – №12 (в печати).
29. *Вершик, А.М.* Как прорастает математика [Текст] / http://polit.ru/article/2013/03/18/vershik2/

К 150-летию со дня рождения Константина Моисеевича Щербины

В.Е. Пырков

В этом году исполняется 150 лет со дня рождения известного педагога-математика Константина Моисеевича Щербины. Его активная педагогическая деятельность продолжалась более 60 лет, за это время он внес значительный вклад в развитие отечественной методики математики как своей деятельностью по подготовке нескольких поколений учителей математики, так и оставшимися после него методическими работами. Более подробному рассмотрению вклада ученого в развитие теории и методики математического образования посвящена эта статья.

Краткие биографические сведения

К.М. Щербина родился 1 июля 1864 в городе Прилуках бывшей Полтавской губернии (затем Черниговской области). Начальное образование получил в Прилукской начальной школе и уездном училище; затем окончил Прилукскую 6-классную прогимназию, после чего, для завершения среднего образования, поступил в Лубенскую гимназию, которую окончил в 1882 с золотой медалью. В 1888 он закончил курс обучения в Киевском университете со степенью кандидата физико-математических наук. Кандидатское сочинение на тему «Основы символического исчисления» писал под руководством Михаила Егоровича Ващенко-Захарченко.

Педагогическую деятельность К.М. Щербина начал преподавателем математики в Киевской частной женской гимназии. С 1908 перешел на работу в I Киевскую гимназию, продолжая по совместительству преподавать математику в женской гимназии. С 1906 К.М. Щербина состоял членом Испытательного комитета по математике при Киевском учебном округе.

Когда в Киеве было намечено учреждение Учительского института, К.М. Щербину, который к тому времени уже пользовался авторитетом и влиянием в педагогических кругах, пригласили в качестве руководителя этого института. В 1909 Учительский институт в Киеве был открыт вместе с опытной школой при нем. К.М. Щербина более 10 лет заведовал этими учебными заведениями исполняя не только административные обязанности директора института, но и читая такие педагогические дисциплины как «Теория воспитания и обучения», «Училищеведение», «История педагогики» и др. Изучая методику преподавания математики в лучших педагогических учебных заведениях Москвы, Петербурга, Вильно и других городов России, а также заграницей (Австрия, Германия, Франция, Швейцария: 1897, 1910, 1912, 1913, 1914, 1915, 1927 гг.), он стремился по-новому организовать постановку преподавания в вверенном ему Учительском институте. Как руководитель он ввел прогрессивные и передовые для того времени формы занятий и средства контроля, лабораторные занятия, экскурсии, подготовку рефератов и др.

В 1909 году К.М. Щербина был избран преподавателем методики математики на физико-математическом факультете Киевских женских курсов.

С открытием в этом же году Киевских курсов для подготовки преподавателей средней школы К.М. Щербина ведет занятия на этих курсах, а впоследствии становится деканом их математического отделения.

В 1920 он переехал в Одессу, где в этом же году занял место преподавателя математики на Одесских Фребелевских курсах общества преподавателей, и был избран преподавателем математики в Одесском институте народного образования по факультету Соцвоса (социального воспитания). К.М. Щербина был одним из организаторов Рабочего факультета высшей школы г. Одессы и занял место преподавателя математики на этом факультете, где преподавал до 1 октября 1928 г.

В 1921 в Институте народного образования (ИНО) на факультете Профобра (профессионального образования) ему была предоставлена кафедра методики математики. Это место К.М. Щербина занимал со званием профессора до 1 октября 1930 г.

С 1925 он состоял действительным членом Одесской научно-исследовательской кафедры математики, преобразованной с 1 октября 1930 г. в Одесское отделение Украинского научно-исследовательского института математики.

В связи с реорганизацией ИНО, К.М. Щербина был назначен штатным профессором возникшего на его базе Одесского физико-химико-математического института (ФХМИ), с поручением заведывания кафедрой методики. Кроме того, вел занятия по математике в Институте социального воспитания (также возникшем на базе ИНО), где работал до июня 1932 г.

Помимо учебной работы, К. М. Щербина на протяжении всей своей научно-педагогической деятельности проводил большую организационную работу:

- уделял много времени и труда Киевскому обществу содействия начальному образованию и в качестве члена совета много содействовал его деятельности;
- многократно участвовал в организации курсов повышения квалификации для учителей и вел занятия на этих курсах по математике, методике математики и педагогике;
- принимал деятельное участие в работах Одесского городского и областного методического кабинетов, а впоследствии Одесского института усовершенствования учителей, где неоднократно выступал с докладами по различным вопросам преподавания математики.

К.М Щербина активный участник разнообразных методико-математических конференций и съездов: он был участником I и II Всероссийских съездов преподавателей математики (1912, 1914 гг); в 1928 участник Харьковского съезда украинских методистов математики; в 1936 выступает с докладом об организации педагогической практики на Конференции методических кафедр педвузов; его пленарный доклад «Устные упражнения по математике в курсе средней школы» удостоен премии на Киевском съезде преподавателей математики (1936) и др.

После выхода на пенсию с 1932 К.М. Щербина продолжал работу в ФХМИ до преобразования его в Одесский государственный университет, где проводил практические занятия со студентами по методике математики и руководил педагогической практикой до 1939 г.

При этом он не теряет связей с Киевом: К.М. Щербина состоял членом Физико-математического общества при Киевском университете, неоднократно выступал с докладами и принимал участие в качестве члена и заместителя его председателя; участвовал в выработке проекта учебного плана по математике для средней школы, который отвечал современным требованиям математики и педагогики.

Методическое наследие К.М. Щербины

Перу К.М. Щербины принадлежит более тридцати печатных трудов. В методических пособиях и статьях он разработал различные вопросы методики преподавания математики, составил пособие для педагогической практики студентов педагогических вузов, много сделал для совершенствования школьных и вузовских учебников.

Его работы можно найти на страницах таких журналов как «Киевские университетские известия», «Вестник опытной физики и элементарной математики», «Новый путь», «Наша школа», «Коммуністична освіта», «Математика в школе», «Советская педагогика» и в некоторых других изданиях и научных журналах. Среди них можно выделить несколько тематических линий касающихся как вопросов общей методики обучения математики (постановка внеклассной работы по математике; проблемы историзации и истории методики математики; программы и школьные учебники по математике; проблемы математической терминологии; методика использования наглядных пособий; проблемы математической этнографии; методика проведения устных занятий по математике; проблемы подготовки учителя математики и др.), так и частных её вопросов (методика изучения нуля; методика изучения дробных чисел; методика изучения делимости; методика изучения элементов математической логики; методика изучения логарифмов и др.).

Основные взгляды К.М. Щербины по вопросам преподавания математики изложены в его работе «Математика в русской средней школе. Обзор трудов и мнений по вопросу об улучшении программ математики в средней школе за последние девять лет (1899–1907)». Это исследование было издано трижды: в «Киевских университетских известиях», в «Отчетах Киевского математического общества» и отдельной книгой [8]. Данная работа, по сути, является первой попыткой в истории отечественной методики математики глубоко проанализировать состояние обучения математике в средней школе и определить пути его улучшения. По оценке акад. С. Бернштейна «книга интересная не только по фактическим материалам, дающим полную картину положения преподавания математики в русской современной средней школе, но и глубоко продуманными взглядами, которые автор предлагает положить в основу будущей школы» [2. С.53].

Работа содержит анализ программ по математике мужских гимназий 1890 г. Затем автор последовательно освещает работу различных комиссий и групп, которые занимались вопросами подготовки реформы преподавания математики. В приложении К.М. Щербина предлагает проект учебного плана по математике Киевского физико-математического общества, в составлении которого он принимал активное участие. Особой критике он подверг планы и программы, изданные в 1901 г по проекту министра П.С. Ванновского, прямо заявляя, что все эти проекты «интересны только в том отношении, что они показывают, как не следует проводить реформу школы, и вообще, до каких несуразностей можно дойти в деле преобразования школы, будучи мало знакомым с педагогическим делом» [8. С.55].

Главным в реформе К.М. Щербина считал наладить на должном уровне подготовку квалифицированных учителей для средних школ. В своих размышлениях по указанному поводу он указывал, что «можно создать прекрасные программы, и все таки, они останутся сами по себе, а преподавание будет идти само по себе … Косность, традиции, рутина имеют и в деле преподавания неотразимое значение … Хотя программы с объяснительными записками имеют влияние на улучшение преподавания математики, но их влияние сказывается медленно. Первостепенное значение имеет личность преподавателя, его научная и педагогическая подготовка – одним словом, методы преподавания» [8. С.126-127].

К.М Щербине принадлежат содержательные обзоры программ по математике. В своем «Критическом обзоре», напечатанном в «Материалах по реформе средней школы» [9], К.М.

Щербина подверг резкой критике неудовлетворительную обработку программ как в отношении содержания, так и по стилю изложения. Он подчеркнул, что эти, так называемые новые программы, ничего не дают для освобождения преподавания от многовековой рутины, в них почти нет попытки влить живую струю в преподавание элементарной математики и ввести те идеи, которые бы приближали математику к жизни, к практике.

К.М. Щербина много сделал для усовершенствования школьных учебников. В статьях [17] и докладах он неоднократно выступал за повышение качества школьных учебников, отмечая, что поскольку учебник направляет работу учителя, регулирует работу ученика, формирует его мышление, воспитывает, он должен быть безупречным как с методической, так и с научной стороны.

Свои взгляды на то, каким должен быть вузовский учебник К.М. Щербина изложил в статье «К вопросу о составлении руководства по методике систематического курса арифметики» [18]. Здесь же он высказал мысли о методической подготовке будущих учителей. Наметив три этапа изучения методики преподавания математики (дидактика предмета, специальная практика, отдельные разделы математической науки), он считал целесообразным в соответствии с этим построить и учебник по методике арифметики.

К. М. Щербина — один из специалистов по организации внеклассной работы по математике. Его работа «Клубные занятия в школе по математике» [6] является одной из первых по методике кружковой работы (переиздана с дополнениями и изменениями в 1927 г.). Краткое содержание этой книги появилось в журнале «Математика в школе» в 1940 году [22]. В ней автор высказывает ряд своих соображений по поводу методики проведения в школе кружковой работы по математике опираясь на свой долголетний личный опыт по организации и руководству математическими кружками в средней и в высшей школах, а также в результате наблюдений над работой других подобных кружков. Он рассматривает условия «жизненности» кружков, технологию их организации, различные формы работы участников математического кружка, вопросы составления плана кружковых занятий и др. Предлагает примерные темы докладов для учителя и учащихся, снабженные списком рекомендуемой литературы, дает общий обзор литературы для занятий в математических кружках.

В связи с разработкой содержания внеклассной работы по математике К.М. Щербина пишет работу «Народная математика и школа» [14]. Этнографией он интересовался на протяжении всей своей жизни. Еще в 1893 написал небольшую брошюру «Опыт программы для собирания сведений по народной математике» [7], в которой отмечал большое значение этого дела для характеристики умственного развития и математических способностей народа. В этой области этнографии ему принадлежит один из первых шагов: брошюрой можно было руководствоваться при собирании материалов по народной математике. Эта работа привлекла внимание широкий круг читателей в эту область этнографии.

В работе «Народная математика и школа» К.М. Щербина удачно связал вопросы краеведческой работы с педагогической, заостряя внимание на важности собирания материалов старины для патриотического воспитания учащихся, для введения исторических моментов в преподавании, для самой истории математики: «Народная математика может дать ценный материал для познания своего родного края, развить любовь к нему и этим помочь делу воспитания патриотических чувств у учащихся … Большое значение имеет народная математика для привития интереса школьников к предмету … Народная математика даст много ценного педагогического материала: простые и оригинальные подходы и способы для развития тех или иных вопросов математики, даст любознательному учителю и методические рекомендации для школьной работы» [14. С. 6]. Далее К.М. Щербина излагает отдельные сведения по народной математике, которыми может воспользоваться учитель.

В книге «Терминология в элементарном курсе математики» [11], К.М. Щербина формулирует основные требования к школьной математической терминологии. Вопросам наглядности в обучении математике посвящена работа «Наглядные пособия по математике в начальной и средней школе» [16]. В ней автор дает рекомендации по оборудованию школ наглядными пособиями, объясняет способы их изготовления и сохранения для каждого класса, обращая внимание на возрастные особенности учеников.

В статье «Устные занятия по математике в средней школе» [21] он подчеркивал особую роль этих занятий в формировании мышления учащихся, говорит о необходимости их в качестве органической части всего процесса обучения математики; приводит недочеты в постановке устных занятий и вызвавшие их причины, рассматривает примеры устных упражнений на содержании курсов арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Подчеркивал необходимость привлечения приближенных вычислений при устном счете.

Рассмотренные выше и другие работы К.М. Щербины были нацелены на поиск эффективных путей постановки математического образования, а его жизнь и педагогическая деятельность представляют яркий пример служения на ниве просвещения.

Библиографический список

1. *Бетина, Н.П.* Константин Моисеевич Щербина [Текст] / Н.П. Бетина / Киевские математики-педагоги. — Киев, 1979. — С.117-124.
2. *Гончаров, Д.С.* Константин Моисеевич Щербина [некролог] [Текст] / *Д.С. Гончаров* / Математика в школе. — 1947. — № 2. — С. 52–53.
3. К 35-летию научно-педагогической деятельности К.М. Щербины [Текст] // Наша школа. — 1925. — №1,2. — С. 191-192.
4. *Ланков, А.В.* К истории развития передовых идей в русской методике математики [Текст] / А.В. Ланков /— М.: Учпедгиз, 1951. − С. 141−142.
5. *Рикун, И.Э.* Ученые вузов Одессы [Текст] / И.Э. Рикун / Биобиблиографический справочник. Выпуск 1. Часть 2. Математики и механики (1865-1945). — Одесса, 1995. — С.156–158.
6. *Щербина, К.М.* Клубные занятия в школе по математике [Текст] / К.М. Щербина / – Одесса, 1893.
7. *Щербина, К.М.* Опыт программы для собирания народных математических сведений [Текст] / К.М. Щербина /– Изд. Губ. Стат. Комит. Полтава. – 1893.
8. *Щербина, К.М.* Математика в русской средней школе [Текст] / К.М. Щербина / – Киев, 1908.
9. *Щербина, К.М.* Критический обзор. Примерные программы и объяснительная записка [Текст] / К.М. Щербина / Материалы по реформе средней школы. – СПб, 1915.
10. *Щербина, К.М.* Критический обзор программ по математике, выработанных Комиссией при Министерстве Народного просвещения в 1915 г. [Текст] / К.М. Щербина / – Одесса, 1916.
11. *Щербина, К.М.* Терминология в элементарном курсе математики [Текст] / К.М. Щербина / – Одесса: Mathesis. – 1923.
12. *Щербина, К.М.* Руководство для переподготовки преподавателей трудовых школ первой ступени по математике [Текст] / К.М. Щербина /– Одесса. –1924.
13. *Щербина, К.М.* Клубные занятия в школе по математике [Текст] / К.М. Щербина / Записки Одесского института народного образования. – 1927. – Т.1. – С.370-378.
14. *Щербина, К.М.* Народная математика и школа [Текст] / К.М. Щербина / – Одесса. –1929.
15. *Щербина, К.М.* Відомості з історіі математики в курсі масовоі школи [Текст] / К.М. Щербина / Записки Одеського наук. При ВУАН товариства. – 1930. – № 1. – С.139-149.
16. *Щербина, К.М.* Наглядные пособия по математике в начальной и средней школе [Текст] / К.М. Щербина /– Одесса. –1935.
17. *Щербина, К.М.* К вопросу о составлении стабильного учебника по арифметике [Текст] / К.М. Щербина /Математика в школе. – 1937. – №4. – С.45-52.

18. *Щербина, К.М.* К вопросу о составлении руководства по методике систематического курса арифметики [Текст] / К.М. Щербина / Математика в школе. – 1937. – №6. – С.128-138.
19. *Щербина, К.М.* Критический обзор программы средней школы по математике [Текст] / К.М. Щербина /Математика в школе. – 1938. – №2. – С.73-81.
20. *Щербина К.М.* Критический обзор программы средней школы по математике НКП РСФСР 1938 г. [Текст] / К.М. Щербина / Математика в школе. – 1938. – №5. – С.92-105.
21. *Щербина, К.М.* Устные занятия по математике в средней школе [Текст] / К.М. Щербина / Математика в школе. – 1939. – №4. – С.51-57.
22. *Щербина, К.М.* Математические кружки в средней школе [Текст] / К.М. Щербина / Математика в школе. – 1940. – № 3. – С.38-47.
23. *Щербина, К.М.* Педагогическая практика для студентов педагогических вузов [Текст] / К.М. Щербина / – Одесса. –1940.

С. О. Шатуновский – яркий представитель одесской математической школы: к 155-летию со дня рождения

И.Э. Рикун

С. О. Шатуновский родился 13 (25) марта 1859 г. в селе Знаменка Мелитопольского уезда Таврической губернии (ныне с. Большая Знаменка Каменско-Днепровского р-на Запорожской обл.). Он был девятым ребенком в семье бедного ремесленника. Окончил Херсонское реальное училище, затем дополнительный – седьмой класс реального училища в Ростове-на Дону. В 1881 г. проходил срочную службу в армии

Шатуновский поступил сначала в Петербургский технологический институт, вскоре перешел в Институт путей сообщения. В личном деле ученого (фонд ИНО) есть его собственноручная запись: «Оставил тот и другой институт вследствие неодолимой склонности к занятиям чистой математикой»[102]. Н.Г.Чеботарев, в чьей судьбе Шатуновский сыграл значительную роль, пишет в некрологе на его смерть: «Но техника его мало привлекала; он увлекался математикой и вместо выполнения учебного плана в своих институтах ходил слушать лекции знаменитых петербургских математиков… То время было эпохой расцвета петербургской математической школы. Тогда в университете читали знаменитый Чебышев и его ученики: Корхин, Золотарев, Сохоцкий и др.»[103]. В университет принимали только получивших классическое образование, а Шатуновский гимназию не окончил и аттестата зрелости, соответственно, не имел. Он стал вольнослушателем, затем, в надежде все же получить диплом о высшем образовании, уехал в Швейцарию, некоторое время слушал лекции в Бернском университете.

«Там он не получал полного удовлетворения своей пытливости, а вскоре крайняя бедность заставила его вернуться в Россию. Здесь он первое время давал частные уроки, проживал в маленьких городках Екатеринославской и Бессарабской губерний, вдали от научных центров и библиотек»[104]. В 1886 г. в нескольких номерах журнала «Семья и школа» была напечатана его первая математическая работа «К теории десятичных периодических дробей»[105].

В 1892 г. Шатуновский послал в ВОФЭМ статью «О решении задач без помощи линейки»[106]. В следующем году, по приглашению одесских математиков, которые обратили внимание на эту публикацию, он переехал в Одессу. Шатуновский не только систематически

---

[102] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 2.
[103] Чеботарев Н.Г. Самуил Осипович Шатуновский // Успехи мат. наук. – 1940. – Вып. 7. – С. 316.
[104] Чеботарев. – С. 316.
[105] Семья и школа. – 1886. - № 1-2. – С. 101-108 ; № 3-4. – С. 289-305 ; № 5-6. – С. 518-526.
[106] ВОФЭМ. – 1892. - № 125. – С. 89-92.

печатался в ВОФЭМ вплоть до 1917 г., он вошел в тот круг математиков, которые определяли направление работы журнала. О глубокой порядочности и принципиальности ученого свидетельствует письмо в редакцию ВОФЭМ, помещенное сразу за окончанием статьи «О некоторых методах решения задач тригонометрии на плоскости»[107]. В свете постоянно идущих споров о приоритете, хочется привести это письмо полностью: «Из доставленного мне краткого курса тригонометрии К.Торопова (Пермь, 1894 г.) усматривается, что теорема об однородной функции нулевого измерения от сторон треугольника, установленная мною в парагр. 4 моей статьи «О некоторых методах решения задач тригонометрии на плоскости» содержится в учебнике г. Торопова в иной только форме. Г-н Торопов, исходя их этой теоремы, классифицирует задачи тригонометрии так, как это делаю и я. Принимая во внимание, что эта классификация установлена мною весьма недавно, а упомянутая теорема, хотя и была мне известна далеко раньше 1894 г. (приблизительно с 1882 г.), но не была мною опубликована (несколько лет назад, но позже 1894 г., я говорил о ней в одном из заседаний математического отделения Новороссийского Общества Естествоиспытателей), следует признать, что приоритет, как относительно этой теоремы, так и относительно упомянутой классификации задач тригонометрии должен быть отдан г-ну Торопову. Почти невозможно написать что-либо в области элементарной математики и не найти в литературе предшественников, высказавших или сделавших почти то же. Весьма возможно, что и в исследованиях, составляющих главное содержание моей статьи и не вошедших в учебник г-на Торопова, я был кем-либо предупрежден, а потому и в этом отношении отклоняю от себя всякое право на приоритет тем охотнее, что это право, по счастию, никогда не находится ни в какой связи ни со строгостью доказательств, ни с важностью методов, ни со значительностью трактуемых вопросов»[108].

Теоретическое обоснование общий метод решения треугольников получил в книге «Методы решения задач прямолинейной тригонометрии» (1929), изданной после смерти ученого[109].

Начиная с 1895 г., Шатуновский стал систематически выступать на заседаниях Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, созданного в 1876 г. «Организация отделения дала выход естественному стремлению кафедр физико-математического факультета к более широкому и регулярному научному общению между собою и за пределами узких рамок университета; она открыла такие же возможности и многим людям, не имеющим отношения ни к университету, ни, вообще, к учебному ведомству, но так или иначе занимающимися физико-математическими науками…»[110]. В 1897 г. Шатуновский вошел в число членов Математического отделения, а в следующем году был избран его секретарем с мизерным жалованьем 120 рублей в год[111]. Эта должность некоторое время была единственным источником существования ученого, занимал он ее вплоть до 1914 г. С 1895 по 1904 г. Шатуновский прочитал 20 докладов на заседаниях Отделения. В личном деле Шатуновского хранится некролог, написанный, скорее всего, И.Ю.Тимченко, в котором читаем: «Особенно следует упомянуть доклад, зачитанный им 22-го мая 1901 года на тему: «Логические законы исключенного третьего в исследованиях, относящихся к бесконечным многообразиям». В этом докладе Самуил Иосифович много раньше известного голландского математика Броуера высказал те идеи по вопросам об основах математики, которые в настоящее время стоят в центре внимания самых выдающихся западноевропейских ученых и которые он сам впоследствии положил в основание нового построения алгебры в наиболее замечательном из своих трудов: «Алгебра,

[107] ВОФЭМ. – 1901. - № 283-285, 287, 288.
[108] ВОФЭМ. – 1901. - № 288. – С. 294-295.
[109] Ланков О.В. До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики : посіб. для вчителів. – К., 1953. – С. 161.
[110] Лейбман Э.Б. Математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей (1876-1928) // ИМИ. – 1961. – Вып. 14. – С. 409.
[111] ВОФЭМ. – 1898. - № 269. – С. 127.

как учение о сравнениях по функциональным модулям»[112]. Доклад активно обсуждался присутствовавшими на заседании О.Д.Хвольсоном, Н.Н.Ланге, И.В.Слешинским, В.Ф.Каганом, Е.Л.Буницким, И.Ю.Тимченко, В.И.Циммерманом, Ф.Н.Милятицким[113]. Свои взгляды по вопросам обоснования теории площадей и объемов ученый изложил на X съезде естествоиспытателей и врачей (Киев, 1898)[114]. Эта проблема была решена С.О.Шатуновским независимо от Гильберта[115]. На XII съезде естествоиспытателей и врачей (Москва, 1910) ученый прочитал доклад «О сравнениях по системе модулей».

Новороссийское общество естествоиспытателей вело большую просветительскую работу. Шатуновский принимал активное участие в его лекционной деятельности. Осенью 1905 г. он начал читать лекции по дополнению к курсу элементарной алгебры, на которые записались 1200 человек[116]. Через две недели после открытия полугодия лекции были прекращены в связи с политическими событиями. Состоялись они осенью 1906 г. при таком стечении публики, что её невозможно было разместить в аудитории. Читал он лекции и в весеннем полугодии 1914 г., когда они возобновились после периода реакции. С началом Первой мировой войны лекционная деятельность Общества прекратилась.

В 1904 г. С.П.Ярошенко, И.В.Слешинский, И.Ю.Тимченко и В.Ф.Каган обратились к министру народного просвещения с ходатайством о разрешении Шатуновскому держать магистерские экзамены. Учитывая его выдающиеся математические способности, в виде особого исключения, ходатайство было удовлетворено. «То была эпоха первой русской революции и министр уступил»[117], - таково мнение А.П.Юшкевича.

Выдержав экзамены, Шатуновский в 1905 г. получил звание приват-доцента и стал одним из ведущих преподавателей университета. Чеботарев характеризует его как блестящего педагога: «Никогда не жертвуя строгостью, С.О. умел в своих лекциях сделать доступными для слушателей трудные и глубокие идеи. Его лекции были всегда тщательно построены и вместе с тем были с высшей степени оживлены и проникнуты энтузиазмом. С.О. считал совершенно недопустимой дешевую популяризацию, т.е. приспособление к уровню аудитории ценою потери строгости»[118]. Физико-математический факультет поручил ему такой важный предмет как «Введение в анализ», который он читал на протяжении многих лет, который был особенно тщательно продуман и разработан, в который он внес много оригинальных идей и способов изложения. «Можно сказать, что на этом курсе воспиталось несколько поколений молодых математиков, и он служил одним из краеугольных камней в построении того, что впоследствии получило у русских математиков наименование «одесской математической школы»[119]. Этот курс несколько раз издавался в литографированном виде, и всякий раз автор вносил в него изменения и дополнения. В 1923 г. книга по лекциям ученого была издана «Матезисом», Чеботарев называет её «прекрасной по своей строгости и законченности»[120].

Вплоть до закрытия университета в 1920 г. Шатуновский читал курсы алгебры, элементарной математики, сферической тригонометрии, теории чисел, теории определителей, дифференциального исчисления, применения анализа к геометрии. «Помимо основных курсов Самуил Осипович читал специальные курсы, привлекавшие наиболее талантливых студентов. Из низ с особенной любовью излагал он теорию алгебраического решения уравнений, которую представлял в оригинальной форме. Курс этот предполагалось

---

[112] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 36.
[113] Лейбман… С. 426
[114] Киро С.Н. Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // ИМИ. – 1958. – Вып. XI. – С. 141.
[115] Чеботарев… С. 318.
[116] Лейбман… С. 439.
[117] Юшкевич А.П. История математики в России. – М., 1968. – С. 532.
[118] Чеботарев… С. 320.
[119] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 37.
[120] Чеботарев… С.

издать на немецком языке в Берлине»[121]. Кроме того, Шатуновский читал спецкурсы по теории функций комплексной переменной и основаниям теории целых алгебраических чисел. В 1917 г. Шатуновский напечатал, а в 1919 г. защитил магистерскую диссертацию «Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям». «Самое интересное в диссертации С.О. – это введение «натуральной системы модулей», которая дает возможность развить полную теорию Галуа, давая удобный метод для её обоснования»[122].

Шатуновский преподавал на Высших женских курсах с их открытия в 1906 г. и вплоть до слияния с университетом летом 1919 г. «Там его академическая деятельность могла развернуться с большей свободой, чем в Университете, где ему как еврею не давали ходу»[123]. В 1917 г. он, вместе с В.Ф.Каганом и Я.Ю.Бардахом, был забаллотирован Советом университета при выборе в доценты. Он читал на ОВЖК курсы высшей алгебры, интегрирования дифференциальных уравнений, теоретическую и аналитическую механику.

Самой его известной ученицей была С.А.Яновская, которая поступила в 1914 г. на естественное отделение ОВЖК, затем, по настоянию ученого, перевелась на математическое отделение.

Как почти все представители одесской математической школы начала XX века, Шатуновский преподавал в средних учебных заведениях. Шатуновский, как и Каган, преподавал в гимназии Иглицкого с момента её создания в 1905 г. Один из его учеников, Лев Тумерман, пишет: «Другим учителем, оказавшим на меня большое влияние, был профессор Самуил Осипович Шатуновский, также выдающийся математик, человек изумительного педагогического мастерства и глубокого и оригинального мышления. Весь курс школьной элементарной математики я прошел под руководством Шатуновского и считаю это огромной удачей. У Шатуновского же я учился и в университете»[124].

Шатуновский преподавал также в коммерческом училище Х.И.Гохмана. В «Воспоминаниях» С.Я.Борового читаем: «Коммерческое училище Гохмана так же, как и гимназия Иглицкого, имело выдающийся состав преподавателей. Математику читал С.О.Шатуновский, приват-доцент, после революции профессор, - выдающийся педагог и очень крупный математик»[125].

В 1911 г. Шатуновский принимал участие в I Всероссийском съезде преподавателей математики. Следует отметить глубокий интерес ученого к содержанию и методике преподавания математики в средней школе. Целый ряд его публикаций посвящены школьной математике. Книга «Об измерении прямолинейных отрезков и построение их с помощью циркуля и линейки» была последним изданием «Матезиса», а последний свой труд «Об общих способах решения тригонометрических задач» Шатуновский уже не увидел изданным. Корректурные листы к книге он отослал в Москву за несколько дней до своей смерти.

Ученый внес большой вклад в создание советской высшей школы в Одессе. Он и Каган, «принадлежали к той части академической интеллигенции, которая приняла новую власть и связала с ней свою судьбу. Некоторые из старых знакомых и даже друзей от них отшатнулись. Стали поговаривать даже о «большевизме» Кагана и Шатуновского, тем не менее, разговоры эти не мешали ученым твердо продолжать свою линию поведения»[126]. В 1920-1921 учебном году ученый читал элементарную алгебру в Физматине. С 1920 г. вплоть до своей смерти преподавал на факультете профессионального образования ИНО, в 1922 г. создал там первую в Одессе кафедру алгебры. Читал сначала аналитическую геометрию, элементарную математику (алгебру, тригонометрию), позднее – теорию функций комплексной переменной, высшую алгебру, спецкурс по теории алгебраического решения

[121] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 37.
[122] Чеботарев… С. 319.
[123] Там же.
[124] Шапиро В. Одесса «математическая» // Мигдаль-Times. – 2008. - № 96-97. – С. 42.
[125] Боровой С.Я. Воспоминания. – М. ; Иерусалим,   -С.
[126] Ландесман-Беленькая. – С. 312.

уравнений, в 1925 г. Народным комиссариатом просвещения был утвержден в должности профессора. Заведовал в ОПИ кафедрой математики (1923-1925), преподавал на рабфаке ОПИ (1922-1925) и в Химико-фармацевтическом институте. В 1923-1928 гг. Шатуновский руководил секцией математического анализа и алгебры Одесской научно-исследовательской кафедры математики при ИНО (в 1928 г. стала филиалом Украинского института математики).

С 1 декабря 1924 г. по 10 января 1925 г. Шатуновский был в командировке в Москве «с целью ознакомления с постановкой преподавания математики в московских вузах»[127]. Затем три месяца был в зарубежной командировке в Германии. В мае 1927 г. был командирован в Москву для участия в работе пленума Центрального бюро Секции научных работников, с 10 июня по 10 сентября того же года также был в зарубежной командировке, в следующем году с 21 марта по 13 сентября посетил Германию, Францию и Швейцарию.

Шатуновский был членом Одесского бюро Секции научных работников, в последние годы жизни – членом Центрального бюро Секции, членом правления Дома ученых, членом правления общества содействия пролетарскому студенчеству. «Один из первых преподавателей рабочих факультетов, он был вообще другом пролетарского студенчества, всегда помогал рабоче-крестьянским кадрам его и питал твердую уверенность, что в этих кадрах, которых революция открыла двери Университета, Советская высшая школа найдет полезных и талантливых работников науки и просвещения»[128].

В последние годы жизни ученый страдал от рака желудка. В 20-е годы в ИНО учился известный советский фантаст Сергей Снегов. В его автобиографической «Книге бытия» содержатся очень интересные воспоминания о Самуиле Осиповиче: «Шатуновский, уже очень старый, читал математический анализ (на старших курсах). Он приезжал в институт на дрожках, не один, а вдвоем с ассистентом. Тот соскакивал первым, помогал профессору выйти, брал его под руку и осторожно, останавливаясь через каждые десять шагов, вел в аудиторию. Чаще всего в роли поводыря выступал аспирант Шор, но иногда это была девушка (фамилии не помню).

В аудитории Шатуновский несколько минут отдыхал (этажи были высокие), потом медленно поднимался на кафедру или подходил к доске, говорил несколько тусклых слов - и преображался. Все в нем менялось: голос становился сильным и по-молодому звучным, тело - подвижным, руки быстро выводили на доске формулы. Он рассказывал так ясно, переходил от факта к факту так логично, что его понимали даже самые непонятливые (я испытал это на себе).

Через несколько недель после зачисления я пробрался на лекцию Шатуновского (он читал на третьем курсе). Предмет был мне еще не по зубам - что-то вроде интегрирования дифференциальных уравнений, - но ту часть, которую объяснял Самуил Осипович, я понял, хотя и не знал, что ей предшествовало. И еще я увидел, как удивительно заканчиваются лекции Шатуновского. Профессор не просто завершал рассказ - он угасал. У него замирало тело, никла голова, падали руки, пропадал голос. Он еще стоял, но уже пошатывался. Еще несколько секунд - и он должен был рухнуть, но в это мгновение к нему быстро подходил ассистент, Самуил Осипович брал его под руку и очень медленно, останавливаясь чуть ли не через каждый шаг, выходил из аудитории.

Эти лекции были не только блестящи по содержанию, но и сценически красочны — старому профессору хотелось аплодировать, как актеру (я не раз слышал это от восхищенных молодыми лекциями старика студентов старших курсов).

Естественно, никаких аплодисментов никто себе не позволял».

О том, какое восхищение вызывали лекции Шатуновского, вспоминает и американский математик Арнольд Росс. Скорее всего, он учился в Физматине в 1920-1921 учебном году, а до того брал у Шатуновского частные уроки. Платой за них в те голодные

---

[127] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 4.
[128] ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 38.

годы был фунт леденцов[129]. Росс считал Шатуновского своим учителем, перевел на английский его магистерскую диссертацию. Интересно, что наибольшую известность Росс обрел, создав в 1957 г. действующую по сей день летнюю школу для математически одаренных школьников.

Упоминаемый Снеговым аспирант Шор – это Я.Б.Шор, впоследствии многосторонний ученый, генерал-майор инженерно-технической службы, внесший большой вклад в развитие ракетной техники[130]. Наиболее вероятно, что упоминаемая Снеговым девушка – это П.Г.Рехтман, которая в 1926-1929 гг. была аспиранткой секции алгебры и анализа и работала под руководством Шатуновского[131].

В воспоминаниях Л.Я.Ландесман-Беленькой описаны последние месяцы жизни ученого: «Незадолго до смерти, уже тяжело больной, Самуил Осипович продолжал ездить на лекции. Он жил в двух кварталах от университета [ул. Щепкина, 4 кв. 39], но добираться пешком уже не мог. За ним приезжали извозчичьи дрожки. Ездил он в сопровождении кого-нибудь из своих ближайших учеников. лекции профессор читал сидя, негромко, слабым голосом, но отчетливо. Писать на доске ему было трудно, поэтому сопровождавший его ассистент записывал на доске все необходимое. Синхронность объяснения и записи свидетельствует о прекрасном знании учеником курса учителя, об их большой научной близости»[132].

Ландесман-Беленькая отмечает благородство Шатуновского, его независимость, принципиальность и беспредельную преданность науке, работе, товарищам, и особенно ученикам. «…Они навещали учителя в его холостяцкой квартире, подолгу там задерживались для занятий и просто для бесед. Окружавшие Шатуновского люди ценили и любили Самуила Осиповича, хотя и побаивались его острого и насмешливого ума»[133].

В некоторых документах ученый указывал, что у него были жена и дочь, но указывал также, что проживает один. Воспоминания Ландесман-Беленькой позволили установить, что с женой он расстался, а дочь, болевшая туберкулезом, жила в Италии.

С.О.Шатуновский умер 27 марта 1929 г. Правление ИНО обратилось в Коммунотдел с просьбой о бесплатном выделении дрожек для похоронной процессии[134] и к начальнику гарнизона - «о разрешении играть военному оркестру при похоронах умершего видного профессора, общественного деятеля С.О.Шатуновского завтра 29.III в 12 часов дня»[135].

В.Ф.Каган прислал И.Ю.Тимченко телеграмму: «Мы потеряли лучшего друга, неизменного товарища долгой совместной научной, педагогической, трудовой жизни. Скажите и мое скорбное слово над его могилой, передайте выражение глубочайшего горя высшей школе, научным учреждениям Одессы. Был бы счастлив вместе с Вами служить его ученикам»[136].

Шатуновского и Кагана связывала многолетняя дружба, которой не мешало различие в характерах. «Насколько Вениамин Федорович был мягким, доброжелательным, спокойным, настолько Самуил Осипович был раздражительным, малодоступным и казался замкнутым и недоверчивым… Каган и Шатуновский часто подтрунивали друг над другом… Каган посмеивался над рассеянностью и забывчивостью Шатуновского, а тот шутил над педантизмом Кагана, над его немецкой организованностью и методичностью.

-Если нас с вами соединить, Вениамин Федорович, - сказал однажды со смехом Шатуновский, - то получится превосходный, единственный в своем роде ученый.

---

129 Interview with Arnold Ross // Notices of the AMS. – 2001. – Vol. 48, № 7. – P. 692.
130 Шор Я.Б. Учені вузів Одеси. Математики. Механіки. Вип. 1. Ч. 2 / І.Е.Рікун. – О., … С. 151-155.
131 ГАОО. – Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 277. Л. 2.
132 Ландесман-Беленькая Л.Я. Дом на Черноморской. Отрывок из воспоминаний // Дерибасовская-Ришельевская. – 2012. - № 49. – С. 310, 311.
133 Там же. С. 311.
134 ГАОО. Ф. Р-1593. Оп. 1. Д. 366. Л. 33.
135 Там же. Л. 30.
136 Там же. Л. 34.

В доме Каганов Шатуновский душевно отогревался. Он становился словоохотливым, шутил с молодежью, охотно принимал участие в литературных играх, буриме, розыгрышах шарад, то есть во всем, что было в ходу у Каганов»[137].

Через год после смерти Шатуновского ИНО был расформирован и создан Физико-химико-математический институт. В Физхиммат перешли три старших курса физико-математического факультета ИНО. В отчете о деятельности института есть следующее предложение: «Среди младшей части так называемой школы Шатуновского имели место идеалистические выступления»[138]. Математическая логика оказалась под огнем партийной критики, и одесская логико-математическая школа не получила дальнейшего развития. Во многом благодаря усилиям С.А.Яновской математическая логика не разделила судьбу генетики. Еще один ученик Шатуновского, М.И.Шейнфинкель, заложил основы комбинаторной логики. О его работах впервые написала Яновская[139].

Учениками Шатуновского были Г.М.Фихтенгольц, М.И.Шейнфинкель, С.А.Яновская, И.В.Арнольд, П.Г.Рехтман, Г.И.Ольшанский и др. И.В.Арнольд, отец выдающегося математика В.И.Арнольда, был редактором книги «Введение в анализ».

Малоизвестный факт истории создания «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

Р.А. Симонов

Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) известен как автор замечательной математической энциклопедии «Арифметика», изданной в Москве в 1703 г.[140]. «Арифметика» включала знания по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии, физике, наблюдательной астрономии, морской навигации, геодезии и географии. М.В. Ломоносов назвал «Арифметику» Магницкого «вратами своей учености», наряду с «Грамматикой» Мелетия Смотрицкого и «Псалтырью рифмотворной» Симеона Полоцкого. «Арифметика» Магницкого – удивительный феномен русской книжной культуры. Она признается «одной из самых замечательных книг, созданных русскими авторами в течение XVIII века…»[141]. Считается, что «вопрос о зарубежных книгах, которыми располагал Магницкий, исследован

---

[137] Ландесман-Беленькая. С. 310, 311.

[138] ГАОО. – Ф. Р-1641. Оп. 1. Д. 4. Л. 23.

[139] Яновская С.А. Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. – М., 1948. – С. 31-33.

[140] См., напр.: *Депман И.Я.* Л.Ф. Магницкий // *Депман И.Я.* История арифметики. 2-е изд. М., 1965. С. 341-353; *Юшкевич А.П.* «Арифметика» Магницкого // *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 58-71 *Симонов Р.А.* 300 лет «Арифметике» Леонтия Магницкого // Научная книга. 2003, № 3/4. С. 68-76, перепечатка: *Симонов Р.А.* 300 лет «Арифметике» Леонтия Магницкого // Селигер – родина Л.Ф. Магницкого, первого выдающегося русского учителя. Старица, 2010. С. 60-70; *Симонов Р.А.* Логистика в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого // Русская речь. 2004, № 2. С. 103-106; *Буланин Д.М.* Магницкий Леонтий Филиппович // Словарь книжников и книжности Древней Руси. СПб.., 2004. Вып. 3, часть 4. Дополнения. С. 481-487; *Гнеденко Б.В.* «Арифметика» Магницкого // *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России / Предисл. и коммент. С.С. Демидова. 2-е изд. М., 2005. С. 53-68; *Симонов Р.А.* Предыстория знаменитой «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (Москва, 1703 г.): малоизвестная арифметическая рукопись «некоторого иноземца» // XIII Международная научная конференция по проблемам книговедения «Книга в информационном обществе» (Москва, 28-30 апреля 2014 г.): В 4 ч. М., 2014. Ч. 1. С. 95-98.

[141] *Гнеденко Б.В.* «Арифметика» Магницкого // *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. 2-е изд. М., 2005. С. 53.

не до конца»[142]. В этой связи заслуживает внимания вопрос о “некотором иноземце”, “чтоб ему печатать книги арифметики”, обсуждавшийся в письме дьяка А.А. Курбатова царю Петру I от 22 июня 1701 года[143].

История с арифметикой «некоторого иноземца» была примерно такой (насколько позволяют источники): иноземец хотел, чтобы его книгу издали в России за государственный счет и заплатили гонорар. А.А. Курбатов же предлагал разрешить иноземцу печатать книгу за свой счет, а гонораром считать прибыль от ее продажи. Допуская, что иноземец откажется от такого невыгодного варианта, А.А. Курбатов договорился с Л.Ф. Магницким, что тот напишет аналогичную книгу, причем, за цену более, чем приемлемую, по сравнению с предполагавшемся гонораром иноземцу. Из письма следует, что А.А. Курбатов для работы Магницкого над арифметикой предоставил свой дом («И по моему, государь, убогому старанию он, Леонтий, сочиняет у меня в доме»). Курбатов считал, что книга Магницкого принесет выгоду казне («…От чего прибыток будет твоей государевой казне, а не иноземцу тому»).

Бросаются в глаза два факта, отмеченные в письме, на которые, кажется, не было обращено в историографии должного внимания. Первый: Курбатов брал к себе домой рукопись иноземца и давал ее для изучения Магницкому («Которую ево книгу брал я к себе и казал искусным во арифметике и геометрии Леонтью Магнитскому с товарыщи»). Второй: рукопись «иноземцевой книги» была написана на плохом славяно-русском языке, и ее смысл не был понятен («…Та ево иноземцова книга преведена на славянский диалект зело неисправно, и разуметь невозможно…»). Кроме того, в ней отсутствовали данные по геометрии, наблюдательной астрономии, навигации и др. вопросам.

Эти факты говорят о том, что для вынесения суждения об «иноземцевой книге» Магницкому пришлось много поработать над ней: по-видимому, существенно что-то уточнить, тщательно разобравшись в содержании. В условиях сжатых сроков, связанных с открытием основанной в январе 1701 г. Математико-навигацкой школы в Москве и возможным применением в ней «Арифметики», допустимо предположить, что Магницкий при ее составлении в значительном объеме мог использовать записи, образовавшиеся при работе над книгой иноземца.

В указанной связи заслуживает внимания интересный результат, который получил В.Е. Прудников при анализе книги Магницкого. Оказалось, что автор начальной части «Арифметики» «обнаружил большой педагогический талант»; наоборот, при «изложении Магницким алгебры и геометрии мы уже не найдем этой полноты и тщательности…»[144]. С этим согласуется мнение авторов четырехтомной «Истории отечественной математики», вышедшей десятилетием позже: «…В арифметической части книга Магницкого была написана на уровне европейских учебников того времени (начала XVIII в.- Р.С.), в части же алгебры она ближе всего подходила к учебникам алгебры конца XVI–начала XVII в.»[145]. Эти характеристики могут выражать беспристрастное мнение о том, что арифметическая часть книги Магницкого отличалась от остального материала. Напрашивающийся вывод о том, что на «Арифметику» могла повлиять «иноземцева книга», никак не умаляет значительность вклада Л.Ф. Магнитского в математическое просвещение России. Ведь он сам заявлял, что выступал составителем «Арифметики», которая была «с разных диалектов на славенский язык преведеная, и во едино собрана» [146].

---

[142] *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 61.

[143] Письмо издано в кн.: *Лаврентьев А.В.* Люди и вещи. Памятники русской истории и культуры XVI-XVIII вв., их создатели и владельцы. М., 1997. С. 76-77 (фототипическое воспроизведение), 104 (археографическое воспроизведение).

[144] *Прудников В.Е.* «Арифметика» Л.Ф. Магницкого // *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. М., 1956. С.24.

[145] *Швецов К.И. и др*. Развитие математических знаний в России в первой четверти XVIII в. // История отечественной математики: В 4-х т. Киев, 1966. Т. 1. С. 159-160.

[146] *Магницкий Л.Ф.* Арифметика, сиречь наука числителная. М., 1703. Титульный лист.

Может создаться впечатление, что «Арифметика» Л.Ф. Магницкого могла отражать не гений ее русского автора, а достоинства «иноземцевой книги». Однако есть дополнительные аргументы в пользу приоритета Л.Ф. Магницкого в этом деле - аргументы, ранее недостаточно известные или игнорируемые исследователями его творчества. Эти аргументы связаны со слабо изученным периодом жизни Л.Ф. Магницкого, когда он приехал в Москву из Осташкова, где родился. Этот период простирается примерно от его 15-летнего возраста до 30 лет (1699 г.), когда появляются о нем сведения в документах. Но именно этот период был наиболее важным в его формировании как личности. Где и каким образом проходило его становление как математика – об этом с достоверностью ничего неизвестно.

Ранним и достаточно авторитетным источником, приоткрывающим завесу тайны в этом вопросе, является эпитафия на могильном камне Л.Ф. Магницкого, составленная его сыном Иваном. Об обучении Л.Ф. Магницкого наукам здесь говорится кратко и неопределенно: «Наукам изучился дивным, и не(удобовероятным способом)» [147]. В соответствии с этимологическим словарем А.Г. Преображенского, слово «дивным» может значить «наблюдательным»[148]. Не совсем понятное словосочетание «неудобовероятным способом» можно условно истолковать как «странным способом». Получается, что Л.Ф. Магницкий мог обучиться математике неким странным образом в связи с выполнением наблюдений. Почему сын Л.Ф. Магницкого Иван как бы зашифровал наблюдательную деятельность своего отца, связанную с научными занятиями математикой? И что это за такая загадочная деятельность, о которой нельзя сказать прямо, чтобы не повредить репутации человека? Можно представить, что это астрология. Все-таки для вывода, что Л.Ф. Магницкий действительно мог профессионально заниматься астрологией, недостаточно косвенных данных, почерпанных из толкования слов эпитафии. Нужно прямое доказательство причастности Л.Ф. Магницкого к предсказательной деятельности. И оно есть.

Соответствующее доказательство зафиксировал в печати «первый биограф»[149] Л.Ф. Магницкого - В.Н. Берх: «Замечательно, что он («Магнитский» - уточнил Берх в переиздании своей работы 1835 г.) предъузнал кончину императора Петра I, и объявил о сем жене своей Марье Гавриловне». Как указал здесь же В.Н. Берх, эти сведения ему стали доступны благодаря семейным преданиям, «сообщенным мне внуком Л.Ф. М[агницкого] М.Л. Магнитским» [150]. С позиции научной археографии и документального источниковедения, “предание, не достоверное повествование”[151]. Но в данном случае достоверность информации, отраженной в предании, гарантировалась статусом информанта. Им был крупный государственный чиновник, действительный статский советник (чин соответствовал званию генерала) Михаил Леонтьевич Магницкий (1778-1855), правнук (а не внук) Л.Ф. Магницкого. В.Н. Берх не стал бы подвергать себя ненужным осложнениям и

[147] *Серебрякова Е.И.* Надгробная плита Л.Ф. Магницкого // Памятники науки и техники (1987-1988). М., 1989. С. 239. Надгробная плита Магницкого сохранилась. Она находится в филиале Государственного исторического музея (Москва) – Покровском соборе (храме Василия Блаженного) (ГИМ. Ф. н/в 5639/39). Утраченные части текста восстановлены Е.И. Серебряковой (в круглых скобках) по изданию эпитафии И.М. Снегиревым в «Московских ведомостях» № 76 за 1836 г. и др. публикациям текста.

[148] *Преображенский А.Г.* Этимологический словарь русского языка: В 2 т. М., 1959. Т. 1. С. 184. Статья «Диво»: из санскритского devas – ‘Бог’, ‘божественное’ – идет индоевропейская основа ‘небесный’, отсюда славянское ‘смотреть’, ‘наблюдать’.

[149] *Лаврентьев А.В.* Люди и вещи. Памятники русской истории и культуры XVI-XVIII вв., их создатели и владельцы. М., 1997. С. 100.

[150] [*Берх В.Н.*] Жизнеописание учителя математики Леонтия Филипповича Магнитского // Записки, издаваемые государственным Адмиралтейским департаметом, относящимся к мореплаванию, наукам и словесности. СПб., 1825. Часть 8. С. 413-417, 421.

[151] *Козлов В.П.* Археографическое обозрение России: 1991-2012 годы. М., 2013. С. 243.

даже возможным преследованиям со стороны государственных служб, если бы приводимые им неизвестные или малоизвестные данные из жизни Петра I не были под серьезной информационной защитой в лице авторитетного в глазах властей родственника Л.Ф. Магницого, который мог подтвердить достоверность сведений о былом предсказании своего прадеда, сделанным царю.

Предание о прогнозе отличается предельной компактностью, и на его основе нельзя понять, какая математика была использована Л.Ф. Магницким при его создании. Однако в историографии накоплены сведения о математической составляющей работы астрологов Западной Европы в период Ренессанса или Возрождения. В этот период, когда возрождался интерес с ценностям Античности, формировалась новая гуманистическая парадигма, состоящей в возвышении роли человека. В связи с распространением этих гуманистических настроений стал формироваться стиль жизни, направленный на приоритетное удовлетворение потребностей людей. В этой связи возросла роль университетов, особенно медицинских факультетов. Здесь стали развиваться новые науки, получившие в историографии название «ятронаук» (от греч. iatros– врач). Ятронауки это такие, например, дисциплины, как «ятроматематика», «ятрофизика», «ятрохимия» и пр. Ятронауки опирались на методы знания Античности, как астрология, натуральная магия и др., так как наук математического естествознания (современного типа) просто еще не было. Постепенно внутри ятронаук стали формироваться новые подходы и методы научного знания, превратившись впоследствии в современные математику, физику, химию и т.д.

И.М. Рабинович в 1974 г. выявил некоторые особенности превращения ятроматематики в современную математику[152]. Он поставил вопрос: «Какую роль играли математики XVI в. в окружающей их среде? Чем они кормились?»[153]. Изучение привело его к выводу, что «среди исследователей XVI в., которых историки науки относят к математикам, были такие …, которые занимались математикой в связи с потребностями медицины»[154].

Так, работу математика с врачом И.М. Рабинович исследовал на примере деятельности Захария Стопия, врача Рижского архиепископа Вильгельма (умер в 1563 г.)[155]. Врача консультировал математик, «который помогал доктору Стопию при составлении астрологического прогноза болезни». И в этом случае И.М. Рабинович задался вопросом: «Являлось ли такое представление об обязанностях математика распространенным в Европе? Ответ на этот вопрос, притом утвердительный, дает перечень альманахов XVI в., составленный историком метеорологии Г. Хеллманом». Математики «занимались астрологией в той мере, в какой это требовалось для медицинской практики. Впрочем, в перечне Хеллмана встречается эпитет, полностью соответствующий новому назначению искусства вычислений: ятроматематикус»[156].

Процесс формирования ятронаук происходил и в России. Он начался в XV в. и длился до XVIII в., о чем свидетельствуют выявленные и изученные источники[157]. Важное место в этом процессе занимали иноземные аптекари и врачи, которые на царскую службу приглашались на основе довольно строгого отбора и только при наличии диплома об окончании университета. Сохранившиеся архивные материалы свидетельствуют, что их деятельность была связана с астролого-астрономическими наблюдениями и математическими расчетами, на основе которых принимались решения о времени и типе медицинских процедур (например, флеботомии) и др.

---

[152] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках // Историко-математические исследования. М., 1974. Вып. 19. С. 223-230.
[153] *Рабинович И.М.*О ятроматематиках. С. 223.
[154] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках. С. 224.
[155] *Рабинович И.М.* Рижский врач-астролог Захарий Стопий из Вроцлава // Из истории медицины, 5. Рига, 1963. С. 147-151.
[156] *Рабинович И.М.* О ятроматематиках. С. 225-226.
[157] *Симонов Р.А.* Исследования предыстории научной книги в России (ятронаучный аспект) // Федоровские чтения 2011 / Отв. ред. В.И. Васильев. М., 2012. С. 395-417.

видов врачевания, а также при изготовлении лекарств. Как и на Западе, в прерогативу врачей, находившихся в России, также входило составление политических, сельскохозяйственных и метеорологических прогнозов. Несомненно, что иноземные врачи в Росси владели математическими методами, необходимыми для астрологических вычислений, не отказываясь они и от помощи профессиональных математиков.

Учитывая прогностические умения Л.Ф. Магницкого, можно предположить, что он их приобрел в процессе работы у врачей или провизоров в Немецкой слободе. Вначале он, по-видимому, находился в положении ученика или подсобного служителя. Затем, овладев необходимыми знаниями, мог сам производить астрологические расчеты, постепенно накапливая соответствующие вычислительные навыки, фиксируя добытые знания в памяти и в записях. В таком случае он должен был иметь хоть какие-то сведения из медицины. Однако в довольно обширной историографии о Л.Ф. Магницком, накопившейся за XIX-XX вв., не было данных об этом. И сравнительно недавно такие сведения «нашел» А.В. Лаврентьев в «Записке» Л.Ф. Магницкого по судебному делу о вольнодумстве Д.Е. Тверитинова 1713-1717 гг.[158] Излагая перипетии процесса, Л.Ф. Магницкий попутно дал краткую медицинскую характеристику болезни брата Д.Е. Тверитинова Фадея: «Ибо в корени языка его имелася болезнь, именуемая рак, от неяже нужно душу изверже» [159]. Данные о знании Л.Ф. Магницким медицины А.В. Лаврентьев оценил так: «…Магницкий обладал, очевидно, некоторыми познаниями в медицине: им вполне профессионально описана «болезнь рак», от которой скончался брат Д.Е. Тверитинова»[160].

Знания Л.Ф. Магницкого по медицине, по-видимому, можно обусловить его занятиями ятроматематикой. И при этом встает вопрос о Немецкой слободе. В историографии есть данные, что до Математико-навигацкой школы Л.Ф. Магницкий «вращался и образовывался» в среде иностранной диаспоры Москвы. Так, А.В. Лаврентьев, изучая факт использования Л.Ф. Магницким иностранных языков, пришел к соответствующему выводу: "… Первые 30 лет жизни Магницкого – загадка, и исключать его службу у "московских иноземцев" как, очевидно, самый прямой путь к изучению языков нельзя"[161]. Нельзя также исключать, что возможные контакты Магницкого с "московскими иноземцеми" не исчерпывались только желанием усвоить иностранные языки, но были также связаны с его интересом к магии, точнее – к ятроматематике (математической астрологии для врача и фармацевта).

Магический аспект деятельности Леонтия Филипповича мог получить отражение в его фамилии Маг-ницкий. Свою фамилию, по преданию, он получил от Петра I в 1700 г., о чем впервые говорится в эпитафии. Причина проявления такой формы расположения царя к Леонтию Филипповичу здесь выражена как-то "несерьезно": понравился Леонтий царю "для остроумия в науках", он и назвал его "Магницким". Но это "остроумие" очевидно привело к какому-то важному для Петра I результату, но о нем в эпитафии нет ни слова. Таким результатом могла быть "Арифметика", но она появилась тремя годами позже. Остаются магические занятия Леонтия Филипповича, которые привели к понравившемуся царю предсказанию, и Петр I в награду назвал его автора «Магницким» Но в таком случае общественное мнение должно было бы сохранить об этом память.

---

[158] Д.Е. Тверитинов (Дерюжкин): «Около 1692 г. он перебрался в Москву из Твери, обучался лекарскому делу в Немецкой слободе, участвовал в 1695-1696 гг. «с иноземными врачами» в Азовских походах, а около 1700 г., женившись на дочери серебряника Олисова, начал собственную лекарскую практику» (*Смилянская Е.Б.* Волшебники. Богохульники. Еретики. Народная религиозность и «духовные преступления» в России XVIII в. М., 2003. С. 266)

[159] *Магницкий Л.Ф.* Записка Леонтия Магницкого по делу Тверитинова // Памятники древней письменности. СПб., 1882. Т. 38. С. 5.

[160] *Лаврентьев А.В.* Указ. соч. С. 78.

[161] *Лаврентьев А.В.* Указ. соч. С. 78.

И она действительно сохранилась. Такая возможность описана в историографии. Так, Н.А. Криницкий в начале XX в. сообщил в статье, посвященной Л.Ф. Магницкому, что существует «магическая» версии происхождения этой фамилии: «Другие производят его фамилию от слова magia, magicus, что значит волхвование или волшебный, волхвователь, приписывая ему знание (в тексте «звание» – Р.С.) и этой науки»[162]. В.Н. Берх в 1825 г. придумал «магнитную» версию происхождения фамилии Л.Ф. Магницкого: «Государь, беседуя с ним многократно о математических науках, был так восхищен глубокими познаниями его в оных, что называл его магнитом, и приказал писаться Магнитским»[163]. В оценке Берха все верно кроме одного, вместо слова «магнит» надо поставить magia/magicus. Такое понимание текста наиболее точно отвечает имеющимся данным. Из них следует, что занятия Л.Ф. Магницкого математикой до встречи с Петром I в 1700 г. могли быть связаны с расчетной прогностикой по запросам ятроматематиков (врачей-астрологов или аптекарей) из числа «московских иноземцев». А сама встреча 1700 г. могла ознаменоваться передачей царю составленного Магницким прогноза его жизни, чем Петр I восхитился, так как не ожидал встретить русского специалиста в соответствующей сфере знаний. В этой связи он мог назвать его магом и прозвать Магницким. В.Н. Берх просто мог не знать о «магической» версии, так как писал о Магницком спустя век с четветью после встречи Магницкого с царем, когда ятроматематики уже «перевелись», и память о них стерлась. Н.А. Криницкий же опирался на данные, уходящие в XVIII в., когда соответствующие события были более свежи.

Следует иметь в виду, что кроме составления прогноза для царя Л.Ф. Магницкий мог участвовать в подготовке прогностического «Брюсова календаря», изданного при одобрении Петра I и под «надзрением» его ближайшего сподвижника графа Я.В. Брюса. В историографии автором «Брюсова календаря» считается сотрудник Магницкого по написанию и изданию «Арифметики», его земляк Василий Киприанов, о чем были найдены архивные свидетельства Т.Г. Куприяновой[164]. Она же в Государственном историческом музее изучила хранящийся там рукописный «Планетник» начала XVIII в., и определила, что он был основой «Брюсова календаря». По некоторым данным, можно заключить, что в работе над ятронаучным «Планетником» также принимал участие и Л.Ф. Магницкий, но это предположение требует дальнейшей разработки и изучения[165].

Возвращаясь к роли в судьбе «Арифметики» Л.Ф. Магницкого книги «некоторого иноземца», на основе проведенного исследования можно заключить, что она заметного влияния на вычислительное содержание учебника могла не оказать. Будучи в течение продолжительного времени помощником иноземных ятроматематиков (астрологов-врачей и аптекарей), живших в Немецкой слободе, Л.Ф. Магницкий мог в совершенстве овладеть вычислительными методами, необходимыми для выполнения прогностических расчетов. Этот арифметический материал должен был иметь выраженную практическую направленность и высокое научное качество, иначе он утрачивал конкурентоспособность, и труд Л.Ф. Магницкого мог потерять спрос у достаточно требовательных к качеству математического исполнения иностранных работодателей. Если это учесть, то будет понятен тот фурор и ажиотаж, который вызвало появление «Арифметики», и особенно интерес к ней, как к самоучителю (вспомним М.В. Ломоносова). Книгу «некоторого иноземца» Л.Ф. Магницкий мог использовать как структурное «вместилище», готовые рамки учебника, в которые он вложил свой уникальный материал, придавший изложению «Арифметики» присущую ей неповторимость.

---

[162] *Криницкий Н.А*. Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739 гг.) // Труды второго областного Тверского археологического съезда 1903 года, 10-20 августа. Тверь, 1906. С. 439.

[163] [*Берх В.Н.*]. Указ. соч. СПб., 1825. С. 413-417, 421.

[164] *Куприянова Т.Г.* Новые архивные сведения об истории создания «Арифметики» Л. Магницкого // Естественнонаучные представления Древней Руси. М., 1988. С. 280-282.

[165] Любезно сообщено автору настоящей статьи Т.Г. Куприяновой, за что выражаю ей свою признательность.

Герман Ганкель. К 175-летию со дня рождения.

Г.И. Синкевич

Биография. Герман Ганкель (Ханкель, 14.02.1839–29.08.1873), родился в Галле в семье школьного учителя, а затем профессора физики Вильгельма Готтлиба Ганкеля. В 1849 г. семья переехала в Лейпциг, где Вильгельм Готтлиб стал профессором университета. Уже в гимназии Герман проявлял интерес к древним языкам, читал по-гречески математические тексты, и написал первую школьную работу по текстам из Диофанта. В 1857 г. он поступил в университет Лейпцига, где изучал математику у Августа Фердинанда Мёбиуса (1790–1868), а также у алгебраистов Вильгельма Дробиша[166] (1802–1896) и Вильгельма Шайбнера (Wilhelm Scheibner (1826–1908), а физику у своего отца. По традиции, немецкие студенты должны были каждый семестр слушать лекции в различных университетах. Ганкель в 1860 году слушал лекции Георга Бернхарда Римана (1826–1866) в Геттингене, а в 1861 году лекции Карла Вейерштрасса (1815–1897) и Леопольда Кронекера (1823–1891) в Берлине.

В 1861 году в Геттингене он защитил работу «К общей теории движения жидкостей», а в 1862 году в Берлине получил докторскую степень за диссертацию «Об особом классе симметричных определителей».

Право на чтение лекций он защитил в 1863 году в работе «Эйлеровы интегралы от неограниченного аргумента» [2] в университете Лейпцига, где и начал преподавать.

В 1867 году Ганкель стал экстраординарным профессором, но в том же году переехал в Эрланген, где стал ординарным, то есть штатным, профессором. Там он женился на Марии Диппе, а в 1869 году молодая семья переехала в Тюбинген, где Ганкелю предложили кафедру. В 1872 году Ганкель перенёс тяжёлый менингит и в 1873 году в 34-летнем возрасте неожиданно умер от инсульта.

Научной особенностью математического творчества Ганкеля было сочетание историко-математического и философского методов. Он видел развитие идеи во времени, и связь идеи с потребностями времени. В частности, он заметил, что математические операции последнего века влекут постепенное расширение понятия числа.

Его основные интересы разделялись между теорией комплексных чисел, теоретической арифметикой, теорией функций, проективной геометрией и историей математики. Ганкель был первым профессором, читавшим студентам лекции по истории математики, ему принадлежит честь открытия и популяризации идей Больцано и Грассмана. Уже в работе [2] 24-летнего Ганкеля содержится историко-математический анализ работ Эйлера.

Комплексные числа и функции. Интерес к теме комплексных функций проявился у Ганкеля благодаря его учителю Риману.

В XIX веке теория функций комплексной переменной формировалась, накапливая результаты. Ещё не существовало обобщения теории. Представление комплексных чисел в виде точек плоскости получило признание с 1831 года, когда была опубликована работа Карла Гаусса (1777–1855) «Теория биквадратных вычетов», включавшую обоснование комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Он же исследовал широкий класс специальных функций, в том числе эллиптических. Независимо от Гаусса теорию эллиптических функций разработал норвежский математик Нильс Абель (1802–1829). Наряду с ним вёл фундаментальные исследования немецкий математик Карл Якоби (1804–1851). Его книга «Новые основания эллиптических функций», изданная в 1829 году, содержит теорию тэта-функций, теперь носящих его имя. Впоследствии тему эллиптических функций разрабатывали Ж. Лиувилль, Ш. Брио, Ж. Буке, Ш. Эрмит, А. Гурвиц.

Огромен вклад в теорию функцию комплексной переменной французского математика Огюстена Коши (1789–1857). Он доказал теорему о независимости интеграла от пути

[166] Дробиш был также исследователем истории алгебры, что видно из его книги [1].

интегрирования, построил теорию вычетов с её приложениями, получил интегральную формулу и из неё вывел разложение в степенной ряд. В 1843 году французский военный инженер и математик Пьер Лоран (1813–1854) опубликовал работу о разложении функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце, в ряд по целым положительным и отрицательным степеням[167]. В 1862 году Эжен Руше (1832–1910), выпускник Политехнической школы Парижа, опубликовал статью, содержащую теорему о количестве нулей аналитических функций.

С 1850-х годов Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции по аналитическим функциям. Он независимо получил результаты Коши и Лорана, создал основы теории аналитического продолжения рядов.

В 1851 году Бернгард Риман (1826–1866) представил свою знаменитую докторскую диссертацию «Основания общей теории функций одного комплексного переменного», определившую новый этап в развитии теории аналитических функций и содержащую исходные идеи топологии поверхностей (многолистные поверхности), а в 1857 году развил эти идеи в «Теории абелевых функций». В 1864 году появились лекции Дюрега[168] (друга Дедекинда) по теории функций комплексной переменной, в 1865 году С. Нейман опубликовал лекции по Римановой теории абелевых интегралов.

Работа Ганкеля «Теория комплексных числовых систем» [3] появилась в 1867 году (русский перевод под ред. И.И. Парфентьева – Казань, 1912). В ней содержалось обобщение мнимых чисел, теория кватернионов Гамильтона на базе геометрического представления для задач математического анализа и изложение идей Грассмана.

Работу Ганкеля отличало выявление исторических связей и их влияние на постепенное формирование основных понятий теории функций комплексной переменной с середины XVIII века. Это позволило Ганкелю определить направление дальнейшего развития математики, в частности, грядущее расширение понятия числа[169].

В его работах по теории интегрирования, написанных в духе и под влиянием Римана, есть предчувствие теории меры.

Теоретическая арифметика. С 1867 года Ганкель занимается теоретической арифметикой, одним из первых оценив её значение как фундаментальной теории для дальнейшего развития математики. Его первая статья «Принцип постоянства формальных законов» (Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze) была опубликована в 1867 году. В том же году вышла его книга «Теория комплексных числовых систем». По Ганкелю «идеальная цифровая система должна с помощью возможно малого числа знаков представлять каждое число в наиболее сжатом и наиболее наглядном виде». Это требование называют постулатом Ганкеля. Ему же принадлежит формулировка принципа постоянства формальных законов для новых концепций. Ганкель показал, что произведение отрицательных чисел есть расширение обычного умножения для положительных чисел, а также, что ни одна система гиперкомплексных чисел не может удовлетворить всем законам обычной арифметики.

Как историк математики, Ганкель многое сделал для восстановления справедливой оценки идей Больцано и Грассмана. Более того, именно исторический взгляд на современную ему математику позволил ему подойти к проблеме аксиоматизации арифметики. Ганкель хорошо знал работы Больцано, начиная с самых ранних, опубликованных в 1810 году.

---

[167] Его работа была неизвестна в Германии. В 1822 году Мартин Ом получил разложение в ряд как по отрицательным, так и по положительным степеням переменной, а в 1841 году Вейерштрасс в работе «Darstellung einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen, deren absoluter Beitrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt» независимо от Лорана получил разложение комплексной функции в кольце в ряд по отрицательным и положительным степеням.

[168] Дюрег Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

[169] В 1869–1872 годах появились новые концепция числа, созданные независимо Шарлем Мере во Франции, и немецкими математиками Эдвардом Гейне, Георгом Кантором и Рихардом Дедекиндом.

Больцано один из первых начал разрабатывать аксиоматический метод как общенаучную логическую процедуру с такими характеристиками, как полнота, непротиворечивость, независимость.

В 1810 году Больцано обратил внимание на то, что истины арифметики не могут быть выведены из эмпирических наук, прежде всего из геометрии [4]. Он основал правила арифметики на четырёх аксиомах и двух правилах сложения и умножения, из которых можно вывести все правила арифметики для натуральных чисел.

В 1820–1825 годах Больцано развивал теорию целых и рациональных чисел (рукопись «Reine Zahlenlehre»), а 1830-х годах и теорию действительного числа [5]. Эта теория близка к современной концепции действительного числа, включая определение числа через сечение (за 40 лет до Дедекинда), но опирается на понятие переменного бесконечно большого и бесконечно малого числа. Возможно, если бы рукописи Больцано 1830-х годов были опубликованы и обрели признание, мы бы имели сейчас иную математику, основанную на нестандартном анализе.

С 1822 по 1852 год выходит цикл работ «Опыт логического изложения математики» («Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik» в трёх томах, Нюрнберг) Мартина Ома[170] (1792-1872), математика, младшего брата физика Георга Ома. Его исследования лежали в области теории чисел и геометрии, теории дзета-функций, теории тригонометрических рядов и оснований математики. Он изучал степенно-показательные комплексные функции, рассматривая анализ в формально-логическом аспекте. Его идеи формализации алгебры были близки Ганкелю.

В 1827 году Мёбиус предложил барицентрическое исчисление (Der Barrycentrische Calcul, Лейпциг, 1827).

В 1843 году начал выявление аксиом арифметики Н. И. Лобачевский (Алгебра или счисление конечных, 1834 г.).

В 1861 году попытку построить теорию арифметики предпринял школьный учитель, математик Герман Грассман [6]. Он дал определения сложения и умножения натуральных чисел, доказал основные свойства операций над ними (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) и прояснил роль индуктивных определений. Необычная терминология и абстрактное изложение делали его сочинения малодоступными, он не был понят коллегами. Лишь Ганкель в 1867 году разъяснил сущность его идей[171], а в 1869 году в своей работе «Развитие математики в последние века» [Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte] дал своё независимое изложение теоретической арифметики. Он рассмотрел идею обоснования операций над алгебраическими величинами, необходимость которой проявлялась с первой трети XIX века[172]. Также Ганкель в работе о комплексных числовых системах рассмотрел действительные, комплексные и гиперкомплексные числовые системы, барицентрическое исчисление Мёбиуса 1827 года и построил для него алгебраическую систему, а также построил алгебраические системы для некоторых алгебр Грассмана и кватернионов Гамильтона. Особенно остро проблема перманентности формальных законов проявилась с появлением кватернионов в 1843 году (Уильям Гамильтон, первые работы в 1833 г.), на которые этот принцип уже не распространялся.

Ганкель выделил инвариантный почти для всех цивилизаций принцип записи чисел: «закон убывающего следования разрядов»: при написании чисел, составленных с помощью сложения разрядов (аддитивно), высший разряд при принятом данным народом способе чтения и письма предшествует на письме низшим разрядам, то есть старшие разряды

---

[170] Мартин Ом был учителем Эдварда Гейне и Рудольфа Липшица. Ому принадлежит термин «золотое сечение»(goldener Schnitt).

[171] Позже Клебш продолжил интерпретацию алгебры Грассмана.

[172] Первым обратил внимание на эту проблему Джордж Пикок (1791-1858). Он ввел различие между арифметической алгеброй и символической алгеброй. Идея Пикока, известная под названием «принцип перманентности эквивалентных форм», была выдвинута им в 1833 г. в «Докладе о последних достижениях и современном состоянии некоторых областей анализа», прочитанном на заседании Британской ассоциации поощрения науки. Его идеи были развиты Ганкелем.

пишутся левее младших. Вопрос о необходимости аксиоматизации арифметики, поднятый Больцано и продолженный Грассманом и Ганкелем, был дополнен работами Дедекинда, Буля, и завершён в 1889 году Дж. Пеано.

Принцип сгущения особенностей. В 1870 году в Тюбингене вышла знаменитая работа Ганкеля «Исследование бесконечное число раз колеблющихся и разрывных функций» [7]. В 1854 г. Риман привёл пример функции, разрывной и недифференцируемой на всюду плотном множестве. Кроме того, в 1861 г. Риман указал еще пример функции, не дифференцируемой на всюду плотном множестве. До конца 70-х годов после Римана не было опубликовано ни одного примера функции без производной на бесконечном множестве точек, и всё ещё сохранялось убеждение в том, что на каждой непрерывной кривой можно найти точку с касательной. Однако уже в 1870 г. Ганкель предложил так называемый метод сгущения особенностей для построения функций, в которых производная отсутствует на всюду плотном множестве точек, и приводит конкретный пример такой функции. Развивая идею критерия интегрируемости, Ганкель близко подходит к понятию меры. Он переформулировал критерий интегрируемости Римана, делая акцент на метрических свойств множества точек. Указав, что функции не обладают общими свойствами, Ганкель попытался ввести свою классификацию функций, рассмотрев интегрируемость каждого типа, и представил метод, основанный на его принципе конденсации особенностей, для построения функций с особенностями в каждой рациональной точке. Хотя теория множеств ещё не появилась, и Ганкелю не хватало характеристик для описания множеств точек разрыва, его работа стала важным продвижение к современной теории интеграла. Иной метод построения непрерывной монотонной функции в 1873 г. приводит Шварц. Построенная таким образом функция не имеет конечной производной на бесконечном числе точек на любом интервале. Наиболее значимый результат в этом направлении был получен Вейерштрассом (1872 г.): он строит свой знаменитый пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Этот пример определил направление ряда исследований таких функций и привел к повышению требований к строгости математических рассуждений и построений.
Работа Ганкеля была созвучна разрабатываемой в те же годы его отцом, физиком Вильгельмом Готтлибом Ганкелем, теории вихрей.

Цилиндрические функции Ганкеля. В Mathematische Annalen были опубликована статья Ганкеля [8], посвящённая некоторым специальным функциям, зависящим только от расстояния от начала координат, а также функциям вида $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$, $H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$, называемым цилиндрическими функциями Ганкеля или функциями Бесселя третьего рода. Они представляют собой линейные комбинации функций Бесселя первого и второго рода, и являются решениями уравнения Бесселя.

Проективная геометрия. В 1875 году, уже после смерти Ганкеля, под редакцией А. Гарнака вышли лекции Ганкеля «Элементы проективной геометрии»[9], в которые включены исторические сведения о геометрических методах и соотношения методов современной геометрии, учении Понселе, Шаля, Штаудта с критическим анализом, подобно анализу систем счисления. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» (Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte), «новая [проективная] геометрия и представляет собой тот «царский путь, в котором несправедливо отказал Евклид Птолемею», подразумевая трудности евклидовой, метрической геометрии и заманчивые перспективы развития геометрии проективной. Правда, Феликс Клейн назвал эту речь «блестяще прочитанной, но по содержанию совершенно не обоснованной» [10].
Ганкель как историк математики. Творчество Ганкеля относится к периоду подъёма математики в Германии, увенчавшегося появлением концепций действительного числа, разрабатываемых Рихардом Дедекиндом, Георгом Кантором и Эдвардом Гейне. В это же время (1869–1872 годы) во Франции появилась концепция числа Шарля Мере, но события, предшествовавшие франко-прусской войне, которая началась летом 1870 года, не способствовали научному обмену между математиками Франции и германских земель.

Помимо этого во Франции после смерти Коши произошло замедление математических исследований. Теорию Мере не оценили соотечественники. Как заметил сам Ганкель в 1869 году в речи "Развитие математики в последние века» [11], после смерти Коши «Княжество математики теперь бесспорно переместилось в Германию, и хотя во Франции ещё есть энергичные ветераны, такие как Шаль и Лиувилль, но у них нет достаточного количества достойных последователей, способных конкурировать с немцами» [11, с. 29].

Ганкель хотел написать историю математики. Как заметил Морис Кантор, Ганкель был единственным среди немецких профессоров, преподававшим историю математики [12]. Рукопись Ганкеля «Исторические очерки развития математики в древности и средние века» объёмом более 400 страниц была готова к печати и опубликована уже после его смерти, в 1874 году [13]. Она содержит подробнейшее изложение истории греческой математики, математики Индии, Китая, арабских стран и средневековой европейской математики до XVI века. Наряду с глубоким анализом в книге можно встретить как исторические неточности, так и гипотезы исторического характера. Например, интересно предположение Ганкеля о происхождении китайской математики из Индии. А.В. Васильев высоко оценивал «Исторические очерки математики в древности и средние века» Ганкеля, называя их глубокими и вдумчивыми [14].

Ганкель, равно как Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор, полагал математику созданием ума. Он писал: «Математика есть чисто интеллектуальная теория форм, объектами которой являются не комбинации величин или их образов, то есть чисел, но воплощение мыслей, которым не обязательно соответствуют эффективные объекты или их отношения»[11, с. 34].

Статья «Предел»[15]. Статья «Grenze» – предел или граница[173] – была одной из трёх статей, написанных Ганкелем для Энциклопедии наук и искусств, которая начала выходить с 1818 года. В 1871 году вышел 90-й том. Две других статьи Ганкеля в «Энциклопедии» были посвящены гравитации и работам Лагранжа по решению уравнений. Статья «Предел» занимает 26 страниц в две колонки мелким готическим шрифтом. Эта статья интересна тем, что понятие предела в эти годы ещё формировалось – Вейерштрасс с 1861 года использовал в своих лекциях язык ε-δ, а понятия предела через фундаментальные подпоследовательности (Гейне и Кантор) ещё не было – оно появится в 1872 году, равно как и понятие предельной точки у Кантора (1872 г.) и у Вейерштрасса (1883 г.). Ганкель рассматривает историю понятия предела в обратной перспективе, прогнозируя возможные тенденции развития, которые, как мы уже знаем, осуществились в последующие десятилетия.

В этой статье проявляется мысль Ганкеля о принципе постоянства формальных законов наряду с постепенным расширением основных понятий математики.

Здесь он впервые отмечает важность работ Больцано о бесконечных рядах и публикует пример непрерывной функции, недифференцируемой в бесконечном числе точек.

Ганкель начинает с современного ему понятия предела, данного Коши в «Курсе анализа» 1821 года, затем обращается к истокам – построению предела у Евклида, очень подробно о методе исчерпываний (§1), Аристотеля и построению предела у Архимеда (§2). Далее он рассматривает развитие понятия бесконечности у Михаэля Штифеля в «Arithmetica Integra» 1544 года, у Кеплера «Новая стереометрия винных бочек» 1605 года, Кавальери 1635 г., Ферма, Роберваля, Паскаля, Валлиса, Лейбница, Больцано[174] (§3). Формированию понятия предела в XVIII – начале XIX века посвящён §4 – Ганкель рассматривает работы Больцано1810, 1816 и 1851 годов, понятие предела от Ампера (1806 г.) до Дирихле (1829 г.), работы Якоби и Гаусса (1840 г.). Понятию предела функции посвящён §5 - предел при бесконечном приращении аргумента, суммирование бесконечного количества слагаемых, дифференцирование. §6. Приближение к пределу у Мак Лорена, Тейлора, Ньютона, Лейбница. Теорема Лагранжа, ряды Тейлора. §7. Предельное значение (Grenzwert). §8. Доказательство существования предела. Рассматривается предел частичных сумм

[173] Grenze – этот немецкий термин употреблялся наряду с термином limit, но имеет больший объём понятия.
[174] Ганкель ссылается на книгу Больцано «Парадоксы бесконечности», вышедшую в 1851 г.

сходящихся рядов, в том числе и тригонометрических и приводится известный пример[175] ряда $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin mx}{m}$, который имеет суммой непрерывную функцию всюду, кроме точек вида $x=(2m+1)\pi$. Здесь же Ганкель рассматривает предельное поведение функций вида $\sin\frac{1}{x}$.

Далее Ганкель вводит понятие равномерного предельного поведения, которое в 1872 году будет развито в понятие равномерной непрерывности и воплотится в теореме Кантора–Гейне: «Если *A* является пределом, то всегда можно найти такое значение ε, что $f(a+\varepsilon)$ отличается от предела *A* на сколь угодно малое положительное значение σ, и как только δ < ε, так сразу $f(x+\delta)$ отличается от *A* не более чем на σ. В связи различными потребностями встречаются различные определения предела; приведём следующую строгую формулировку, подведя итог в строгом соответствии с концепцией этой идеи.

Если функция $f(x)$ принимает конечное значение *A* в интервале между $x=a$ и $x=a+\varepsilon$, и для каждого произвольного δ принимает любые значения, тогда можно определить разность $A-f(a+\delta)$, при том, что δ не выводит за пределы интервала, то есть $A-f(a+\delta)$ проходит через нулевое значение, то $f(a+\varepsilon)$ неограниченно приближается к своему пределу при неограниченно убывающем ε» [стр. 193]. Это замечание интересно тем, что здесь используется мысль Больцано 1817 года о том, что теорема Ролля есть основное свойство непрерывности[176]. В следующем параграфе Ганкель рассматривает непрерывные функции (§9), которые он определяет так: «Функция $f(x)$, которая при $x=a$ принимает конкретное значение $f(a)$, называется непрерывной в этой точке, если для произвольно малого ε разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$, численно не превосходит сколь угодно малой величины σ.

Точкой разрыва называют такую точку $x=a$, для которой не существует столь малого ε, чтобы разность $f(a+\delta)-f(a)$ для всех $\delta<\varepsilon$ была бы меньше произвольной величины σ» [стр. 194]. Как мы видим, Ганкель вводит более сильное определение непрерывности, хотя не проявляет зависимости между ε и σ. Заметим также, что Коши в 1821 году называл «непрерывной такую функцию, для которой в любой точке между двумя заданными пределами разность $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно убывает вместе с числовым значением α. Другими словами, функция $f(x)$ остаётся непрерывной относительно *x* между двумя данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции» (Коши, Курс анализа, 1821 год, стр. 43).

§10 посвящён свойствам непрерывных функций, при этом помимо известных к тому времени свойств непрерывных функций Ганкель рассматривает понятие осцилляции. Далее Ганкель рассматривает разрывные функции (§11) и приводит пример точечно-разрывной функции (по Риману) – нигде не дифференцируемой непрерывной функции. Заметим, что классификацию разрывов, а также определение непрерывности через односторонние пределы ввёл Улисс Дини в 1878 году.

§13 посвящён понятию предела в анализе. Большое значение развитию понятия предела в анализе Ганкель придаёт Лагранжу и его курсу Leçons sur le calcul des fonctions 1806 года,

[175] Впервые этот ряд встречается у Эйлера, затем его приводит Фурье в «Аналитической теории теплоты». Но Фурье включал в график рассматриваемой функции и отрезки перпендикуляров, восстановленных в точках конечных разрывов, поэтому функция в его понимании не была разрывной. В 1821 году Коши сформулировал утверждение, что всюду сходящийся ряд непрерывных функций имеет пределом непрерывную функцию. В 1826 году Абель привёл в качестве контрпримера к этому утверждению указанный тригонометрический ряд.

[176] Впоследствии это утверждение получило название теоремы Больцано-Вейерштрасса.

работам Ампера 1806 года, Раабе 1839 года. В §14 он рассматривает понятие отношения дифференциалов, т.е. производную и её геометрический смысл; в §15 рассматривается понятие определённого интеграла и его история от формулы Ньютона-Лейбница до Коши и до Дирихле, генезис методов Архимеда; свойства определённого интеграла. §16 посвящён несобственному интегралу и работам Римана, §17 – бесконечным рядам. §18 - историческое развитие понятия бесконечного ряда. (Кеплер, Кавальери, Сен-Винсент, Ньютон, Гранди, Эйлер, Я.Бернулли, Маклорен, Раабе, Лагранж, Ролль). Бесконечные (расходящиеся) ряды. Исторический обзор: Кеплер, Кавальери, Григорий Сен-Винсент ($\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$), Николаус Меркатор ($\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots$), Лейбниц ($\frac{1}{4}\pi$), Ньютон (биномиальный ряд). Приводит известный парадокс, псевдоразрешённый в 1703 году Г. Гранди: $\frac{1}{2}=1-1+1-\ldots$; приводит парадоксальные примеры суммирования рядов Эйлером. Якоб Бернулли, Мак Лорен. Подробно рассматривает работы немецких математиков с 1813 года, в том числе швейцарского математика Раабе, основные работы которого были опубликованы в журнале Крелле. Покаывает связь традиций немецкой математики с работами Лагранжа, Ролля, Лакруа (1810). § 19. Критический период (после Лагранжа). Фурье, Больцано. Французская школа. Роль журнала Крелле. Гаусс. Абель. Ряды Фурье. Гаусс, Коши. Больцано «О биномиальном ряде (1816 год). Парадоксы бесконечности Больцано.

§20. Теория Мартина Ома. Мартин Ом с 1822 по 1852 год издавал «Опыт логического изложения математики» в трёх томах, где излагал основы формализованной алгебры. Ганкель критикует Ома за неоправданные формальные обобщения, не учитывающие связи с приложениями, но ставит ему в заслугу принцип расширения числовой области и приводит его примеры разложения некоторых биномиальных рядов как по положительным, так и по отрицательным степеням

Из работ Ганкеля видно, насколько остро встала необходимость классификации точечных множеств и характеристики их сравнения, классификации точек разрыва; насколько нужна была новая концепция числа, как с точки зрения теоретической арифметики, так и с позиций анализа; необходимость новой концепции непрерывности и нового категориального аппарата. В последующие годы Кантором была создана теория множеств, Кантором и Дедекиндом – концепция непрерывности, Дедекиндом и Пеано – аксиоматика арифметики; в лекциях Вейерштрасса начинают формироваться концепция компактности, концепция метрического и топологического пространства, позже оформившиеся в работах Мориса Фреше (1906 г) и Феликса Хаусдорфа (1914 г.)[16]. Мы видим принцип историзма Ганкеля, в обратной перспективе оценивавшего развитие математики, что давало возможность прогнозировать её развитие. Как утверждал Ганкель, «Математика – наука, которая создаётся людьми, в разное время разные народы вносили в неё свой дух» [11, с. 25]. «Во многих науках новое поколение разрушает созданное предыдущим и отменяет установленное ранее. Только в математике каждое новое поколение добавляет новый этаж к прежней структуре»[11, с. 34].

Библиографический список

1. *Drobisch, M.W.* Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen [Текст] / M.W. Drobisch / Leipzig. – 1834. – 386 S.
2. *Hankel, H.* Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes Habilitations-Dissertation [Текст] in Commission bei Leopold Voss, Leipzig. – 1863. – 44 S.

3. *Hankel, H.* Theorie der complexen Zahlensysteme [Текст] / H. Hankel // Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Functionen, 1. Teil. – Leipzig: Leopold Voss. – 1867. – 212 S.
4. *Bolzano, B.* Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik (German), Erste Lieferung [Текст] / B. Bolzano. Unveränderter reprografischer Nachdruck der Ausgabe von 1810. Mit einer Einleitung zum Neudruck von Hans Wussing (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) Darmstadt. – 1974.
5. *Рыхлик, К.* Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано [Текст] / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. Москва: Наука. – 1958 г. – XI. – С. 515–532.
6. *Grassmann, H.* G. Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten [Текст] / H.G. Grassman. Teil 1: Arithmetik. Berlin. – 1861. – 232 S.
7. *Hankel, H.* Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen [Текст] / H. Hankel. Tübingen 1870. – 51 S.
8. *Hankel, H.* Die Zylinderfunktionen erster und zweiter Art, Mathematische Annalen [Текст] – 1869. – S.467 – 501.
9. *Hankel, H.* Die Elemente der Projectivische Geometrie in synthetische Behandlung [Текст] / H. Hankel // Axel Harnack (Hrsg): Vorlesungen. Leipzig: B. G. Teubner. – 1875. – 256 S.
10. *Клейн, Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии [Текст] / Ф. Клейн. – М.-Л. – 1937. – С. 172.
11. *Hankel, H.* Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte [Текст] / H. Hankel // Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29 April 1869. – 36 S.
12. *Cantor, M.* Hermann Hankel [Текст] / M. Cantor // Allgemeinen deutsche Biographie X. – Leipzig. – 1879. – S. 516–519.
13. *Hankel, H.* Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter [Текст] / H. Hankel. Leipzig. – 1874. – 410 s.
14. *Васильев, В.А.* Целое число [Текст] / А.В. Васильев. Петроград. – 1922 г. – 268 с. – с. 65.
15. *Hankel, H.* Grenze [Текст] / H. Hankel //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. – Leipzig. – 1870/71 . – Vol. 90. – p. 185–211.
16. *Синкевич, Г.И.* Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года [Текст] / Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 19. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2013. – С. 4 – 23.

Воззрения Галилея на свойства инерции материальных тел

И.А. Тюлина, В.Н. Чиненова

В этом году исполнилось 450 лет со дня рождения Галилео Галилея - одного из выдающихся ученых Италии позднего Возрождения. Его труды в области астрономии, механики и физики сыграли исключительную роль в развитии этих наук.

В данной статье мы коснемся лишь небольшого круга вопросов, относящихся к теории движения материальных тел. Речь пойдет о фундаментальном трактате Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки», вышедшем в Лейдене в 1638г. Именно это сочинение Галилея явилось главным его трудом по механике, в котором предшествующее развитие учение о так называемых насильственных и естественных движениях земных тел было блестяще завершено.

Конкретное содержание «Бесед…» разделено на шесть «дней». Вопросам теории «местного движения», т.е. перемещению вблизи поверхности Земли тяжелых тел в трактате посвящены первый, третий и четвертый «дни» (движение падающих и брошенных тел).

Если для движения небесных тел, изучаемого в трактате «Диалог…» естественным были перемещения тел по окружности с постоянной скоростью (по мнению Коперника и Галилея), то в «местном движении» Галилей считал естественным состоянием (без действия сил) прямолинейное равномерное перемещение тела, продолжающееся неограниченно долго.

В самом начале сочинения подчеркивается необходимость общения ученого с практиками: «Обширное поле для размышления, думается мне, дает пытливым умам постоянная деятельность вашего знаменитого арсенала, сеньоры венецианцы, особенно в области, касающейся механики, потому что всякого рода инструменты и машины постоянно применяются здесь большим числом мастеров, из которых многие путем наблюдения над созданиями предшественников и, размышления при изготовлении собственных изделий, приобрели большие познания и остроту рассуждений» [1, с. 116].

«Первый день» посвящен теории падения тяжелых тел. Путем умственных экспериментов Галилей опровергает тезис Аристотеля о более быстром падении более тяжелых тел. Не ограничиваясь чисто умозрительными доводами, Галилей перечисляет результаты реальных опытов с маятниками одинаковой длины и с одинаковыми по форме шариками различного веса (из пробки, свинца, дерева, меди и т.п.), совершающими синхронные колебания при одинаковых начальных условиях. Он приходит к выводу: «Если бы совершенно устранить сопротивление среды, то все тела падали бы с одинаковой скоростью» [1, с. 172]. Следует отметить, что маятник, как объект наблюдения позволил ему сделать и другие чрезвычайно важные выводы.

Галилей начал построение абстрактной теории падения тяжелого тела при отсутствии сопротивления воздуха с введения четкого понятия **равноускоренного движения**: это - движение тела, при котором в равные промежутки времени его скорость получает равные приращения. Исходя из этого определения, и дав правильное геометрическое изображение зависимости скорости от времени в равноускоренном движении (диаграммы, аналогичной графикам Орема и Сото), Галилей чисто логически вывел ряд количественных отношений, характеризующих свойства такого типа движения. Очень важна теорема, в которой Галилей говорит о функциональной зависимости пути от времени и утверждает: «Если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собой как квадраты времени» [1, с. 250].

Создав полную теорию равноускоренного движения точки, Галилей задает себе вопрос: действительно ли таково ускорение, которым природа пользуется при движении падающих тел? Вопрос, по мнению Галилея, выясняется только путем точного количественного эксперимента.

Однако прямой опыт с падением тяжелого тела по отвесному направлению не мог дать Галилею надежных результатов: в его распоряжении не было даже точного хронометра. Он обошел это затруднение, проведя эксперименты с тяжелым телом, падающим вдоль гладкой наклонной плоскости, поскольку вдоль наклонной плоскости грузик двигался также равноускоренно, но более медленно (т.е. с меньшим ускорением), что позволило измерить время движения, пользуясь клепсидрами. Галилей проводил многочисленные опыты с бронзовыми шариками, опускавшимися по наклонным желобкам, обтянутым гладким пергаментом, причем наклоны желобков к вертикали менялись. Он показывает, что типы равноускоренных движений точки могут быть различны: в одних случаях скорость нарастает по времени быстрее, в других - медленнее. После детального рассмотрения поведения тяжелой точки на наклонных плоскостях (рис. 1) или лучах *AF, AE, AD*, (в том числе горизонтального луча *AC* и отвесного *AB*) Галилей заключает: «Утверждаю, что тело обладает наибольшим импульсом к падению (l'impeto per descendere) вдоль вертикали *BA*, меньшим - вдоль линии *DA*, еще меньшим - вдоль *EA* и т.д.; импульс постепенно уменьшается по мере приближения к наименее наклонной линии *FA* и **совершенно исчезает при достижении горизонтали *CA*: здесь тело оказывается индифферентным к движению и покою, не имея само по себе никакой склонности к перемещению в какую-либо сторону и не проявляя никакого сопротивления передвижению»** *(выделено нами – авт.)* [1, с. 255].

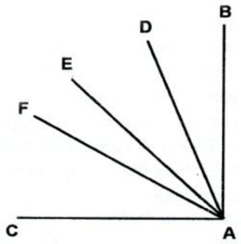


Рис.1

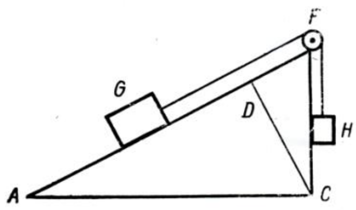


Рис.2

Заключительная фраза содержит в элементарной форме фундаментальное положение классической механики: **закон инерции**.

Чтобы строго теоретически обосновать эквивалентность типов движений тел при свободном отвесном падении и при движении вдоль гладкой наклонной плоскости, Галилей высказывает чрезвычайно важное положение: «… степени скорости, приобретаемые одним и тем же телом при движении по наклонным плоскостям, равны между собой, если высоты этих наклонных плоскостей одинаковы» [1, с. 246]. Условимся для краткости называть в дальнейшем это положение основным тезисом Галилея о равновысоких наклонных плоскостях.

В первом издании трактата Галилей доказывал этот тезис, ссылаясь на эксперимент с маятником, нить которого встречала на пути препятствие в виде поперечной нити или гвоздика. Нить маятника задерживалась гвоздиком, грузик маятника переходил на другую окружность, с центром в гвоздике. И в этом случае груз маятника поднимался на прежнюю высоту, с которой он спускался из состояния покоя. Галилей сделал из этих наблюдений чрезвычайно важный вывод: скорость, приобретаемая телом при опускании его с некоторой высоты по некоторому пути, будет достаточна для поднятия тела на такую же высоту по любому пути. Это была элементарная формулировка **закона сохранения механической энергии**, выведенного из эксперимента.

Однако при подготовке второго издания «Бесед» (оно вышло лишь после смерти автора в 1655г.), Галилей дает и другое доказательство тезиса о равновысоких наклонных плоскостях. В новом варианте доказательства был использован новый опытный принцип, который является элементарным выражением **принципа ускоряющих сил,** наиболее четко сформулированный позже Ньютоном в его знаменитом втором законе динамики.

Научная терминология Галилея не была четкой и однозначной, что вполне объяснимо: создавались новые отрасли науки, как это оговаривалось в названии сочинения. Фактически Галилей оперировал количественными характеристиками, соответствующими более поздним понятиям (силы, ускорения и их составляющих).

Приведем один из примеров, где обсуждается проблема ускорения точки при ее движении по наклонной плоскости: «Степень скорости, обнаруживаемая телом, ненарушимо лежит в самой природе, в то время как причины ускорения или замедления являются внешними; ибо при движении по наклонной плоскости вниз наблюдается ускорение, а при движении вверх - замедление. Отсюда следует, что движение **по горизонтали является вечным**» [1, с. 382]. Заметим, что и здесь Галилей подошел к установлению **закона инерции.**

Многочисленные высказывания Галилея о силе столь же нечетки в количественном отношении. Вот одно из таких высказываний: «Когда вы держите в руке камень, то что иное делаете вы, как не сообщаете ему столько мощи, заставляющей его двигаться вверх, какова способность его веса тянуть вниз?»

Учитывая эти замечания, приведем формулировку Галилея **принципа ускоряющих сил, в которой Ньютон увидел зародыш второго закона динамики:** «Совершенно ясно, что импульс тела к падению столь же велик, как то наименьшее сопротивление или та наименьшая сила, которые достаточны для того, чтобы воспрепятствовать падению и удержать тело» [1, с. 256].

Галилей разъясняет принцип, в дальнейшем повторенный еще несколько раз, на примере груза *G*, помещенного на гладкую наклонную плоскость и удерживаемого посредством нити *GFH* противовесом *H*, прикрепленным к свободно свисающему концу нити *FH* (рис.2). Если перерезать нить *GF*, то тело *G* будет двигаться равноускоренно по гладкой наклонной плоскости *FA.* Так как импульс тела (или его стремление) к падению «столь же велик» как сила, способная его остановить, то в качестве этой силы можно взять тяжесть противовеса *H,* уравновешивающего груз *G* с помощью нити *GFH*.

Опираясь на высказанный принцип, Галилей обосновал свой центральный тезис о равновысоких наклонных плоскостях (подробнее см. в [2]).

Интересно высказывание Ньютона, в котором он называет Галилея своим предшественником в установлении двух первых законов динамики: **«До сих пор я излагал начала, принятые математиками и подтверждаемые многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами и первыми двумя следствиями, Галилей нашел, что падение тел пропорционально квадрату времени и что движение брошенных тел происходит по параболе»** [3, с. 50].

В разделе «День четвертый» изучается проблема движения бросаемых в пустоте тяжелых тел или баллистическая задача. В механике и учении о «местном движении» вместо введенного в «Диалоге» так называемого принципа космической инерции (в соответствии с которым все небесные тела движутся равномерно по круговым орбитам, в центре которых находится Солнце) используется принцип инерции земных тел. Одна из формулировок Галилея приведена нами выше. В самом начале «Четвертого дня» Сальвиати (Галилей) формулирует этот принцип заново. Опираясь на теоремы «Третьего дня», суть которых выше обсуждалась, Галилей напоминает, что импульс тела к падению уменьшается по мере увеличения длины желобка или «наклонной плоскости», вдоль которой опускается тяжелая точка. Считая процесс увеличения длины наклонной плоскости неограниченным, Галилей приходит к выводу: **«Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то как мы уже знаем из всего того, что было изложено выше, движение его является равномерным и продолжалось бы постоянно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца»** [1, с. 304].

Таким образом, в «местном движении» земных тел Галилей установил закон, который позже стали называть законом инерции.

Корректной текстовой формулировки для этого закона мы пока не находим ни в трудах Галилея, ни позже в сочинениях Декарта. Но Галилей первый использует этот закон для решения задач динамики: рассматривая криволинейное падение тяжелой точки, сначала двигавшейся по горизонтальному гладкому желобку, а после его обрыва, описывающей полупараболу, он вводит еще один четко сформулированный закон: «Возникает сложное движение, говорит он, слагающееся из равномерного горизонтального и естественно-ускоренного вниз: его я называю движением бросаемых тел» [1, с. 305]. Второе равноускоренное движение, уточняет Галилей, вызвано силою тяжести. Откладывая по горизонтальной прямой равные отрезки расстояний, проходимых точкой в каждую единицу времени (из-за того, что импульс к падению на такой прямой равен нулю), затем откладывая на отвесной, направленной вниз полуоси отрезки расстояний, проходимые в каждую единицу времени в равноускоренном движении, он доказал, что баллистическая пустотная кривая в данном случае - полупарабола, а для движения тяжелых тел, брошенных под углом к горизонту - парабола, состоящая из двух симметричных ветвей.

Галилей доказал много теорем о свойствах параболического движения брошенного тела, создал таблицы артиллерийской стрельбы [1, с. 337-341], о которых сказал, что они имеют важное практическое применение к метанию снарядов посредством мортир. Он показал, что наибольшая дальность достигается при стрельбе под углом 45^{o} к горизонту; дал способ определения конечной скорости снаряда и скорости в любом месте траектории.

Выдающиеся ученые континентальной Европы уже в XVIII в. оценили вклад Галилея в учение о движении; они пытались дать аналитическую запись принципа ускоряющих сил, называя в простейших задачах этот принцип именем Галилея. В работе П. Вариньона 1705 г. «Траектория снаряда» составлено примитивное дифференциальное уравнение материальной точки единичной массы под действием одной силы тяжести: $p = dv/dt$. Вариньон считает, что в этой формуле выражена «гипотеза Галилея» о постоянстве тяжести p. Затем он вводит в рассмотрение силу сопротивления воздуха, представляя ее линейной функцией времени, а следовательно, и скорости: $adt+tdt=adv$, такой вид имеет дифференциальное уравнение тяжелой точки, движущейся в среде с линейным сопротивлением, где a - некоторая постоянная [4, p.100]. Качественно такую задачу обсуждали Сальвиати и его собеседники в «Беседах» Галилея.

И.Бернулли определяет силу тяжести почти в тех же выражениях, что и Галилей, говоря, что она «ускоряет» тела, падающие, поднимающимся же телам противодействует и их движение замедляет. Затем И. Бернулли делает шаг вперед по сравнению с Галилеем и даже Вариньоном: он вводит специальный символ ускорения силы тяжести g, умножает это на величину массы тела и получает его вес: «Пусть g будет силой тяжести, т.е. естественным ускорением, которым тяжелые тела одушевляются для вертикального падения. Отсюда, если A и B обозначают массы тел, то их абсолютные веса должны быть выражены через gA и gB»[5].

Любопытно, что Д. Бернулли в ранней публикации в «Комментариях Петербургской академии наук» (1728г.), записав дифференциальное уравнение движения тяжелой точки в форме $dv = pdt$ назвал это соотношение принципом Галилея [6, p.130].

Остановимся на методе численного определения ускорения силы тяжести, предложенном Галилеем. В «Четвертом дне» поставлен вопрос: «необходимо найти меру скорости такую, которая была бы для всех понятной, приемлемой и одинаковой в различных случаях». Речь идет не о самой скорости, ибо она не может быть одинаковой для всех тел, а о величине, характеризующей возрастание скорости падающего тела (ускорении), так как именно эта искомая величина остается неизменной для «естественно падающих тяжелых тел, у коих *возрастание скорости* (курсив наш – авт.) во всех частях света происходит в одинаковой степени, которая приобретается, для примера, свинцовым шаром, весом в один фунт, вышедшим из состояния покоя и падающим вертикально с определенной высоты, сохраняется подходящею для выражения величины импульса, который получается при естественном падении» [1, с. 320].

Ответ Галилея на поставленный вопрос таков: искомой мерой «импульса тела к падению» (земного ускорения) будет конечная скорость падения тяжелого тела (единичной массы) к концу **определенного** промежутка времени. Эта величина равна удвоенной высоте падения грузика из состояния покоя к концу означенного промежутка времени (лучше всего, если этот промежуток времени принят за единицу). Об этом результате Галилей говорит: «это есть главный пункт во всем трактуемом вопросе» [Там же, с.321].

Придадим алгебраическую форму записи этого рассуждения Галилея. Обозначим через H- высоту падения грузика из состояния покоя за первую секунду времени, Δv - скорость, приобретенная грузиком за это время, g – ускорение силы тяжести или «момент» («импульс») скорости; формула Галилея принимает вид:

$$g = 2H, \quad \Delta t = 1.$$

Такой способ определения численной величины ускорения силы тяжести продержался до XIX в., при этом часто делались ссылки на Галилея. Х. Гюйгенс в трактате «Маятниковые часы» нашел численное значение длины секундного маятника: в переводе на современные размерности это дает 99, 45 см. При этом Гюйгенс, как промежуточный результат, получил численную величину высоты падения тяжелой точки за первую секунду: 489,9 см [7, с. 202]. Если по правилу Галилея удвоить эту высоту, то получим численную величину земного ускорения: 979,9 см; тогда еще не осмеливались относить футы (и др. меры длины) к величинам других размерностей, например, к секундам или их квадратам.

Позже Эйлер пересчитал эту величину методом Галилея, получив 31,25 рейнских фута [8, с. 202]. Эта величина земного ускорения падения, вычисленная Эйлером, того же порядка, что и принятое современное приближение - 9,8 м/сек².

Правило Галилея проникло в обиход механиков XVIII в. Вот как описывает и использует правило Галилея для нахождения численной величины земного ускорения Лагранж: «Допустим, что для каждой ускоряющей силы (фактически ускорения – авт.) известна скорость, какую она способна сообщить в течение определенного промежутка времени, который мы примем в качестве единицы времени, движущемуся телу, действуя на него все время одинаковым образом, и будем измерять ускоряющую силу именно с помощью этой самой скорости; последняя же в свою очередь должна измеряться тем пространством, которое движущееся тело прошло бы в течение такого же времени, если бы оно продолжало двигаться равномерно; на основании теорем Галилея известно, что это пространство всегда вдвое больше пространства, фактически проходимого телом под постоянным действием ускоряющей силы» [9, с. 322]. И далее Лагранж, развивая мысль Галилея, предлагает выбрать в качестве эталонной меры ускорений «ускоряющую силу» тяжести Земли и относить все другие ускорения (теперь такое отношение называют перегрузкой). Определяя заново численное значение «ускоряющей силы», принимаемой за эталонную или единичную (т.е. земного ускорения), Лагранж получает 30,098 парижских фута, что переводится в 9,8 м (в сек²).

Таким образом, вслед за Ньютоном, Вариньоном, Бернулли мы утверждаем, что в трудах Галилея уже функционировали понятия ускорения точки и силы, законы инерции, ускоряющих сил, суперпозиции движений.

Библиографический список

1. *Галилей, Г.* Избранные труды [Текст] / Г. Галилей / Т.1-2.
2. *Тюлина, И.А.* К учению Галилея о движении тяжелых тел [Текст] / И.А. Тюлина, В.Н. Чиненова / Исследования по истории физики и механики. М.: Наука. 1988. С. 144-161.
3. *Ньютон, И.* Математические начала натуральной философии [Текст] / И. Ньютон / М.: Наука. 1989.
4. *Varignon, P.* Courbe de projection [Текст] / P. Varignon / Ḿem. de math. et de phys. de l'Academie Royale des sci. de Paris. 1709. T. II. P.100.
5. *Бернулли, И.* Избранные сочинения по механике [Текст] / И. Бернулли / М.-Л.: ГТТИ. 1934. С.222
6. *Bernoulli, D.* Examen principiorum mechanicae [Текст] / D. Bernoulli / Comment. Petersb. Acad. des sci.. 1728. T.I. P.130.
7. *Гюйгенс, Х.* Три мемуара по механике [Текст] / Х.Гюйгенс / М.: изд-во АН СССР. 1951.
8. *Эйлер, Л.* Основы динамики точки [Текст] / Л. Эйлер / М.-Л.: ОНТИ. 1938.
9. *Лагрангж, Ж.-Л.* Аналитическая механика [Текст] / *Ж.-Л. Лагрангж* / М.-Л.: ГОНТИ РРТИ СССР. 1950. Т. 1-2.

Математика Бухарского эмирата XVIII - XIX веков в «Маджмаʿ ал-аркаме» Мирзы Бадиʿ-дивана

М.Ш. Холов

История Средней Азии XVIII - начала XX веков мало изучена, поэтому исследование источников этого периода представляет огромный интерес не только для историков, но и для историков точных наук. Одним из редких и интересных источников рассматриваемого периода является рукопись «Маджмаʿ ал-аркам»[177] Мирзы Бадиʿ-дивана, крупного чиновника аппарата управления Бухарского эмирата. Данный труд являлся официальным руководством для чиновников канцелярии по ведению финансового и поземельно-податного учета. В сочинении излагаются основные принципы административного, финансового и налогового управления, правила составления реестров налоговых поступлений, расходных ведомостей, актов земельных и прочих пожалований и др. Поскольку чиновникам канцелярий, занимавшимся финансами государства, необходимо было знание математики и ряда других точных наук, автор сочинения приводит сведения по арифметике, алгебре, геометрии, астрономии, хронологии, метрологии, монетному делу и другим наукам.

«Маджмаʿ ал-аркам» представляет большую ценность для истории математики Средней Азии рассматриваемого периода. Математика занимает настолько большое место в сочинении (67,4%), что в некоторых каталогах это сочинение отнесено к разряду математических трактатов. В предисловии к сочинению отмечается необходимость «илм-и хисаб» («науки исчисления») в практической жизни людей. Сочинение состоит из пяти глав. Математике посвящены глава 3 «Об удвоении, раздвоении, сложении, вычитании, умножении, делении и прочем» (23б-45б лл.) и глава 4 «Определение площади. Дроби. Первоначальные сведения о получении неизвестных искомых арифметическим способом, а также законы алгебры и прочее» (45б-82а лл.) настоящего сочинения.

Арифметика.

Мусульманская арифметика состояла из теоретической («хисаб ан-назари») и практической арифметики («хисаб ал-амали»)[178]. В средневековых мусульманских сочинениях теоретическая арифметика включала такие разделы, как «Основные определения», «Учение об отдельном количестве», «Четные и нечетные, простые составные числа», «Совершенные и дружественные числа», «Фигурные числа», «Учение о «зависимом количестве», «Числовые отношения и пропорции» и др. В практической арифметике сначала давалась разъяснение способа изображения чисел с помощью индийских цифр. Затем обычно излагались правила действия над целыми числами, а потом учение о дробях и некоторые практические правила.

Удвоение и раздвоение.

Мусульманские математики на Востоке, а вслед за ними и в Европе применяли действия удвоения и раздвоения, введенные впервые ал-Хорезми. Удвоения и раздвоение были выделены особо, чтобы облегчить запоминание процедуры извлечения квадратного корня. Надо отметить, что математика стран ислама была в основном риторической, все ее

---

[177] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам. Рукопись Национальной библиотеки Таджикистана, №649.
[178] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. - С. 110.

предложения обычно записывались словами. Вот что о правиле удвоения приведено в «Маджмаʿ ал-аркаме»: «Из числа, подлежащего удвоению, удваивают первую цифру, из разряда, например единиц. Если, удвоенная, он будет меньше десятка или больше десятичной дроби, ее записывают. А что касается десятков, то принимая десять за один, двадцать - за два, тридцать - за три, замечают в уме. Если, удвоенная цифра не доходит до десятка, то утруждать себя в этом незачем. Затем, если имеются, удваивают десятки и к удвоенным прибавляют то, что замечалось в уме. Если эта сумма будет меньше десяти, ее пишут после того, как написали единицы, ибо она имеет степень десятков. В случае если единицы были замечены и их будет больше десятка, излишек записывают. А если их будет ровно по десяти, ни больше, ни меньше, то каждый десяток, заметив за единицу, так же как и остальные десятки данного числа, держат в уме и смотрят на последующую степень, и так поступают до тех пор, пока число не исчерпается»[179]. Далее приводятся примеры по удвоению. О раздвоении автор пишет следующее: «Краткое определение раздвоения таково: из числа вычитают его половину. А подробное описание следующее. В противоположность удвоению деление пополам надо начинать с больших чисел»[180] и далее приводится несколько примеров.

Сложение.

В мусульманской математике при сложении числа записывались одно под другим, причем поразрядно. Складывались последовательно цифры каждого разряда, начиная с наивысшего. Результат записывался на месте соответствующей цифры в верхнем слагаемом. Если результат оказывался равным или большим десяти, то вверху ставился, соответственно, ноль или избыток над десятью, а единица прибавлялась к соседнему разряду:[181]

5482	6082	6132	6136
654	654	654	654

В сочинении об этой операции автор пишет следующее: «Краткое определение сложения таково: большое или малое число прибавляется к другому числу. А подробное изложение следующее. Если желают узнать общее количество нескольких многозначных чисел, то сначала должно сложить единицы. Если единиц меньше десятка, их записывают полностью, а если больше, то записывают только излишек. Полученные от сложения единиц десятки после написания излишка прибавляют к десяткам данного числа. И так поступают до тех пор, пока сложение не окончится»[182].

Вычитание.

Вычитание проводилось аналогично сложению:[183]

65274	63274	62874	62814	62812
2462	2462	2462	2462	2462

В сочинении вычитанию отведено большое количество страниц (лл.26б-30б) и приведено множество практических примеров. Приведем одну из них: «Если поступления [казны] состоят из различных товаров, причем у одних товаров расходы меньше дохода, у других - больше, в таких случаях [в реестрах] вместо слова «окончание» пишут слова

---

[179] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 24а-24б.
[180] Там же, л. 25а.
[181] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. - С. 140.
[182] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 25а-25б.
[183] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. - С. 140.

«заполнено, превышено». Сейчас [это] будет изложено подробнее, и расчеты будут совершаться со стоимостями товаров. Если поступления превышают издержки [исчисления производятся] в таком виде:

Доход:	1723
Издержки:	1499
Остаток:	224

[Для проверки] нужно к девяти [единицам] издержек прибавить четыре [единицы] остатка; получилось тринадцать единиц. Три записываем в доход, а десять как один [десяток] прибавляем к девяти десяткам издержек и добавляем два [десятка] остатка; получилось двенадцать. Два записываем в раздел десятков дохода, а десять как одну [сотню] прибавляем к четырем [сотням] издержек и добавляем две сотни остатка. Получилось [семь] сотен в доходе. Одна тысяча издержек соответствует одной тысяче дохода; нужды в изменении нет. Итак, остаток составляет 224»[184].

Умножение.

Умножение в древнегреческой традиции определяется как повторение одного числа по количеству единиц другого. А в мусульманской математике описано несколько способов умножения. По способу действия с помощью «доски и пыли», которое применяется в примерах сочинения, числа располагались одно под другим так, чтобы первый разряд (т.е. единицы) множителя оказался под последним разрядом множимого. Последний разряд множимого умножался сначала на последний, а затем на остальные разряды множителя; результат помещался под нижними разрядами на продолжении верхних. Затем нижние разряды переносятся на один разряд вправо и производится умножение того разряда вверху, который оказался над первым нижним разрядом, на нижние разряды[185]:

324	21 324	225324	225924
753	753	753	753

Переносим нижние разряды на один разряд вправо

225924
753

и умножаем 2 последовательно на нижние разряды:

239924	240924	240964
753	753	753

Еще раз перенесем множитель на разряд вправо

240964
753

и умножим 4 на разряды внизу:

243764	243972
753	753

Итак, 324×753=243972.

[184] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 27а-27б.
[185] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. - С. 140.

В качестве примера в сочинении приводится таблица умножения в виде стихотворения на арабском языке, как сам автор отмечает «… для легкости его усвоения»[186].

Деление.

В мусульманской арифметике деление определялось как действие, обратное умножению, и имело несколько способов: по ан-Насави «разделение одного числа по количеству единиц другого», по ал-Коши «равночисленное разложение делимого по единицам делителя для определения доли каждой единицы делителя» и др.[187] В сочинении приводится много примеров деления. Приводим одну из них: «мы хотим число 85215 разделить на число 345. Если большое число, а именно 300, соотнесем к каждой цифре делителя, то делимое будет превышено. Обратились к меньшему числу 200 и соотнесли его к каждой цифре [делителя]. От большого числа делителя получили 60 тысяч. К десяткам делителя также соотнесли 200; получилось 8000. Затем соотнесли 200 к единицам делителя; получилось 1000. Сумма составила 69 тысяч. Возвратились к большей цифре делителя; соотнесли 40; получилось 12 тысяч. Затем к каждому десятке делителя соотнесли 40; получилось 1600. После этого 40 соотнесли к каждой единице делителя; получилось 200. Общая сумма составила 13800. Опять вернулись к большой цифре делителя, а именно к 300; соотнесли сем; получилось 2100. К десяткам делителя, которых четыре, также соотнесли семь; получилось 280. К каждой единице делителя, которых пять, также соотнесли семь, получилось 35. Общая сумма составила 2415. Сумма этих трех чисел соответствует делимому 85215»[188].

Извлечение корня.

Математики стран ислама при извлечении корней пользовались приемами, известными раньше в Индии и Китае[189]. Для этих целей применялась известная еще вавилонянам приближенная формула

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{a},$$

где a^2 - наибольший квадрат целого числа, содержащийся в N. Был также известен итерационный способ, ведущий начало от вавилонской математики и следующее приближение от ал-Хиссара и ал-Каласади: $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$.

Также пользовались методом, основанным на разложении квадрата двучлена:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Правило извлечения корней предусматривало вычисление на счетной доске. Ан-Насави приводит другой способ извлечений квадратных и кубических корней, который основан на использовании упрощенной схемы вычислений и сейчас называется «схемой Руффини-Горнера». Извлечение корня n-й степени этим способом встречается в работах Абулвафа ал-Бузаджани, Омара Хайяма, ат-Туси, ал-Коши, ал-Кушчи, ал-Марвази и других. При приближенном извлечении корней с более высоким показателем применяли формулу:

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n},$$

или формулу бинома Ньютона в следующем виде:

$$(a + b)^n - b^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots .$$

---

[186] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, л. 42б.

[187] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. - С. 142.

[188] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 44б-45а.

[189] Г.П. Матвиевская. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. - С.145-151.

В сочинении извлечению корней удается большое внимание (лл. 57б-61а) и разъясняется несколько способов извлечения квадратного корня из целых чисел и дробей Так, примерами показаны следующие способы: извлечение корней с составным числом (с таблицей и без); невыразимых корней; корня из целого числа; с дробью; с квадратным числом, корень которого дробный и т.д. Приведем пример извлечения кубического корня. «Мы вознамерились извлечь кубический корень из числа 80621568. Для удобства получения искомого числа чертят таблицу по количеству цифр кубического числа.

		4		3			2	
Линия кубического числа	8	0	6	2	1	5	6	8
	4	6	3	4	4	1		
	1	1	1	1				
Линия квадратов	1	6	8	6	9	7	8	4
	3	2	3	1	8	1		
	4	8	1	6	7	4		
		4	3	1	4	2		
		5	5	5	1			
			5		7			
Линия сторон	1	4	1	2	3	2	9	2
		8			6			
		2			9			
					1			

Самым большим неразложимым числом, подходящим для решения задачи, является 4. Написав 4 над последней [верхней] чертой, подобное ей [число] записали под линией сторон. [Их] произведение написали под линией квадратов и, умножив верхнюю 4 на число, записанное также под линией квадратов, отбрасываем это произведение из числа, которое было написано на линии кубического числа. Затем поставленную при действии выше верхнюю 4 прибавили к нижней 4, ранее написанной; это составит число 8. Затем верхняя 4 умножается на упомянутую 8. Написав результат соответственно на черте квадратов, рядом записывают предыдущее произведение. Их складывают, сумму записывают под разделяющей чертой и непосредственно заносят в таблицу перед ними. Затем прибавляют верхнюю 4, чтобы получилось 12; цифру 12 заносят в таблицу через один промежуток и помещают над цифрой, стоящем рядом с записанной. Наибольшее неразложимое число, соответствующее [12], есть три. Эта цифра записывается в таблицу напротив, на линии сторон. 3 надо умножить на каждую цифру линии сторон, а произведение записать напротив, на линии квадратов. После этого упомянутая 3 умножается на общую сумму, записанную на линии квадратов, а произведение вычитается из [числа] на линии чисел, и так до тех пор, пока [число] не исчерпается»[190].

Автор не только излагает материал, содержащийся в математических трактатах, но пытается также «критически» истолковать его, нередко подвергая сомнению отдельные положения. Так, он не согласен с существующим правилом извлечения корней из дробных чисел: «[Извлечение] квадратного корня из дробного числа в трактатах по счету излагают так. Из требуемой части (числитель дроби) извлекают корень; извлекают корень также из знаменателя. [Первый] корень относят к корню упомянутого знаменателя. Однако такое действие не удовлетворило [меня], ничтожного и неопытного. [Мне] ничтожному стало очевидно лишь то, что знаменатель изменять не надо; [первый] корень числа следует

[190] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 60а-60б.

соотнести [непосредственно] к знаменателю. Например, по моему мнению, корень числа ест число . Но, исходя из трактатов, [должно] получится ».

Алгебра.

Раздел сочинения, касающиеся алгебры, начинается с изложения двадцати одного довода (асас), на которых автор основывает теорию линейных и квадратных уравнений (лл. 61а-64б). Эта теория применяется на многочисленных примерах раздела наследства.

Геометрия.

Сведения по геометрии заключает в себе ряд правил, в основном верных, для вычисления площадей треугольников, четырехугольников, поверхностей и объемов шара, цилиндра, конуса (лл. 45б-50а). Поскольку вычисление площадей треугольников и четырехугольников приводится в основном в целях измерения земельных площадей, то в некоторых случаях автор приводит лишь приближенный результат. Например, он приводит такое определение площади четырехугольника: «Сложив западную и восточную его стороны и разделив пополам, умножают на половину суммы южной и северной сторон».[191]

Термины «площадь» и «объем» не дифференцированы; оба понятия передаются одним словом - «мисахат». Поэтому определить, в каком значении слово употреблено, можно только по контексту.

Автор не указывает, откуда он заимствовал материал по математике, однако по традиционности изложения «Маджмаʿ ал-аркам» примыкает к математическим трудам ал-Хорезми (783-850), ал-Бузаджани (940-998), Насириддина Туси (1201-1274), Гиясиддина Коши (1380-1429), Алоуддина Кушчи (1403-1474), Бахауддина Амили (1546-1621) и других таджикских ученых.

Библиографический список

1. *Мирза Бадиʿ-диван*. Маджмаʿ ал-аркам. [Текст] / Рукопись Национальной библиотеки Таджикистана, №649 - Душанбе.
2. *Матвиевская, Г.П.* Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. [текст] / Г.П.Матвиевская / М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. - 344 с.

А. В. Васильев и Петроградское физико-математическое общество

Ю.Ю. Царицанская

История Санкт-Петербургского математического общества берет свое начало в 1890 году. Инициатива его создания принадлежала В. Г. Имшенецкому (1832-1892), который был избран председателем учредительного собрания общества, состоявшегося 20 октября 1890 г. на квартире В. И. и П. А. Шифф. На заседании присутствовали: академики О. А. Баклунд, А. А. Марков, профессора Ю. В. Сохоцкий, Н. А. Забудский, а также В. В. Витковский, Д. А. Граве, И. И. Иванов, И. А. Клейбер, Н. П. Коломейцев, И. В. Мещерский, П. М. Новиков, И. Л. Пташицкий, Д. Ф. Селиванов, В. И. Станевич. Профессора К. А. Поссе, А. Н. Коркин, Д. К. Бобылев и А. М. Жданов письменно известили о своем согласии войти в число членов-учредителей общества [1].

[191] Мирза Бадиʿ-диван. Маджмаʿ ал-аркам, лл. 46а.

В. Г. Имшенецкий был избран председателем созданного общества, Ю. В. Сохоцкий – товарищем председателя, а П. А. Шифф – секретарем. На заседаниях общества предполагалось заслушивать доклады по чистой математике, теоретической механике, теоретической астрономии и математической физике. Для вступления в общество необходимо было иметь рекомендацию одного или двух его членов и быть избранным большинством голосов.

В период 1890-1899 гг. Общество проводило регулярные заседания, число его членов росло год от года. Почетным членом Общества в 1893 г. был избран П. Л. Чебышев, а в 1894 г. действительным членом Общества был избран Г. Миттаг-Леффлер. Кроме того, иностранным членом общества состоял польский математик и историк математики С. Дикштейн.

Члены общества делали доклады по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, алгебре, теории чисел, механике, геометрии и другим разделам математики. Наиболее активное участие в деятельности общества принимали Д. А. Граве, Н. Я. Сонин, Ю. В. Сохоцкий, П. А. Шифф, Б. М. Коялович, А. А. Марков, Н. Б. Делоне, И. В. Мещерский, Д. К. Бобылев, О. А. Баклунд.

В период после 1900 г. деятельность Общества замерла: число членов общества сокращалось, заседания собирались все реже, и, по всей вероятности, общество прекратило существование в 1905 г.

В тот же период в Петербурге (впоследствии, Петрограде) жил и работал известный математик и общественный деятель А. В. Васильев[192] (1853-1929). А. В. Васильев родился в Казани в семье выдающегося китаеведа, профессора Казанского университета В. П. Васильева. В связи с переводом восточного факультета в Петербургский университет семья Васильевых в 1855 году переехала в столицу. Здесь А. В. Васильев провел детство и студенческие годы, окончив в 1874 году со степенью кандидата физико-математический факультет Петербургского университета.

Преподавательскую деятельность он начал в Казанском университете, где в 1880 году защитил магистерскую диссертацию «О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими», а в 1884 году – докторскую диссертацию «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений».

Тогда же, в 1884 году он был избран председателем физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей (впоследствии преобразованной в Казанское физико-математическое общество). По инициативе А. В. Васильева в 1883-1886 годах было издано полное собрание геометрических сочинений Лобачевского в двух томах (с предисловием А. В. Васильева к обоим томам). В 1893 году Казанское физико-математическое общество стало центром организации празднований по случаю столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского. Мировое научное сообщество с большим интересом откликнулось на это событие: речь, произнесенная А. В. Васильевым на торжественном заседании Казанского университета 22 октября 1893 г., была переведена на немецкий, французский, английский, испанский и чешский языки. А. В. Васильев стал инициатором денежной подписки для увековечения памяти великого геометра, а его обширные международные связи позволили придать этой идее грандиозный размах. Был организован так называемый комитет Лобачевского, почетными членами которого стали Э. Бельтрами, Г. Гельмгольц, Ж. Дарбу, Ф. Клейн, Л. Кремона, А. Кэли, С. Ли, А. Пуанкаре, Дж. Сильвестр, П. Л. Чебышев, Ш. Эрмит. На собранные в результате подписки деньги в 1896 году был торжественно открыт памятник Н. И. Лобачевскому (честь открытия завесы была предоставлена А. В. Васильеву), а также учреждена международная премия за лучшие исследования в области геометрии. Одними из первых лауреатов премии стали С. Ли, Д. Гильберт, Ф. Шур, Г. Вейль и др.

---

[192] Подробнее о его биографии см. [2, 3].

В тот же период А. В. Васильев начинает принимать участие в жизни Санкт-Петербургского математического общества: в протоколах Санкт-Петербургского математического общества отмечено прочтение на заседании в 1893 г. письма А. В. Васильева «О чествовании памяти Н. И. Лобачевского по случаю столетия годовщины его рождения», зафиксирован факт выступления А. В. Васильева с докладом «Перевод мемуаров: Гельмгольца – Счет и измерение и Кронекера – Понятие о числе» (эти переводы, сделанные А. В. Васильевым, были опубликованы в Известиях Казанского физико-математического общества в 1892 и 1893 гг.) [4]. В ноябре 1895 г. по рекомендации Д. К. Бобылева А. В. Васильев был принят в члены общества.

В 1906 году в связи с избранием в Первую Государственную Думу от Казанской губернии, а затем в 1907 году – в Государственный Совет, А. В. Васильев переезжает в Петербург. Здесь он преподает в Петербургском университете, в Педагогической академии, на Высших женских (бестужевских) курсах.

Работая в Петербурге, А. В. Васильев продолжает практически ежегодно ездить за границу, принимая активное участие в научной жизни Европы: посещает съезды немецких естествоиспытатей, международные конгрессы по математике (в частности, в 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме его избирают одним из вице-президентов), международные философские конгрессы, и др.

В июне 1919 года А. В. Васильев становится профессором по кафедре математики в Педагогическом институте, открытом при Петроградском университете, а вскоре после этого – деканом физико-математического факультета института. С 1 декабря 1919 года А. В. Васильев также является заведующим математическим кабинетом Педагогического Института [5].

В 1920 году по инициативе А. В. Васильева на базе математического кабинета, изначально в форме математического кружка, начинает работу Петроградское физико-математическое общество.

Заседания кружка начались 20 марта 1920 года [6]. На первом заседании после приветственной речи председателя кружка А. В. Васильева выступил Ю. А. Крутков с докладом «О квантовой теории». На втором заседании 15 мая выступал Я. В. Успенский с докладом о курсе неевклидовой геометрии, читаемом им в Университете. На этом заседании присутствовал известный английский математик и философ Б. Рассел, который был в Петербурге проездом с английской рабочей делегацией. Судя по всему, эта встреча оказалась плодотворной: впоследствии Б. Рассел снабдил своим предисловием английское издание книги А. В. Васильева «Пространство, время, движение» (1924).

Третье заседание прошло 22 мая, когда В. К. Фредерикс представил собравшимся доклад, посвященный основаниям теории относительности. Он же на четвертом заседании (6 ноября 1920 года) сделал сообщение об одной книге Г. Вейля (по-видимому, речь могла идти о книге «Das Kontinuum» (1918)).

На одном из заседаний П. М. Горшков сделал доклад о разъяснении, данном А. Эйнштейном относительно движения перигелия Меркурия, также обратил внимание на гипотезу Х. Зелигера[193], которая объясняет эти движения через влияние зодиакального света. Кроме того, Н. А. Булгаков в своем докладе познакомил слушателей с теорией Г. Ми[194], затрагивающей вопросы теории поля и атомной физики.

Еще одно заседание (23 ноября 1920 года) было посвящено памяти Е. С. Федорова. В ходе этого заседания профессор В. В. Никитин описал интересный жизненный путь Е. С. Федорова. Профессора А. К. Болдырев и С. А. Богомолов посвятили свои доклады научным заслугам знаменитого ученого: во-первых – в кристаллографии и кристаллохимии, и во-вторых – в высшей геометрии, которую Е. С. Федоров обогатил своими идеями. На том же заседании были сделаны доклады о новых достижениях в теории строения атомов

[193] Хуго фон Зелигер (1849-1924) – немецкий астроном, специалист по звёздной астрономии, астрофизике и небесной механике.
[194] Густав Адольф Феодор Вильгельм Людвиг Ми (1869-1957) — немецкий физик.

(профессор Л. А. Чугаев), в авиации (К. Б. Меликос), а также заслушан реферат о специальных математических работах, которые появились в 42 томе журнала Acta Mathematica (Я. Д. Тамаркин, А. С. Безикович, Г. М. Фихтенгольц). Кроме того, был представлен также реферат о важнейших работах Т. Леви-Чивита и задаче трех тел.

На нескольких заседаниях профессора Я. В. Успенский, Е. Л. Николаи, Н. М. Гюнтер, А. А. Саткевич рассказывали о своих исследованиях в области чистой и прикладной математики.

Наконец, три заседания были посвящены вопросам истории культуры в связи с историей математики (Н. Я. Перн – «Новый метод изучения истории культуры», Д. П. Цинзерлинг – «Математика у древних египтян», В. Г. Богораз – «Развитие понятия о числе»).

Почти все эти заседания собирали многочисленных слушателей и некоторые, особенно многолюдные, проходили в большой аудитории физического института.

14 мая 1921 г. на 21 заседании Математического Кабинета Педагогического Института Петроградского университета состоялась окончательная организация физико-математического общества [7]. Наряду с главной задачей общества, заключавшейся в содействии научному общению между всеми лицами, кто интересующимися математикой и естествознанием, было обозначено также педагогическое направление деятельности общества (развитие взаимодействия петроградских математиков с высшей школой и, в особенности, университетом), и организована студенческая секция, целью которой должно служить пробуждение интереса студентов к самостоятельной научной работе.

В письме к академику П. П. Лазареву 15 мая 1921 г. А. В. Васильев писал: «Вчера Петроградское физико-математическое общество организовалось, т. е. выбран президиум (товарищи мои как председателя – Я. В. Успенский и Ю. А. Крутков, ученый секретарь – В. К. Фредерикс) и начинает свою деятельность 25 мая, ...» (цит. по [1]).

Вновь организованное общество начало свою деятельность с двух заседаний – 25 и 26 мая. На первом заседании А. В. Васильев сделал доклад «Геометрия мира», а академик П. П. Лазарев – «Ионная теория реакций». На заседании 26 мая также было сделано два доклада: А. В. Васильев рассказал о своей работе над историей математики в России, А. С. Безикович сделал доклад по теории вероятностей, по тематике, связанной с работами П. Л. Чебышева.

Одной из первоочередных задач Общества было восстановление и укрепление научных связей с Московским Математическим обществом. На развитие связей между московскими и петербургскими математиками существенно повлиял приезд в Петербург группы московских математиков для участия в конференции, проводимой Академией наук в честь 100-летия со дня рождения П. Л. Чебышева, позволивший провести ряд совместных заседаний. По этому поводу А. В. Васильев писал академику П. П. Лазареву: «… Как я рад прекрасному ходу нашего Московско-Петроградского математического общества. … Какое горячее и сердечное участие во всем этом приняли Вы!» (цит. по [1]). Математики Москвы с готовностью поддержали инициативу петербуржцев – 1 октября 1921 г. Б. К. Млодзеевский, исполняя обязанности президента Московского Математического общества, писал А. В. Васильеву: «прошу Вас принять выражение глубокого к Вам уважения и вместе с тем истинного удовольствия, что члены нашего общества могли принять участие в трудах нашего молодого собрата – Петроградского Физико-Математического общества» [8].

В течение первых двух лет существования общества на его заседаниях звучали доклады по теории чисел (Я. В. Успенский, Н. Б. Делоне), теории функций действительного переменного (А. С. Безикович), теории дифференциальных уравнений (Б. М. Коялович), а также систем дифференциальных уравнений (Н. М. Гюнтер), теории автоморфных функций (В. И. Смирнов), гидродинамике (А. А. Фридман), и др.

Специальное заседание в 1922 году было посвящено Д. Гильберту, по этому случаю председатель общества А. В. Васильев произнес речь «Гаусс, Гельмгольц, Гильберт», в которой охарактеризовал влияние этих великих немецких ученых на развитие математики в XIX в.

В феврале 1923 года прошло заседание, посвященное памяти А. А. Маркова, скончавшегося 20 июля 1922 г. Вступительное слово произнесли А. В. Васильев и В. А. Стеклов, а затем Я. В. Успенский, Н. М. Гюнтер, А. С. Безикович выступили с докладами о работах А. А. Маркова в области теории чисел, теории вероятностей, теории непрерывных дробей, теории дифференциальных уравнений.

В 1923 г. после отъезда А. В. Васильева в Москву новым председателем общества стал Н. М. Гюнтер (по-видимому, с осени 1923 г.). В 1925 г. по случаю празднования 50-летия педагогической деятельности А. В. Васильева Ленинградское физико-математическое общество направляет А. В. Васильеву приветственный адрес, подписанный председателем Н. М. Гюнтером и секретарем А. Ф. Гавриловым, в котором пишет: «Вы вдохнули жизнь в наше Ленинградское физико-математическое общество – забытое в течение многих лет. В нас живет память о трудах Ваших по организации – почти вновь – общества и председательствованию в нем.» (письмо от 26 января 1925 г., цит. по [9]).

Анализируя предпосылки, с которыми было связано произошедшее в 1920-1921 гг. возобновление работы Петроградского физико-математического общества после долгого перерыва в деятельности, можно отметить, что центральное место в этом процессе занимала фигура А. В. Васильева. К тому времени он имел достаточный авторитет в российском и европейском научном мире, был известен своей активной общественно-научной работой, а также имел опыт организации деятельности Казанского физико-математического общества. Кроме того, Математический кабинет Педагогического института при Петроградском университете, руководителем которого был А. В. Васильев, стал подходящей базой для возобновления заседаний общества. И, наконец, самым важным фактором стало тяготение петербургского научного сообщества к объединению, которое не могло не иметь места в тот сложнейший для российского научного мира период.

Библиографический список

1. *Ермолаева, Н. С.* Из истории Санкт-Петербургского и Петроградского математических обществ [Текст] / Н. С. Ермолаева / Труды Ленинградского математического общества. 1993, т. 2, с. 309-322
2. *Царицанская, Ю. Ю.* Творческая биография А. В. Васильева [Текст] / Ю. Ю. Царицанская / Труды XI Международных Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013
3. *Бажанов, В. А.* Профессор А. В. Васильев. Ученый, организатор науки, общественный деятель [Текст] / В. А. Бажанов / Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 7(42). М.: Янус-К, 2002, стр. 120-149
4. Протоколы С.-Петербургского математического общества [Текст] СПб., 1899. 132 с.
5. ЦГА [Текст] /СПб. Ф. Р-2856
6. *Wassiliew, A.* Die Tätigkeit der Petrograder Physico-Mathematischen Gesellschaft während des ersten Halbjahres 1921 [Текст] / A. Wassiliew / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 31, s. 53-55
7. *Wassiliew, A.* Die Tätigkeit der Petrograder Physico-Mathematischen Gesellschaft in den Jahren 1921-1923 [Текст] / A. Wassiliew / Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 33, s. 35-36
8. ОРКиР НБ МГУ. Ф. 25
9. *Крушинская, А.А.* Очерк жизни заслуженного профессора Казанского университета Александра Васильевича Васильева [Текст] / А.А. Крушинская / Личный архив Н. Л. Крушинской.

Глава 5

Теория и методика обучения математике в школе

Задачи исследовательского характера для развития профессиональных качеств математика

В.Н. Алексеев

В настоящее время наблюдается катастрофическое снижение уровня математической (и не только) подготовки выпускников во всех образовательных учреждениях. Процесс понижения уровня математической культуры затронул и педагогические кадры. Для подтверждения этого положения достаточно заглянуть в издаваемые сегодня пособия и/или другие публикации. Даже в изданиях школьного уровня авторы допускают ошибки, свидетельствующие о поверхностности их знаний в соответствующей области математики. Об официальных пособиях по математике, выпущенных под эгидой ФИПИ и МИОО и предназначенных для подготовки к ЕГЭ, с такими ошибками можно прочитать, например, в работе [1]. В качестве яркого образчика "публикации ради публикации" по информатике можно привести работу [2]. Из статьи понятно, что сами "писатели" не занимались программированием – вот и писали бы статьи по "абстрактной методике".

На наш взгляд важнейшей причиной утраты традиций математического образования является резкое сокращение объема часов по дисциплинам математического цикла по сравнению с учебными планами подготовки специалистов. Хорошо развитой способностью к абстрактному мышлению и обобщению рассматриваемых ситуаций обладает малая часть обучаемых. Большинство же овладевает понятиями, операциями и иными математическими объектами только в процессе практической работы (деятельностный подход). Временные рамки дисциплин сегодняшних учебных планов и объем материала не оставляют места для надежного закрепления. Смещение центра тяжести в область самостоятельного освоения материала – "мифический" прием компетентностного подхода. Сжатые временные рамки учебных дисциплин порождают еще одну проблему – студенты не получают образцов грамотных доказательных рассуждений. Свою лепту в ослабление математической составляющей вносит и чрезмерное увлечение некоторых преподавателей информационными технологиями, а также "чтение лекций" по бумажкам.

В такой ситуации одной из мер ослабления негативных воздействий на качество обучения (в том числе и со стороны министерства образования) является кропотливая индивидуальная работа с заинтересованными (мотивированными на обучение) и/или одаренными учащимися. И здесь наиболее подходящим классом задач являются задачи исследовательского характера. На таких задачах можно развивать профессиональные качества математика, проследить и обсудить все нюансы доказательных рассуждений. Здесь можно пополнить тот багаж личного опыта построения доказательств, который необходим каждому математику. Причем исследовательские задачи могут быть построены как на известном материале, так и связаны с получением совершенно новых результатов.

В [3] приведены темы исследовательского плана, которые могут использоваться как в работе со школьниками, так и для более углубленного изучения студентами. Результаты работ [4] и [5] являются новыми для классической геометрии, но для своего получения не требуют слишком изощренной техники и, потому, являются очень привлекательными для организации самостоятельных исследований (тем более что можно поставить целый ряд новых попутно возникающих проблем). К примеру, сформулируем пару интересных задач, которые могут послужить темой коллективного исследования на занятии математического кружка или факультатива.

Задача 1. Выяснить, для всех ли треугольников существует треугольник, построенный из отрезков, два из которых равны более длинным сторонам исходного треугольника, а третий равен удвоенной кратчайшей стороне исходного? Получить аналитическое описание во множестве классов подобия треугольников.

Задача 2. Выяснить, для всех ли треугольников существует треугольник, построенный из отрезков, два из которых равны более коротким сторонам исходного треугольника, а третий равен половине длиннейшей стороны исходного? Получить аналитическое описание во множестве классов подобия треугольников.

Результаты исследования этих задач (которое откроет много попутно возникающих вопросов) несколько напоминают ситуацию с медианным и высотным сопряжением.

В данной статье мы собираемся предложить (с кратким обсуждением) тему исследования, которая может быть реализована в виде курсовой работы, или в виде выпускной (с расширением границ исследования).

Все знают, что графический способ представления функции позволяет визуализировать различные свойства функции. Но в случае, когда область определения функции не ограничена, мы вынуждены довольствоваться изображением некоторой части графика. Рассмотрим способ, который даст возможность "увидеть весь график".

Для этого установим биективное соответствие между числовой прямой и половиной окружности радиуса 1, касающейся оси в точке 0 (рисунок 1). Соответствие устанавливается с помощью центральной проекции из центра окружности.

Рис. 1.

Если t - длина дуги, отсчитываемой от 0, то аналитическое описание этой биекции очевидно: $x = \operatorname{tg} t$, а $t = \operatorname{arctg} x$. "Разогнув" дугу окружности в отрезок, мы получим ограниченный образ всей числовой прямой. А если мы добавим концевые точки дуги, обозначив их $+\infty$ (правый конец) и $-\infty$ (левый конец), то получим компакт. Если теперь взять (как обычно) две таких компактных числовых "прямых", перпендикулярных друг другу и с совмещенным началом отсчета, то мы получим компактное изображение всей числовой плоскости в виде квадрата со стороной длины π. Обозначим координаты на этой "компактной плоскости" u (абсцисса) и v (ордината). Тогда графику явно заданной функции $y = f(x)$ на плоскости uOv соответствует параметрически заданная кривая $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x, \\ v = \operatorname{arctg} f(x); \end{cases}$ $x \in D(f)$. Здесь нужно применить знания о дифференцировании параметрически заданных функций, для исследования формы графика функции на "компактной плоскости" (исследование на монотонность и экстремум, а также на выпуклость и перегиб). Например, для функции $y = x^2$ точка минимума (0;0) и точки перегиба $\left(-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. Можно при наличии интересующихся программированием студентов написать соответствующую программу для построения графиков. Тогда для рассмотренной функции мы увидим примерно такой результат (рисунок 2).

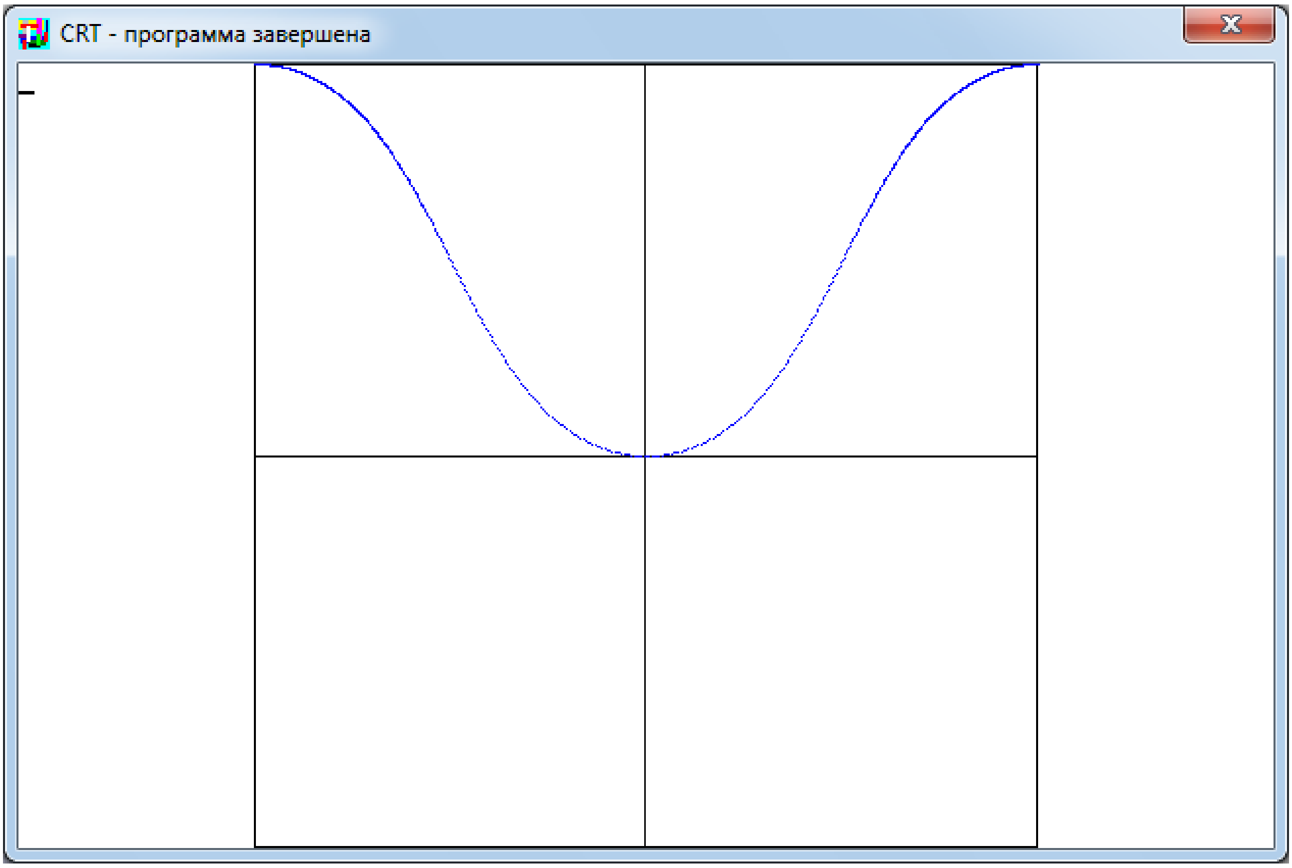


Рис. 2. График квадратичной функции на компактифицированной плоскости.

Далее легко получить способ построения графиков параметрически заданных в исходной плоскости функций. Но тогда (учитывая связь полярных и декартовых координат со стандартным совмещением) можно легко строить и графики функций, изначально определенных для полярной системы координат. На рисунке 3 приведен пример графика функции $\rho = 2 + 3\sin 5x$.

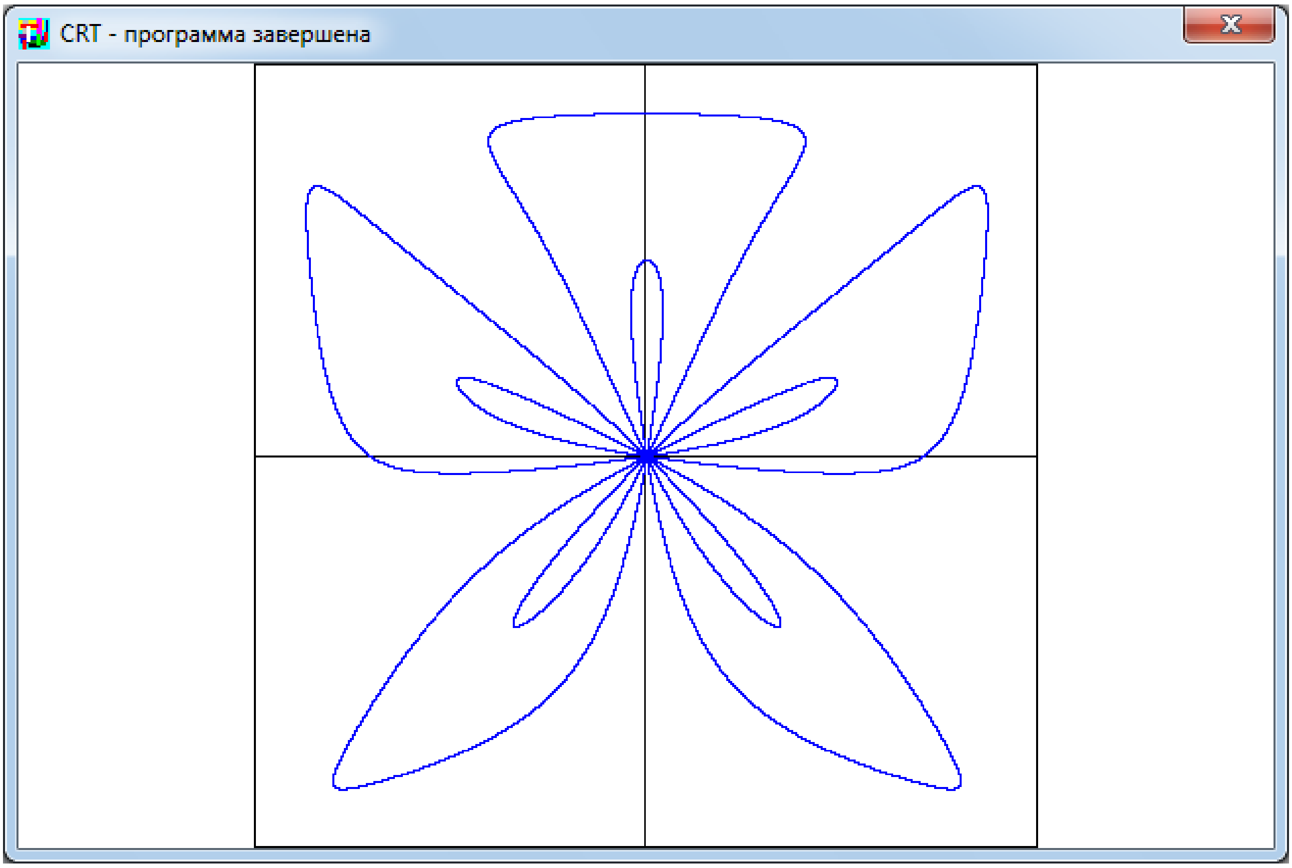


Рис. 3.

Используя возможность построения таких графиков, студенты могут легче осознать, например, отсутствие предела в бесконечности у $\sin x$, дробной части и так далее. Интересно, например, что график функции $y = \frac{1}{x}$ изображается в "компактной плоскости" в виде двух отрезков (нужно провести полное исследование). В качестве развития этой темы можно рассмотреть еще один способ компактификации числовой прямой за счет добавления одной бесконечной точки без знака в виде полной окружности. Тогда, если брать две таких оси, то числовая плоскость будет представлена поверхностью тора (бублика). Если брать оси с различными способами компактификации, то получатся цилиндрические поверхности. Можно предложить изготовить соответствующие модели с нанесением на них графиков различных функций.

Библиографический список

1. *Алексеев, В.Н.* Готовимся к экзамену по математике / В.Н. Алексеев // Современные научные исследования. Выпуск 2. – Концепт. – 2013. – ART 45958. – URL: http://e-koncept.ru/2014/54958.htm – Гос.рег. Эл № ФС 77-49965. – ISSN 2304-120X.
2. *Дергачева, Л.М.* Решение задач по теме "циклический алгоритм" в школьном курсе информатики [Текст] / Л.М. Дергачева, О.Л. Баранова // Научно-практический журнал "Информатика в школе". – 2013. - № 7. – С. 44-55.
3. *Алексеев, В.Н.* Радость открытия [Текст]: пособие для учителей, школьников и студентов / В.Н. Алексеев, А.К. Алексеева. – Ишим: Изд-во ИГПИ им. П.П. Ершова, 2012. – 120 с.
4. Алексеев, В.Н. Обобщение продолжения теоремы Пифагора [Текст] / В.Н. Алексеев // Вестник Ишимского государственного педагогического института им. П.П. Ершова. Серия "Физико-математические науки и методика их преподавания". – 2012. - № 1(6). – С. 4-10.

5. *Алексеев В.Н.* Медианное и высотное сопряжения на множестве классов подобия треугольников [Текст] / В.Н. Алексеев // Ярославский педагогический вестник. – 2013. - № 4. – Том III (Естественные науки). – С.7-13.

Разработка и проведение коллективных игр на занятиях математического кружка

Е.С. Белкина, Е.В. Кашуба

При работе со школьниками в рамках математического кружка возможно проведение некоторых занятий в игровой форме. В течение нескольких лет ведения математического кружка нам удалось создать копилку интересных наработок. О двух из них будет рассказано в данной статье.

Кружок «Математический субботник» начал свою работу в 2008 году в Карельской государственной педагогической академии. После присоединения КГПА к Петрозаводскому государственному университету в 2013 году кружок подключился к работе, которую ведет со школьниками математический факультет ПетрГУ. Участвовать в кружке имеет право любой желающий. На сегодняшний день математический кружок состоит из трех групп: младшая (1-4 классы), средняя (5-8 классы) и старшая (9-11 классы).

Обучение в средней и старшей группе проходит в форме решения и обсуждения интересных задач. В начале занятия каждый школьник получает листочек с подборкой задач по некоторой теме. Формулировки этих задач, как правило, ясны школьникам или требуют незначительного пояснения со стороны преподавателя. Поскольку темп работы и возможности у всех ребят разные, то много времени уделяется разбору лично с каждым школьником его решений и, при необходимости, кто-то получает подсказки, а кто-то дополнительные задачи.

Наряду с обычными занятиями в нашем кружке проходят математические соревнования, такие как математический бой [1], математический аукцион, математическая драка и другие [2]. Помимо традиционных математических соревнований мы создаем и проводим свои разработки игр. В данной статье пойдет речь о двух коллективных играх: «Драконы времени» и «Шахматная партия».

«Драконы времени»

Эту коллективную игру по истории математики лучше всего проводить в старших классах. При решении задач потребуется умение решать квадратные уравнения. В ней принимает участие одна команда, состоящая не менее чем из 10 человек.

Завязка игры происходит следующим образом. Говорится о том, что Драконы времени вырвались наружу и перемешали страны и эпохи. В итоге на одной карте проявились Древняя Греция, Древний Китай, Древняя Индия, Арабские страны, Западная Европа и Россия (могут быть еще, например, Египет и Вавилон).

Для игры необходимо подготовить по 7 задач для каждой страны, игровое поле, кубики и фишки. В нашем случае игровое поле было выполнено в виде карты, а в качестве фишек выступала национальная обувь, сделанная в миниатюре вручную из пластики.

Игра построена по принципу настольной игры с картой, фишками и кубиками. В начале игры один из участников команды кидает игральный кубик. Каждой стране присвоен номер от 1 до 6, и кубик определяет, в какую страну отправляется команда. Далее жеребьевкой назначается участник команды, которому выпадает честь представлять очередную страну, и этот участник облачается в костюм данной страны. Внутри страны команда с помощью кубика передвигается по карте и решает задачи, за которые получает баллы. Для перехода к следующей стране надо пройти через Портал – решить итоговую задачу. Если на Портале команда не решает задачу, она теряет одного участника, представляющего эту страну, и в определенный момент команде нужно будет его спасти, используя заработанные при решении задач баллы или решив дополнительные задачи. Цель игры – пройти все шесть стран, тем самым победив Драконов времени и вернув все на свои места. За время игры в каждой стране команда может воспользоваться помощью Магистров – получить подсказку от известных математиков прошлого.

Примеры задач.

1. Задача Батской ткачихи (Джеффри Чоссер, «Кентерберрийские рассказы», XIV в., [3]).

Ткачиха рассказала, как однажды она сидела у себя в комнате и шила, когда вошел ее сын. Получив родительский приказ: «Уходи, мой сын, и не мешай мне!» Он ответил: «Я и вправду твой сын, но ты не моя мать, и до тех пор, пока ты не растолкуешь мне, как это может быть, я не двинусь с места».

2. Задача о водоеме («Математика в девяти книгах», Китай до н. э., [4]).

Имеется водоем со стороной в 1 чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина воды и какова длина камыша? 1 чжан=10 чи.

3. Задача Бхаскары («Венец астрономического учения», XII век, Индия, [4]).

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько ты скажешь
Обезьян там было в роще?

«Шахматная партия»

Эту увлекательную математическую игру можно проводить как в кружках средних классов, так и для ребят постарше. В ней принимает участие две команды от 4 до 16 человек в каждой. В составе команды должен быть один ферзь (умеющий играть в шахматы школьник). Если позволяет количество участников, то каждый учащийся становится фигурой, в противном случае один учащийся может играть за парные фигуры, а за пешки играет вся команда.

Ведущему нужно иметь список из 32 простых задач вычислительного характера или на смекалку, на решение которых у школьников не должно уходить более 3-х минут. Причем задачи должны быть распределены по четырем степеням сложности: 8 наиболее простых задач оцениваются в один балл, 8 задач стоят по два балла, 12 – по три и, наконец, 4 задачи стоят по четыре балла. Все задачи в зависимости от степени сложности распределяются на

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7								
6	1	2	3	3	3	3	2	1
5	1	2	3	4	4	3	2	1
4	1	2	3	4	4	3	2	1
3	1	2	3	3	3	3	2	1
2								
1								

клетках шахматной доски, свободных от фигур, как показано на рисунке 1 (число, указанное в клетке, обозначает сложность задачи в баллах).

Рис. 1.

Игра – это шахматная партия, ведут которую полководцы-ферзи. Ферзь делает ход на доске фигурой, обе команды одновременно получают задачу, закрепленную за этой клеткой, решают в течение 3-х минут и право ответа предоставляется команде, делавшей ход. Задачу решает вся команда, а отвечает фигура, которой делали ход. Если команда не решила задачу, то право ответа передается сопернику, но за правильный ответ команда соперника получает только половину стоимости задачи. Как в обычной шахматной партии, фигуры могут быть съедены. Стоимость фигур остается общепринятой для шахмат: конь и слон стоят по 3 пешки, ладья стоит 5 пешек, ферзь стоит 10 пешек. Добавляется одно условие: пешка стоит 4 балла. Выигрывает команда, набравшая в течение часа большее количество баллов по сумме решенных задач и съеденных фигур.

При проведении мы использовали напольные шахматы, самодельное большое шахматное поле, подготовили для каждого игрока отличительные символы фигур (шапочку-корону и медальон). Но возможно проведение этой игры с использованием обычной шахматной доски.

Примеры задач.

1. Суперблиц.

1.1. Какой знак нужно поставить между нулем и единицей, чтобы получить число больше нуля, но меньше единицы?

1.2. Наташа произнесла истинное утверждение. Алеша повторил его дословно и оно стало ложным. Что сказала Наташа?

1.3. Разгадайте короткий ребус: ?^2.

9. При обучении детей шахматам шахматную доску условно разделяют на зоны: болото, равнина, холмы, гора. Покажите эти зоны на доске и объясните, на каком основании произведено данное деление.

10. Завершите фразу: «Жизнь – это не зебра из черных и белых полос, а шахматная доска. Здесь все зависит от ...».

Разработанные игры могут быть проведены на занятиях математического кружка, факультатива или в качестве культурно-творческого дела на неделе математики в школе. В последнем случае школьники могут принять активное участие в изготовлении реквизита. Подготовка игры «Драконы времени» позволит школьникам познакомится не только с математическими задачами, но и узнать традиции, особенности национальных костюмов разных стран и эпох. Подготовка игры «Шахматная партия» потребует если не умения играть в шахматы, то знакомства с названиями фигур и правилами игры.

Проведение этих игр произвело сильное впечатление на участников кружка. Хорошие задачи, театральность действия, работа в команде – все это позволило достичь эффекта погружения, создать особую среду кружка.

Библиографический список

1. *Федотов, В. П.* Математический бой [Текст] / В. П. Федотов // Квант. – 1972. – №10. – С. 71-74.
2. *Генкин, А. С.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы [Текст] / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин, И. С. Рубанов (глава «Индукция»). – Киров: Издательство «АСА», 1994. – 272 с.
3. *Чистяков, В. Д.* Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями [Текст] / В. Д. Чистяков. – Минск: Издательство Министерства высшего, среднего специального и профессионального образования БССР, 1962. – 203 с.
4. *Дьюдени, Г. Э.* 200 знаменитых головоломок мира [Текст] / Г. Э. Дьюдени. – перевод с англ. Ю. Н. Сударева. – М.: ООО «Фирма «Издательство АСТ», 1999. – 352 с.

Методология «мета»: предметные и метапредметные результаты изучения школьного курса математики

С.Н. Бычков

Разделение изучения учебных предметов на два уровня – базовый и углубленный – ставит немало проблем перед преподаванием математических дисциплин в школе. Если для углубленного уровня, в общем-то, можно использовать прежние, хорошо зарекомендовавшие себя подходы, то с преподаванием математики на базовом уровне всё намного сложнее. Между тем в требованиях к результатам освоения дисциплины «Элементарная математика» в «Примерной основной образовательной программе ВПО» предусмотрено, что школьный учитель должен уметь «работать в классах различной профильной направленности» [1, с. 33].

Особенность базового уровня изучения школьных дисциплин состоит в том, что предметные результаты их освоения «ориентированы на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки» [2]. Отсюда порядок расположения требований к результатам освоения основной образовательной программы: личностные, метапредметные, предметные результаты. Этот порядок в математике сталкивается с многовековыми традициями её преподавания.

Дедуктивный метод, принятый с античности при изложении геометрии, в XVII в. стал претендовать на роль всеобщего научного метода, что получило отражение в способе построения Спинозой его главного философского труда – «Этики». В XVIII в. М.В. Ломоносов предпринял попытку распространить «геометрический метод» на химию. Наконец, в XX в. Д. Гильберт довел эту тенденцию до логического завершения, высказав уверенность, что «всё, что может быть объектом научного исследования в целом, и постольку, поскольку оно созревает для оформления в теорию, прибегает к аксиоматическому методу и через него косвенно к математике» [3, с. 104]. Подобный взгляд подразумевает, что метапредметная значимость математики заключается в том, что все науки должны следовать за ней в отношении метода изложения результатов. И тогда, заботясь о достижении учениками предметных результатов, в качестве *побочного продукта* можно получить и метапредметные, и личностные результаты. (Наиболее ярко личностный аспект изучения математики выразил, наверное, Стендаль: «…я любил, и теперь еще люблю, математику ради нее самой, как не допускающую *лицемерия и неясности* – двух свойств, которые мне отвратительны до крайности» [4, с. 86]). Иными словами, заострение внимания на метапредметных и личностных результатах, выдвижение их на первый план излишне: математика сама своим особенным содержанием позволяет достигать всего сразу, следуя собственной двухтысячелетней традиции.

Сегодня, с высоты XXI в., ясно, что надежды на всеобщность дедуктивного метода – с исторической точки зрения вполне понятные – все же не могли оправдаться. Причины этого в следующем.

Формально-логическая дедукция реально необходима лишь в том случае, когда утверждения о свойствах объектов теории не допускают иного способа проверки, кроме повторения процесса мысленного их конструирования в соответствии с заранее принятыми требованиями. В геометрии некоторые утверждения не требуют обращения к логической дедукции (например, равенство углов при основании равнобедренного треугольника может быть доказано вполне предметно – путем перегибания), но равенство суммы углов треугольника двум прямым без аксиом и постулатов строго обосновать уже нельзя. В естественных же науках всегда существует *внешний* способ проверки утверждения теории, не сводящийся к удостоверению отсутствия ошибок в его выводе. Поэтому основным в естественных науках, вопреки Гильберту, является не аксиоматический, а гипотетико-дедуктивный метод.

Аналогичным образом обстоит дело и в арифметике. Каждое ее предложение, выводимое из аксиом Пеано, обладает и «содержательным» доказательством, не уступающим по степени убедительности формальной дедукции. Аксиоматический вывод всегда может быть преобразован в содержательное рассуждение с помощью интерпретации всех шагов вывода на «квазипредметной» модели. Последнее возможно по той причине, что сами законы счета, служащие прообразом аксиом формальной арифметики, не только обладают подобной интерпретацией, но и исторически могли быть осознаны лишь благодаря рефлексии над фактически осуществляемым пересчетом предметов путем перевода этой деятельности в план мысленного созерцания и представления. Так как вопрос об истинности аксиом в рамках дедуктивной теории не обсуждается, то справедливость любого формально выведенного арифметического утверждения обусловлена принятием исходных основоположений, в то время как после «квазипредметной» интерпретации этот момент условности полностью исчезает. А это означает, что переход на точку зрения аксиоматики не дает никакого выигрыша в отношении степени убедительности обоснования арифметических утверждений.

Логика, наряду с арифметикой и алгеброй, сегодня также может быть представлена в аксиоматико-дедуктивной форме, но и для нее подобный способ изложения не является необходимым.

Логика, как известно, была создана Аристотелем путем осмысления практики дискуссий и ставила своей целью отделить правильные способы умозаключений от неверных. Важно иметь в виду, что аксиоматический метод плохо подходит в качестве средства ведения дискуссии, поскольку, как правило, оппоненты исходят из противоречащих друг другу «систем аксиом» (основоположений, осознанно или бессознательно разделяемых каждым из спорящих). Дедуктивный метод удобен тогда, когда излагается и, соответственно, оспаривается *одна* точка зрения.

Содержательная сторона дискуссии, иными словами, служит препятствием для её эффективной аксиоматизации. Но у дискуссии имеется также *формальный* аспект, отражающий равенство прав участников дискуссии и не связанный с конкретным содержанием спора. (Например, если один из спорящих согласился с тем, что из утверждения *A* следует утверждение *B*, а затем признал справедливость *A*, то он будет вынужден принять и утверждение *B*, как бы это ни было ему невыгодно или неприятно. Поставить под сомнение заключительный вывод означало бы лишить в дальнейшем также и себя самого какого-либо способа принуждения оппонента.) Указанная формальная сторона дискуссий, в принципе, допускает дедуктивную аксиоматизацию (это впервые было сделано стоиками в IV в. до н. э.) и излагается в университетских курсах логики будущим ученым и учителям.

Теоретическая возможность аксиоматического изложения логики высказываний, однако, мало что может дать для успеха в происходящих дискуссиях. Апелляция к формальной схеме умозаключения может быть целесообразной в реальном споре лишь тогда, когда доказательство посылок вывода произошло достаточно давно и оппонент мог уже и позабыть о нём, но фактически эта схема никогда не приводится в абстрактно-логическом виде, а всегда только в её содержательном «обрамлении». Для того чтобы аксиоматизированная логика могла быть практически эффективной, она должна способствовать отысканию таких новых способов умозаключений, которые в практике дискуссий прежде не встречались и появились в ней затем именно благодаря дедуктивной форме данной теории. Но и это в действительности невозможно.

В дискуссии формальный момент всегда подчинен её предметному содержанию. Если открытая дедуктивно-теоретически новая схема вывода «внедряется» в материальную ткань полемики, становясь ведущей стороной в одной из критических точек дискуссии, то это означает, что *не зависящая ни от какого содержания* схема в состоянии сформировать из «материи спора» адекватное себе *содержательное* умозаключение, способствующее достижению целей одного из участников диспута. Понятно, что детерминируемая своим собственным содержанием структура дискуссионного процесса не допустит «вторжение» в неё со стороны «вещи», никак с этим содержанием не связанной.

Особая роль геометрии в развитии аксиоматического метода объясняется парадоксальным сочетанием двух противоположных обстоятельств: хотя свойства геометрических объектов в силу их особой наглядности могут быть открыты и разъяснены независимо от какой бы то ни было аксиоматики и дедукции, доказательство их истинности в большинстве случаев невозможно без опоры на предварительно сформулированные аксиомы и постулаты. В арифметике и догадка, и проверка истинности сделанного утверждения вполне могут обходиться без явного формулирования дедуктивных основоположений, касающихся свойств натуральных чисел, что, собственно, и делает в ней аксиоматический метод «излишней роскошью». В логике высказываний сложные правила умозаключений невозможно, как и в геометрии, обосновать вне рамок аксиоматического метода, но уже сам способ их получения, коль скоро они не извлечены из реальной практики рассуждений, фактически является также и их доказательством.

Предпринятая экскурсия в область современной философии науки не способна поколебать роли аксиоматического изложения математики в профильных классах школы. Выпускники этих классов нацелены на работу с активным использованием ЭВМ, а работа компьютера основана на тех же принципах, что и работа математика в аксиоматизированных теориях. И компьютер, и теоретик-математик могут использовать лишь то, что предварительно было явно описано в качестве основоположений и что по ходу дела было на основе этих «аксиом» получено (ничего не привлекая дополнительно со стороны). Поэтому для учеников профильных математических классов достижение личностных и метапредметных результатов по-прежнему может рассматриваться как естественный побочный продукт достижения результатов предметного характера.

А что делать в классах, где математика изучается на базовом уровне? Будущая профессиональная деятельность их выпускников в информационном обществе будет связана не с созданием, а лишь с *использованием* произведенных специалистами в области математики и информатики готовых продуктов. Гуманитарий, звоня перед входом в квартиру, редко отдает себе отчет в процессах, происходящих в электрической цепи после нажатия им кнопки. В аналогичной ситуации находятся и обычные пользователи ноутбуков, планшетов и смартфонов: они верят, что всё это придумали более способные, нежели они, к информатике люди, и нет оснований сомневаться в эффективности используемой техники.

Таким школьникам непросто сформировать у себя мотивацию к овладению навыками арифметических и алгебраических действий, коль скоро компьютеры всё равно позволяют это делать точнее и намного быстрее [5]. Здесь на помощь и может придти идея метапредметности.

Поскольку дедуктивный метод доказательства с необходимостью возникает только в теоретической геометрии, едва ли целесообразно будущего историка или юриста обучать свойствам фигур и тел на основе тщательно сформулированных аксиом. В [6] отмечалось, что любое теоретическое знание имеет опосредованный характер. Особенность геометрии в том, что в ней форма опосредования начальных аксиом и нетривиальных свойств фигур может принять вид чисто словесного – логического – вывода. Коль скоро в остальных науках подобная форма опосредования не является обязательной, допуская на каждом шаге обращение к словесно не формализованной чувственно воспринимаемой или мысленно созерцаемой реальности, то и саму геометрию – в соответствии с наглядным содержанием её собственного предмета – при изложении на базом уровне целесообразно излагать наглядно, делая акцент на выработке навыков поиска полезных дополнительных построений, без которых никакое дедуктивное рассуждение невозможно[195].

Развиваемое на наглядных геометрических примерах искусство поиска опосредующих звеньев может быть затем использовано в более формальной школьной дисциплине –

[195] Несколько подобных примеров из школьного курса геометрии рассмотрено в [6].

информатике. Идея поиска опосредующих звеньев между наглядными схемами алгоритмов и их фактическим выполнением путем задействования законов физики на компьютере позволяет выстроить следующую цепочку, отражающую практику современного программирования:

граф-схема алгоритма → псевдокод → программа на Си (или С++) → программа на ассемблере → машинный код → физическое исполнение программы.

Именно эта схема, содержащая четыре опосредующих звена, лежит в основе известного учебника [7], и хотя философское понятие опосредования в нём в явном виде не используется, его осознанное применение существенно облегчает понимание общей структуры книги. В частности, победа Си над другими языками программирования объясняется тем, что он лучше всех остальных выполняет функцию опосредования между псевдокодом и ассемблером.

Сложнее всего, как это ни странно на первый взгляд, обстоит дело с преподаванием арифметики (теории простых дробей и свойств пропорций), алгебры и основ анализа.

Появление компьютеров и пакетов прикладных программ избавило человека от необходимости собственноручно проводить вычисления с символами. Будущему программисту знание алгебры и анализа, строго говоря, необходимо лишь в объеме, позволяющем записывать алгоритмы на искусственных формальных языках: компьютер сложные символьные вычисления проводит и быстрее, и безошибочнее. Если для углубленного уровня свободное владение математической символикой органично сочетается с умением писать программы на алгоритмическом языке высокого уровня, то при обучении на базовом уровне, где достаточно навыков использования готовых компьютерных программ, а также владения стандартными приёмами написания на алгоритмическом языке программы для решения стандартной же задачи, затрата значительных усилий на совершенствование навыков алгебраических и тригонометрических преобразований не представляется оправданной.

В написанной задолго до появления новых ФГОС статье «Гуманитарная математика» Н.Х. Розов пишет, что для учащихся, не предполагающих посвятить жизнь математике, естествознанию или технике, важно понимание концептуальных моментов математической теории (а это не предполагает выработку технических навыков математических исчислений) и действия математических законов в окружающем мире, применение их для научного объяснения явлений [8, с. 60]. Что же мешает гуманитарно ориентированному ученику в деле достижения указанных целей?

Знаменитый философ Кант полагал, что люди не могут «*мыслить* ни одного предмета иначе как с помощью категорий…» [9, с. 214]. Под сомнение это высказывание Канта было поставлено только после построения Дж.К. Максвеллом теории электромагнитного поля (физики в конце концов поверили, что полученные Максвеллом уравнения не поддаются качественной категориальной интерпретации). Как бы то ни было, окружающий человека мир, как и двести лет назад, *сам по себе* не дает оснований усомниться в категориальном характере его мышления в рамках повседневной жизни. Категориальное мышление, не обремененное (как теоретическая физика) мощной математической символикой, по-прежнему верой и правдой служит человеку и в его каждодневных трудах, и в гуманитарных науках. В информатике же, как и в теоретической физике, основным считается не категориальное, а символическое познание.

На сегодняшний день фактическое различие между категориальным гуманитарным и символическим естественнонаучным мышлением – актуальный вызов современной философии науки. Как бы то ни было, в более простых, нежели теория Максвелла, случаях указанное различие можно сгладить, и это обстоятельство может быть использовано для концептуального изложения сложных разделов арифметики, алгебры и анализа в соответствии с изложенными выше принципами. Только опосредованию в данном случае подлежит отношение между явлениями окружающего естественнонаучного и социального мира и описывающими их посредством математических символов моделями. И опосредование это следует искать на основе философской категории количества.

Подводя итог, можно сказать: если на углубленном уровне изучения математики метапредметные результаты по-прежнему могут рассматриваться как следствие достижения предметных результатов, то на базовом уровне, наоборот, метапредметный аспект математики может и должен стать основой достижения предметных результатов. Иначе проблема мотивации изучения математики на базовом уровне едва ли разрешима.

Библиографический список

1. Примерная основная образовательная программа высшего профессионального образования. Направление подготовки 050100 «Педагогическое образование» (утверждено приказом Минобрнауки России от 17 сентября 2009 г. № 337). Профиль «Математика» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.mpgu.edu/uchebno_metodicheskoe_obedinenie_po_obrazovaniyu_v_oblasti_podgotovki_pedagogicheskikh_kadrov/obrazovatelnye_standarty_vysshego_professionalnogo_obrazovaniya/primernye_osnovnye_obr_programmy.php.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (10-11 кл.) [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B/2365.
3. *Гильберт, Д.* Математическое мышление [Текст] / Д. Гильберт / Методологический анализ оснований математики. М., 1988. - С. 97–104.
4. *Стендаль* Собр. соч. в 15 т. [Текст] / Стендаль / Т. 13. М., 1959.
5. *Бычков, С.Н.* Мотивация учащегося при изучении математики [Текст] / С.Н. Бычков / Труды X международных Колмогоровских чтений. Ярославль, 2012. С. 229–230.
6. *Бычков, С.Н.* Математическое образование в информационном обществе [Текст] / С.Н. Бычков / Труды IX международных Колмогоровских чтений. Ярославль, 2011. С. 35–39.
7. *Борисенко, В.В.* Основы программирования [Текст] / В.В. Борисенко / М., 2005.
8. *Розов, Н.Х.* Гуманитарная математика [Текст] / Н.Х. Розов / Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 53–62.
9. *Кант, И.* Соч. [Текст] / И. Кант / Т. 3. М., 1964.

Преподавание математических дисциплин с использованием систем компьютерной математики

В.С. Климов, А.Ю. Ухалов

В последние десятилетия системы компьютерной математики получили значительное развитие и распространение.

Совершенствование компьютеров и программного обеспечения сделали доступными программы, позволяющие выполнять не только численные расчеты, но и символьные преобразования, проводить в автоматическом режиме целые исследования. Можно говорить, что на наших глазах происходит революция — в очередной раз удается автоматизировать выполнение работ, считавшихся прежде прерогативой человека.

Эти процессы не могут не повлиять на математическое образование. Студентам уже доступны на мобильных устройствах системы, позволяющие не только получить численное или символьное решение многих задач из классических задачников, но и «сгенерировать» сам процесс решения. Эти факторы необходимо учитывать преподавателям. Как всегда, плоды прогресса противоречивы. С одной стороны — было бы странно не использовать имеющиеся возможности, с другой — необходима коррекция методики преподавания и системы контроля знаний.

Необходимость использования систем компьютерной математики в учебном процессе давно осознана, соответствующие курсы постепенно появляются в учебных программах ведущих вузов страны. С 2009 года на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова введен практикум по компьютерной геометрии (см. [1]). Несколько лет назад на математическом факультете ЯрГУ им. П. Г. Демидова начато преподавание дисциплины «компьютерная алгебра».

Авторы настоящей работы в течение ряда лет используют систему компьютерной математики Wolfram Mathematica при преподавании таких дисциплин, как математический анализ, методы оптимизации и компьютерная алгебра. В данной работе мы хотели бы поделиться накопленным в этой области опытом и привести примеры задач, которые мы предлагаем студентам для самостоятельного решения.

Представляется, что, прежде всего, необходимо донести до студентов, что, как и прежде, машина сама по себе не думает; что организация процесса решения задачи требует не меньшего, чем ранее, знакомства с теорией и не меньшей, чем раньше, математической культуры.

Ситуация напоминает картину появления первых вычислительных машин. Первоначальные надежды, что многие задачи решатся сами собой, не оправдались. Быстро пришло понимание, что решение задач на машине — дело непростое и требует создания новых разделов математики. Сейчас отчасти повторяется та же картина. В компьютерных классах университетов установлены мощные системы компьютерной математики — MATLAB, Maple, Wolfram Mathematica. Студенты легко выполняют с помощью этих систем некоторые простейшие операции: символьное или численное интегрирование, вычисление производной, построение графика функции и т.д. Вместе с тем, остаются неиспользованными огромные возможности, реализованные в этих системах. Как правило, знакомство с основами той или иной системы не вызывает затруднений. Трудности возникают, когда требуется реализовать алгоритм решения задачи, не предусмотренный системой.

По системе Wolfram Mathematica имеется большое количество учебников. Для более детального знакомства с системой мы рекомендуем студентам обратиться к учебнику [2]. Возможности системы по решению геометрических задач и по графическому представлению данных подробно рассмотрены в книге [1]. Не следует забывать и о встроенной справочной системе Wolfram Mathematica, содержащей полное описание системы и множество примеров. Большое количество материалов имеется в сети Интернет (см., например, [3-4]).

На начальных этапах освоения системы мы предлагаем решать простые задачи, не требующие использования сложных языковых конструкций и программирования:

20. вычисление производных и интегралов,
21. построение кривых и поверхностей,
22. численное и символьное решение дифференциальных уравнений.

После этого студентам предлагаются более сложные задания:

11. построение касательной прямой к параметрически заданной кривой,
12. построение касательной плоскости к заданной параметрически поверхности,
13. построение эквидистант для кривых и поверхностей,
14. вычисление площадей и объемов,
15. решение задач оптимизации (отыскание минимума или максимума функции, в том числе задачи на отыскание условного экстремума),
16. решение задач линейного программирования и задач, которые сводятся к решению некоторой задачи линейного программирования.

Далее можно переходить к решению задач, требующих программирования на языке Wolfram Mathematica. К ним относятся задачи о построении различных асимптотик и представление решений уравнений в виде рядов, такие как:

1. отыскание решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда,
2. разложение корня многочлена по степеням малого параметра,
3. разложение собственных значений и собственных векторов матриц по целым или дробным степеням малого параметра,
4. построение периодического решения дифференциальных уравнений,
5. построение периодических решений систем Ляпунова.

Особенно полезными оказываются средства системы, предоставляющие возможность изменять параметры задач с помощью графических элементов управления (controls). Это позволяет непосредственно наблюдать зависимость решений от параметров. В первую очередь к таким средствам относится функция Manipulate.

Приведем пример кода на языке Wolfram Mathematica, позволяющего построить нормаль к поверхности и следить за изменениями вектора нормали, произвольно изменяя точку A(u,v).

```
1 x[u_,v_]:=2*Cos[u]*Cos[v];
2 y[u_,v_]:=1.5*Sin[u]*Cos[v];
3 z[u_,v_]:=Sin[v];
4 u0=0;
5 u1=2*Pi;
6 v0=-Pi/2;
7 v1=Pi/2;
8 sur=ParametricPlot3D[{x[u,v],y[u,v],z[u,v]},
9 {u,u0,u1},{v,v0,v1},Mesh->None];
10 xu[u_,v_]=D[x[u,v],u];
11 yu[u_,v_]=D[y[u,v],u];
12 zu[u_,v_]=D[z[u,v],u];
13 xv[u_,v_]=D[x[u,v],v];
14 yv[u_,v_]=D[y[u,v],v];
15 zv[u_,v_]=D[z[u,v],v];
16 norvec[u_,v_]:={x[u,v],y[u,v],z[u,v]}+
17 1.2*Normalize[
18 Cross[{xu[u,v],yu[u,v],zu[u,v]},{xv[u,v],yv[u,v],zv[u,v]}]
19 ];
20 Manipulate[
21 nor=Graphics3D[{Red,Arrowheads[0.04],
22 Arrow[Tube[{{x[uu,vv],y[uu,vv],z[uu,vv]},
23 norvec[uu,vv]},0.04]]}];
24 LineU=ParametricPlot3D[{x[u,vv],y[u,vv],z[u,vv]},{u,u0,u1}];
25 LineV=ParametricPlot3D[{x[uu,v],y[uu,v],z[uu,v]},{v,v0,v1}];
26 Show[sur,nor,LineU,LineV,
27 PlotRange->{{-3,3},{-3,3},{-3,3}},
28 PreserveImageOptions->True],
29 {uu,u0,u1},{vv,v0,v1}
30 ]
```

Строки 1-7. Задание уравнений поверхности и диапазонов изменения параметров. В данном примере заданы параметрические уравнения эллипсоида. При переходе к другим уравнениям следует иметь в виду, что предлагаемая программа строит только одну из двух нормалей. Какая из нормалей будет построена, зависит от ориентации поверхности, которая в нашем случае определяется ролями переменных u и v. Если ориентация выбрана неудачно, нормаль может оказаться направленной внутрь и быть невидимой.

Строки 8-9. Построение графика поверхности. Эта поверхность далее меняться не будет и ее достаточно построить один раз.

Строки 10-15. Определение функций для вычисления частных производных.

Строки 16-19. Определение функции для построения нормали. Для вычисления векторного произведения векторов используется функция Cross, а для нормировки полученного вектора - функция Normalize. Коэффициент 1.2, на который умножается нормализованный вектор, выбран нами исключительно из соображения лучшей видимости вектора на экране.

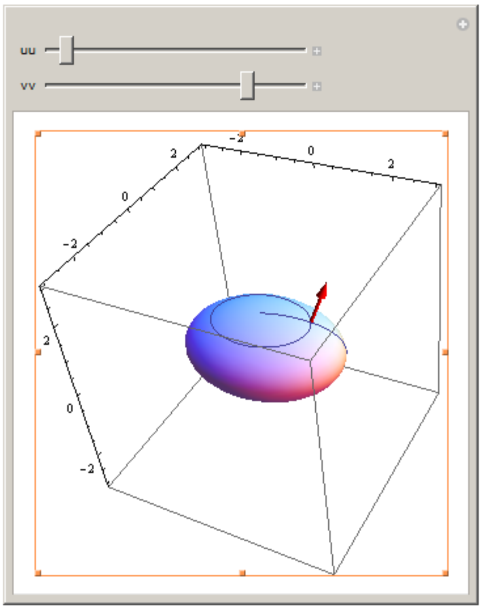
Строки 20-30. Вызов функции Manipulate с изменяемыми параметрами uu, vv, определяющими положение точки, в которой строится нормаль к поверхности.

Строки 21-23. Рисование нормального вектора. Толщина линии для рисования вектора и размер его стрелки подобраны экспериментально.

Строки 24-25. Рисование координатных линий, проходящих через данную точку.
Отображение этих линий добавлено для наглядности: можно наблюдать, что вектор нормали ортогонален каждой из этих линий.

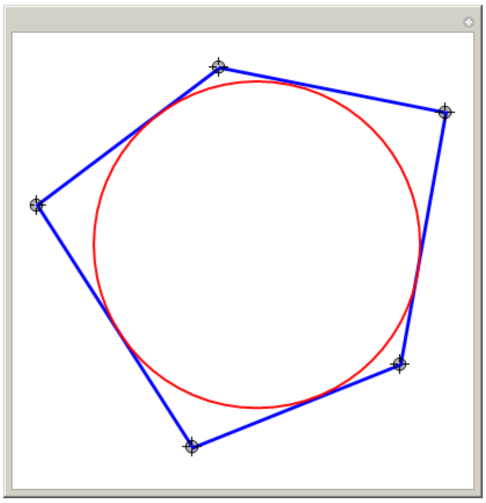
Строки 26-28. Вывод всех созданных графических объектов. Диапазон выводимых значений (значение параметра PlotRange) выбран специально для данного примера. Для другого случая его, возможно, потребуется изменить. Можно и автоматизировать выбор этого параметра, оценив значения, принимаемые функциями, входящими в параметрические уравнения поверхности.

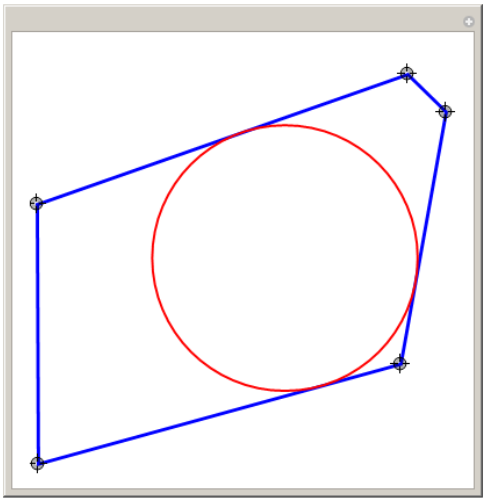
Результат выполнения этого примера показан на рисунке.



С помощью элементов управления типа slider можно изменять положение точки, в которой строится нормаль. Программу легко модифицировать для построения нормалей к другой поверхности. Достаточно изменить часть кода, относящуюся к заданию поверхности и диапазонов изменения параметров.

На следующих рисунках показано решение задачи об отыскании окружности наибольшего радиуса, вписанной в выпуклый многоугольник.





Задача сводится к отысканию чебышевской точки системы неравенств и, в конечном итоге, к решению задачи линейного программирования. Вершины многоугольника определяются с помощью элементов управления типа locator. Положение вершин можно изменять, перетаскивая соответствующие графические элементы. При изменении входных данных задача решается заново и обновляется графическое изображение решения.

Большой интерес вызывают у студентов задачи, связанные с подготовкой моделей для печати на 3Д-принтере. В программе Wolfram Mathematica предусмотрены возможности экспорта моделей в файлы различных форматов. Соответствующая директива имеет формат Export[file, expr, format]

Здесь file - имя файла, expr - выражение, описывающее объект для экспорта, format - формат экспорта. Последний параметр может быть опущен. В этом случае формат для экспорта определяется расширением имени файла.

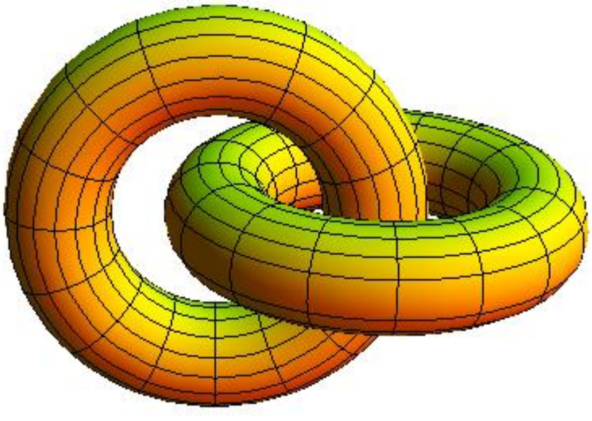
Приведем пример экспорта модели, напечатанной в лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П. Г. Демидова на 3Д-принтере Zprinter 450. Код для построения двух зацепленных торов взят из документации программы Wolfram Mathematica.

```
rings = ParametricPlot3D[
{{4+(3+Cos[v]) Sin[u],4+(3+Cos[v]) Cos[u],4+Sin[v]},
{8+(3+Cos[v]) Cos[u],3+Sin[v],4+(3+Cos[v]) Sin[u]}},
{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}];

Export["ringsfile.stl", rings]
```

В данном случае модель экспортирована в формат STL, который способны импортировать многие 3Д-редакторы и программное обеспечение 3Д-принтеров.

Модель, полученная в результате выполнения этого кода, сохраненная в файле ringsfile.stl, показана на рисунке.



Можно утверждать, что использование в учебном процессе систем компьютерной математики позволяет активизировать работу студентов, заставляет их более интенсивно использовать в системе знания, полученные при изучении различных дисциплин.

Библиографический список

1. *Иванов, А. О.* Компьютерная геометрия: практикум: учебное пособие [Текст] / А. О. Иванов, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовский, А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко. — М.: Интернет-университет информационных технологий, 2010. — 391 с.
2. *Дьяконов, В. П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство [Текст] / В. П. Дьяконов / ДМК Пресс, 2010.
3. URL: http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html
4. URL: http://wolframmathematica.ru/

Необходимость формирования конструктивных математических умений при изучении алгебры

Е.И. Лакша

В конце XX столетия масса людей во многих странах столкнулась с потерей работы, и как следствие, с необходимостью смены профессии. Смена профессии стала постепенно восприниматься как норма, соответственно, как норма стала восприниматься и необходимость заново учиться. Поэтому мы разделяем точку зрения ученых России А.В. Боровских, Н.Х. Розова, которые одной из задач дидактики называют задачу, состоящую в том, чтобы найти во всех профессиях нечто общее, что необходимо всем и всегда, то есть выделить умения, которые необходимы в любом виде деятельности и профессии [1], [2]. В любой деятельности и в любой профессиональной сфере человек должен уметь наблюдать, анализировать, распознавать, сравнивать, обобщать, сопоставлять, делать выводы из полученной информации и др. Эти умения связаны с соответствующими мыслительными операциями, их формирование и должно обеспечиваться в процессе практико-ориентированного обучения в школе различным предметам при реализации целей образования. Те специфические предметные умения, которые способствуют практико-ориентированному обучению математике, мы выделили как конструктивные математические умения, побуждающие учащихся использовать мыслительные операции, обладающие свойствами широкого переноса и применяемые как при изучении различных учебных предметов, в первую очередь естественного цикла, так и в жизни.

В различные годы в системе среднего образования развивались различные направления связи преподавания с жизнью. Наиболее яркими из них были политехническое обучение; прикладная направленность обучения математике; практико-ориентированное обучение математике. Особенность политехнического обучения математике заключалась в раскрытии учащимся основных научных принципов производства, что давало возможность ознакомить школьников по их выбору с операциями нескольких десятков профессий различных отраслей народного хозяйства. Однако с ликвидацией в системе образования межшкольных мастерских и учебно-производственных комбинатов интерес к политехническому обучению в средних школах угасает. Особенностью прикладной направленности обучения математике являлось использование решения прикладных задач, возникающих вне математики (при изучении предметов естественного цикла). Однако реализация в полной мере прикладной направленности обучения математике требует соблюдения ряда ограничений в решении прикладных задач, знания выбранных предметов естественно-научного цикла, с помощью которых осуществляется прикладная направленность. Особенностью практико-ориентированного обучения математике является то, что с помощью знаний и умений школьной программы по математике учащимися осуществляется решение математических задач практико-ориентированного характера, возникающих не только вне математики, но и внутри нее. В качестве основополагающего подхода к осуществлению связи обучения с жизнью мы взяли практико-ориентированное обучение математике (алгебре).

Под практико-ориентированным обучением математике нами понимается такая организация учебного процесса, которая предполагает целенаправленное формирование умений применять полученные математические знания для поиска наиболее рациональных способов решения поставленных задач, возникающих в трудовой и учебной деятельности. Рациональным решением математических упражнений и задач мы называем такое решение, которое выполняется с использованием меньшего числа действий, формул, правил, математических операций по сравнению с иными способами решения. Те специфические предметные умения, которые способствуют практико-ориентированному обучению алгебре, мы выделили как конструктивные математические умения.

Конструктивные математические умения, формируемые при изучении алгебры в школе, – это умения, позволяющие использовать различные комбинации мыслительных операций для поиска решения и выбора рациональных действий при работе с математическими объектами. Конструктивные математические умения, формируемые при изучении алгебры, можно условно разделить на 3 группы:

К конструктивным математическим умениям по *выполнению ориентировочных действий* относятся следующие умения*:* 1) вычленять существенные и несущественные признаки понятий и математических объектов; 2) распознавать математические объекты и доказывать принадлежность объекта к определенному классу; 3) выявлять структуры алгебраических выражений др.

К конструктивным математическим умениям по *выполнению математических преобразований над математическими объектами* относятся умения*:*1) расчленять сложную задачу на более простые ее составляющие; 2) выполнять преобразования графиков функций (сдвиги, растяжения, сжатия и др.)

К конструктивным математическим умениям по *проведению трансформации математических объектов с использованием формул, законов, утверждений, теорем* и др. относятся умения: 1) разворачивать и сворачивать схему конструкции алгебраического выражения по формуле; 2) переводить правило, закон, формулу в способ действий и по действиям выводить правила, законы, формулы; 3) приводить (самостоятельно) примеры, иллюстрирующие правило и и др.

Раскроем сущность основных конструктивных математических умений.

1. Умения по выполнению ориентировочных действий.

Умение распознавать математические объекты и доказывать их принадлежность к определенному классу позволяет учащимся среди множества математических объектов выделять один с заданными свойствами. Например, распознать из предложенных выражений те, которые являются квадратом суммы или разности двух выражений, разностью квадратов двух выражений; определить по словесной формулировке прямо пропорциональные или обратно пропорциональные величины; выяснить, является ли предложенное уравнение квадратным и т.д. Причем математические объекты могут быть представлены как в явном, так и в неявном виде.

Умение замечать различные закономерности дает учащимся возможность самим делать определенные выводы, заключения. Так, например, при изучении теоремы Виета, учащиеся сначала находят корни предложенных приведенных квадратных уравнений по формуле, затем сравнивают сумму и произведение полученных корней со вторым коэффициентом и свободным членом, делают соответствующие выводы. Также при изучении арифметической и геометрической прогрессий, учащиеся сами могут установить по данной числовой последовательности закономерность, согласно которой в ней располагаются числа, и, соответственно, самостоятельно сформулировать определение арифметической или геометрической прогрессии.

2. Умения по выполнению математических преобразований над математическими объектами.

Умение расчленять сложную задачу на более простые ее составляющие дает учащимся возможность выполнять задания при помощи последовательности операций. Так, например, при решении уравнения, предложенного ниже, необходимо выполнить несколько операций: свернуть правую часть по формуле разности квадратов, в левой части применить свойства модуля, преобразовать тригонометрические выражения.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\left(tg70^0\,ctg110^0+\frac{x^2}{|x|}\right)\left(\cos^2 20^0+\cos^2 70^0-x\right)=\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right).$$

Использование умения преобразовывать алгебраические выражения (находить недостающий или излишний элемент математической конструкции, переконструировать и др.) можно проследить на следующих примерах.

Пример 2. В предложенных выражениях заполнить пропуски:

1) $\left(\ldots-9c^2\right)^2=25a^2-\ldots+\ldots;$ 4) $(5x+..)^2=...+70xy+...;$

2) $...+30xy+9y^2=(...+3y^2)^2;$ 5) $(9a-...)^2=...-...+100b^2;$

3) $a^2+6a+...=(...+...)^2;$ 6) $16c^2+...+49y^2=(...+...)^2.$

3. Умения по проведению трансформации математических объектов с использованием формул, законов, утверждений, теорем и др.

Умение разворачивать и сворачивать схему конструкции по форме или по способу решения (алгоритм решения) необходимо учащимся для того, чтобы они могли применять изученные математические формулы для решения конкретных задач. Особенно важную роль играют данные умения при переносе знаний в незнакомые ситуации.

Пример 3. Возвести в степень:

а) $(2x-y+a-c)^2;$ б) $\left(a\sqrt{x}-\sqrt{x^3-a^2x}\right)^2.$

Пример 4. Свернуть по формуле квадрата суммы или разности:

а) $9\left(a^2-ac\right)^2-6ac^2(a-c)+c^4;$ б) $4a+9x-2\sqrt{ax}.$

Пример 5. Свернуть по формуле разности квадратов:

а) $\left(a^{3k}-7b^{k+3}\right)\left(a^{3k}+7b^{k+3}\right);$ б) $(a+2b+4c)(a-2b-4c).$

Умения правила, формулу переводить в способ действий и по действиям выводить правила, формулы характеризуют умение учащихся применять изученную формулу для решения различных упражнений.

Пример 6. Упростить:

а) $\dfrac{4c^3}{2c^2};$ б) $\dfrac{12c^{12}x^3}{3x^9};$ в) $6a^{32}\cdot 12ca.$

В данном примере учащимся понадобилось применить формулы действий со степенями: $\grave{a}^n : a^m = a^{n-m}$, $\grave{a}^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Пример 7. Решить задачу.

Ученик купил *x* ручек. Из них *y* ручек он отдал брату. Сколько стоят ручки ученика, если каждая ручка стоит z рублей?

При решении данной задачи учащиеся знакомятся с практическим применением распределительного закона умножения. В данном случае можно число ручек ученика умножить на цену одной ручки, а можно из стоимости всех ручек вычесть стоимость ручек товарища.

Пример 8. Записать при помощи букв, знаков действий и скобок следующие алгебраические выражения:

а) удвоенную сумму двух величин *a* и *c*;

б) сумму двух удвоенных величин *a* и *c*;

в) квадрат разности одночлена и двучлена;

г) квадрат суммы половины данного выражения *a* и его четверти.

Умения переходить от общего принципа к конкретным задачам и наоборот – от конкретных задач к общему принципу позволяют учащимся самостоятельно обобщать определенные свойства математических объектов.

Пример 9. (Переход от конкретных задач к общему принципу) Записать формулой:

а) четное число;

б) нечетное число;

в) два последовательных натуральных числа;

г) три последовательных нечетных числа.

Умение самостоятельно подбирать теоретический факт (определение, формулу, теорему и др.) для решения конкретной задачи дает учащимся возможность соотнести рассматриваемый математический объект с теми, которые изучались ранее.

Необходимо уделять внимание формированию у учащихся умений осуществлять свернутые и развернутые математические действия (операции). Так, например, часто при преобразовании многочлена к стандартному виду многие учащиеся не понимают, какие свойства действий они использовали: переместительный, сочетательный, распределительный законы. Это происходит из-за недостаточной по времени опоры на теоретическое обоснование операционного состава действий. Между тем учащиеся должны уметь применять распределительный закон умножения относительно сложения и вычитания в различных ситуациях. Необходимо, чтобы учащиеся могли осуществлять развернутую запись применения данных законов. Например:

а) $(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y) = (ax+ay) + (bx+by) = ax+ay+bx+by$;

б) $(a+b)(x+y+z) = a(x+y+z) + b(x+y+z) = (ax+ay+az) + (bx+by+bz) =$
$= ax+ay+az+bx+by+bz$.

Умение осуществлять развернутую запись математических действий поможет учащимся понять в данном случае, что вместо каждой переменной, входящей в распределительный закон умножения относительно сложения $(a+b)c = ac+bc$, можно поставить целое выражение. В приведенных примерах множитель *c* заменили выражением $(x+y)$ и $(x+y+z)$ соответственно.

Сформированные вышеперечисленные умения позволяют учащимся, используя различные мыслительные операции, решать комбинированные задачи, задачи практико-ориентированного характера. Каждое из конструктивных математических умений не является независимым от другого. Трудно провести грань между формированием каждого из них, все они взаимосвязаны между собой.

Так, например, для преобразования выражения: $\frac{\tilde{n}^2}{(2\tilde{n}-1)^2}-\frac{2\tilde{n}^2}{4\tilde{n}^2-1}+\frac{\tilde{n}^2}{(2\tilde{n}+1)^2}$, учащимся сначала необходимо *проанализировать* данное выражение, *распознать* в данном выражении формулу квадрата разности, выделив для этого *существенные признаки*, а именно: первое и третье слагаемое можно представить квадратами, а второе – удвоенным произведение этих слагаемых. Далее учащимся необходимо *свернуть* данное выражение *по формуле*. Такой способ решения будет более удобным, выполненным меньшим числом операций, а, следовательно, рациональным.

Таким образом, методику обучения математике можно использовать для обучения учащихся математическому конструированию при изучении курса алгебры, в частности при выполнении алгебраических преобразований, построений графиков функций, при нахождении рациональных способов решения примеров и задач и т.д.

Нами разработана методика формирования конструктивных математических умений учащихся для осуществления практико-ориентированного обучения алгебре, состоящая в использовании разновидностей структур упражнений, выделяемых при изучении содержательных линий школьного курса алгебры; форм обучения алгебре (уроки применения знаний и умений, уроки обобщения и повторения, развивающие самостоятельные работы, лабораторно-графические работы, лабораторно-практические работы, факультативы); приемов обучения алгебре (использование устных упражнений, вопросов, индивидуальных творческих заданий, решение вариативных и комплексных упражнений на интерактивной доске и с помощью компьютерных средств обучения); условий организации практико-ориентированного обучения математике (развитие мотивации у учащихся к выполнению заданий; реализация функций практико-ориентированного обучения учащихся через методы, приемы, формы и средства обучения учащихся; использование заданий, способствующих перенесению приемов и способов решения типичных упражнений на решение нетипичных и др.); научно-методического обеспечения процесса формирования конструктивных математических умений учащихся на основе выделенных условий реализации практико-ориентированного обучения математике.

Все это создаст необходимые предпосылки для развития у учащихся 7 – 9 классах конструктивных математических умений, являющихся составной частью реализации практико-ориентированного обучения математике. При традиционном преподавании причинами невысокого уровня развития конструктивных математических умений и навыков учащихся являются: недостаточная скоординированность работы учителей предметов естественного цикла в этом направлении, нечеткая ориентация учителей математики на проведение работы по развитию конструктивных математических умений и навыков учащихся, недостаточная разработанность методики формирования рассматриваемых умений, в том числе отсутствие системы упражнений, направленной именно на их формирование.

Таким образом, предметное содержание школьного курса математики (алгебры) рассмотрено как материал для обучения учащихся будущей деятельности, формируемой при практико-ориентированном ее преподавании. Формирование конструктивных математических умений способствует подготовке человека к будущей деятельности в обществе. Содержание образования позволяет освоить общие методы и формы человеческой деятельности, а предметное содержание курса математики выступает как средство, на котором проходит обучение учащихся. В этом и состоит решение главной проблемы.

Библиографический список

1. *Боровских, А.В.* Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика: пособие для системы профессионального педагогического образования, переподготовки и повышения квалиф. научн. пед. кадров [Текст] / А.В. Боровских, Н.Х. Розов. – М. : МаксПресс, 2010 – 80с.

2. *Боровских, А.В.* Эволюция целей и ценностей образования [Текст] / А.В. Боровских, Н.Х. Розов / Матэматыка: праблемы выкладання. – 2011. – № 2. – С. 50–60.

Об истории развития основных математических принципов криптографии и их иллюстративном значении при преподавании математических дисциплин.

Т.А. Ласковая, К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина, А.Г. Чернышова

Как часто, к сожалению, школьный учитель и даже преподаватель математики в высшем учебном заведении сталкиваются с отторжением своего предмета коллективом своих учеников. В особенности это характерно для учащихся 14-15 лет, для которых «характерна потребность в понимании применимости полученных знаний, иначе у подростков могут формироваться негативные убеждения и отрицательное отношение к предмету» [1].

Именно в этом возрасте у некоторых школьников возникает убеждение, что они «чистые гуманитарии». Аналогичные трудности иногда возникают у студентов младших курсов университетов. В частности это происходит в начале изучения курсов дискретной математики, поскольку ранее весь математический аппарат, с которым знакомили студента, основывался на ставших привычными понятиях связных множеств и непрерывных функций.

Преодолеть эти, с точки зрения авторов, серьезные трудности можно путем введения элементов сопровождающего исторического курса прикладных проблем математики дискретного характера.

Такими страницами истории могут, например, стать этапы становления криптографии, благо эти страницы могут быть проиллюстрированы не только историческими, но и литературными примерами.

1.Страницы истории криптографии. Подстановки как базовый элемент создания шифра.

Наиболее древними идеями шифрования сообщений являются подстановки и замены. Подстановку (или перестановку), состоящую из элементов конечного множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, можно трактовать как биективное функциональное отображение этого множества на себя:

$$f: X \to X. \qquad (1)$$

Всевозможные дискретные функции вида (1) называются подстановками или перестановками *n* элементов.

Подстановку из *n* элементов, поставив в соответствие каждому элементу один из различных номеров от 1 до *n*, можно обозначить так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots & k_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ - элементы множества *X*, записанные в порядке, соответствующем *n* номерам $k_1, k_2, \dots, k_n$.

В древнееврейских источниках часто встречаются упоминания о шифрах «Атбаш» и «Альбам» (см. напр. [2]).

Принципы их действия (применительно к латинскому алфавиту) определяются следующим образом:

1) $$\begin{pmatrix} ABC \dots XYZ \\ ZYX \dots CBA \end{pmatrix} \qquad (3)$$

для шифра «Атбаш» (*A* заменяется на *Z*,*B* на *Y*,…,*Z* на *A*). Ясно, что такая замена соответствует подстановке вида (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 25 & 26 \\ 26 & 25 & 24 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

2) шифр «Альбам» реализует замену по схеме

$$\begin{pmatrix} A & B & C & \dots & K & L \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \updownarrow \\ M & N & O & \dots & Y & Z \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} A & B & C & \dots & K & L & M & N & O & \dots & Y & Z \\ M & N & O & \dots & Y & Z & A & B & C & \dots & K & L \end{pmatrix},$$

что соответствует дискретной функции:

$f(i) = i + 13$ $(i = 1,2, \dots, 13)$ и $f(i) = i - 13$ $(i = 14,15, \dots, 26)$, или подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 13 & 14 & 15 & \dots & 26 \\ 14 & 15 & 16 & \dots & 12 & 1 & 2 & \dots & 13 \end{pmatrix}$$

Элементы приведенных шифров встречаются даже в древних рукописях Ветхого Завета. Так, в работе [4], указывается на использование шифра «Атбаш» в книге пророка Иеремии.

В историко-криптографической литературе часто упоминается шифр Гая Юлия Цезаря (100 – 44 гг. до н.э.), описанный Светонием, который сообщает об использовании шифров в переписке Цезаря и Цицерона (см.напр.[2]-[5],[9]).

Применительно к русскому современному алфавиту он выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \text{А Б В Г Д} \dots \text{Э Ю Я} \\ \text{Г Д Е Ё Ж} \dots \text{А Б В} \end{pmatrix}$$

Здесь при шифровании буква А заменяется на Г, Б на Д и т.д.

Такая схема соответствует подстановке (2) вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 31 & 32 & 33 \\ 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

или дискретной функции

$$f: i \to (i + 3) mod 33 \quad (i = 1,2, \dots, 33)$$

В некоторых случаях шифровальщики заменяли буквы на символы. Таким был, например, шифр «Братства франк-масонов» («Вольных каменщиков»).

Для русского алфавита он выглядел следующим образом. Исходные таблицы

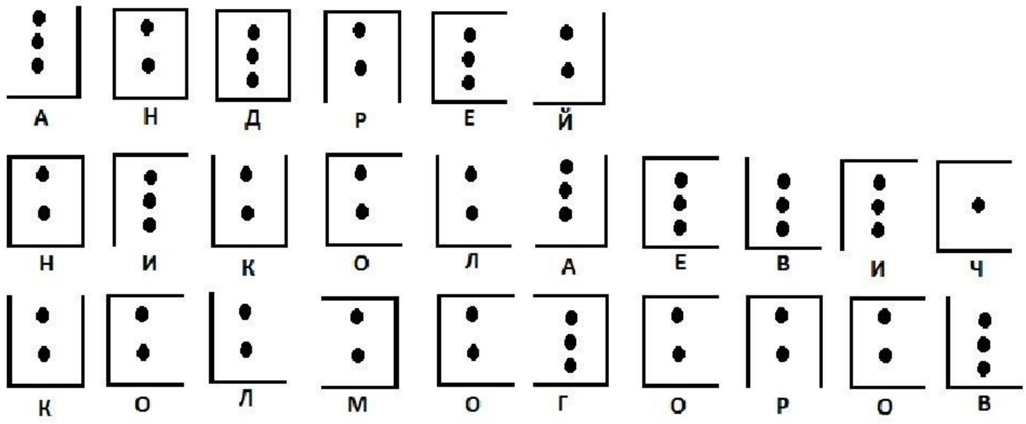
А⁝	Б⁝	В⁝
Г⁝	Д⁝	Е⁝
Ж⁝	З⁝	И⁝

Й:	К:	Л:
М:	Н:	О:
П:	Р:	С:

Т.	У.	Ф.
Х.	Ц.	Ч.
Ш.	Щ.	Ь.

Ъ	Э	Ю
Я		

В качестве примера приведем следующий шифртекст:



Хорошо известны и другие шифры (шифры Полибия, Виженера, Наполеона и других), о чем можно прочитать, например, в источниках [2], [4],[5].

Все эти шифры, основанные на подстановках, оказались крайне уязвимыми с позиций криптоанализа, основанного на частоте появления букв в текстах соответствующего языка. Таков был результат вскрытия шифра Марии Стюарт, приведший к обвинению ее в государственной измене и казни (см.напр.[2]).

Идеи усовершенствования подстановочных шифров всегда были довольно естественными и базировались на возможно более частой смене ключевой подстановки по некоторому секретному закону. К начале XX века такие же принципы были положены в основу функционирования, так называемых, книжных шифров и дисковых шифраторов.

Система дисков реализовала преобразование исходного текста X в шифртекст Y путем применения подстановки

$$T^{-\gamma(1)} \cdot X_1 \cdot T^{\gamma(1)-\gamma(2)} \cdot X_2 \cdot T^{\gamma(2)-\gamma(3)} \cdot \ldots \cdot T^{\gamma(n-1)-\gamma(n)} \cdot X_n \cdot T^{\gamma(n)},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 0\;1\;2\ldots n-2 & n-1 \\ 1\;2\;3\ldots n-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} \cdot X \cdot T = \begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ X_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i-1} \\ X_{i-1}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ X_{i-1}+1 \end{pmatrix},$$

$(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \ldots, \gamma_{(n)})$ – ключевой $(0, \pm 1)$ – вектор.

Далее шифры совершенствовались, но в схемах их всегда были использованы подстановки.

(Наиболее подробно в исследованиях криптоаналитиков освещались функциональные схемы шифратора «Энигма», состоящего на вооружении Германии во время II Мировой войны, и популярного позднее в практике ряда посольств и коммерческих организаций шифратора «Хагелин» [2]).

При абсолютном значении ключевой информации в практике простейшего шифрования встречалась так называемая «система одноразового блокнота:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{f_k} y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$X \xrightarrow{f_k} X, x \in X, y \in X,$$

где

$$y_i = (x_i + k_i) mod\ n \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

причем набор $(k_{\downarrow}1, k_{\downarrow}2, \dots, k_{\downarrow}n)$ случайно выбирается в множестве *X*.

Долгое время такая система защищала телефонную линию «Кремль-Белый Дом» [7].

2.1 Шифр Хилла (см.напр. [2] или [4])

Одной из попыток найти средство защиты от частотного криптоанализа стал шифр, запатентованный в 1930 г. Лестером Хиллом. Структура этого шифра определяется системой линейных уравнений

$$Y = A \cdot X \quad (mod\ n), \tag{3}$$

где X и Y – соответствующие столбцы матриц $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$,

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{km} \end{pmatrix}$ - матрица шифруемого (открытого) текста $(x_{11}x_{21} \dots x_{k1}x_{12}x_{22} \dots x_{k2} \dots x_{1m}x_{2m} \dots x_{km})$,

$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k1} & y_{k2} & \cdots & y_{km} \end{pmatrix}$ - матрица, определяющая зашифрованный текст шифротекст $(y_{\downarrow}11\ y_{\downarrow}21 \dots y_{\downarrow}k1\ y_{\downarrow}12\ y_{\downarrow}22 \dots y_{\downarrow}k2 \dots\ y_{\downarrow}1m\ y_{\downarrow}2m \dots\ y_{\downarrow}km)$, а

A – матрица размера ($k \times k$) – ключ шифрования при мощности алфавита *n* $(k < n)$.

В работе Хилла число *k*, как правило, предлагалось выбрать равным 2,3 или 4.

Матрица А, которая является секретной, должна была быть обратимой. Тогда расшифровка при ее знании проста:

$$X = A^{-1}Y \ , \tag{4}$$

причем должны выполняться условия:

$$\det A = 1 \tag{5}$$

или $\det A$ взаимно прост с n .

Достоинство шифра Хилла заключается в том, что он маскирует частоту вхождения отдельных букв и их комбинаций, то есть делает применение частотного криптоанализа малоэффективным. При этом, однако, знание соответствующего шифртексту открытого текста может быть использовано для определения ключевой матрицы А.

2.2. Задача о разделении секрета (см. напр. [7])

Одной из современных задач криптографии является проблема, так называемого, «разделения секрета», которая заключается в следующем.

Необходимо разделить информацию о секрете (как правило, это ключевая информация) между несколькими носителями так, чтобы только объединенной информации всех носителей можно было бы воссоздать секрет.

В качестве возможного примера А. Шамир [7] [8] приводит следующую схему, которую называет пороговой (threshold scheme).

Предположим, что каждому из носителей секретов $P_i (i = 0,1,\dots,n)$ известна информация (x_i, y_i), где

$$y_i = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k, \qquad (i = 0,1,\dots,n) \tag{9}$$

Тогда секрет $a_0, a_1, \dots, a_n$ однозначно определяется как единственное решение системы линейных уравнений (9) по модулю m , где m - мощность используемого алфавита (например, $m = 26$). В том случае, если хотя бы одна пара из $n+1$ пар (x_i, y_i) неизвестна, система (9) не имеет однозначного решения.

2.3. Анализ двоичных узлов преобразования

Обработка двоичной информации в современных криптосхемах сводится к анализу методов решения соответствующих систем булевых уравнений.

3. Криптографические иллюстрации при изучении классических математических дисциплин.

Приведенные выше сведения о криптографических результатах могут быть использованы как живые примеры при изучении различных разделов математических курсов. Такими разделами являются:

- изучение симметрической группы и решение подстановочных уравнений;
- решение систем линейных и матричных уравнений над кольцом Z_n ;
- определение условий целочисленности решения систем линейных уравнений;
- определение условий единственности решения систем линейных уравнений, определитель Вандермонда;
- решение систем булевых уравнений специального вида.

Кроме того, разумеется, при проведении занятий возможны примеры из литературных произведений, где используются методы вскрытия шифрованных посланий («Плящущие человечки» А.Конан-Дойля, «Кортик» А.Рыбакова, зашифрованная X глава «Евгения Онегина» А.Пушкина и т.д.) (см.напр. [3],[9]).

Библиографический список

1. *Крутихина, М.В.* Знакомство с математическим моделированием на уровнях алгебры основной школы. [Текст] /М.В.Крутихина/ Материалы Всероссийской научной конференции «Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика – Саранск:МГПИ,2002, - с.135-139.
2. *Бабаш, А.В.* Криптография [Текст] /А.В.Бабаш, Г.П.Шанкин – М.:СОЛОН-Р, 2002 – 512с.
3. *Рыбников, К.К.* Введение в дискретную математику и теорию решения экстремальных задач на конечных множествах [Текст]/К.К.Рыбников – М.:Гелиос – АРВ, 2010 – 320с.
4. *Гомес, Ж.* Математики, шпионы и хакеры. Кодирование и криптография [Текст] /Ж.Гомес/ пер.с англ. – М.:Де Агостини, 2014 – 144с.
5. *Черчхауз, Р.* Коды и шифры. Юлий Цезарь, «Энигма» и Интернет/ Р.Черчхауз – М.:Весь мир, 2005 – 320с.
6. *Столингс, В.* Криптография и защита сетей. Принципы и практика. [Текст] / В.Столлингс, пер. с англ. – М.: «Вильямс», 2001 – 672с.
7. *Земор, Ж.* Курс криптографии [Текст] / Ж.Земор (пер.с англ.) – М.:Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований, 2006 – 256с.
8. *Shamir, A.* How to share a secret [Текст] / A. Shamir / Comm.of the ACM, 22(1979) – pp.612 - 613.
9. Введение в криптографию / общ.ред. В.В.Ященко. М.:МЦНМО – ЧеРо, 1998 – 271с.

О возможном перераспределении части математического материала между школьными предметами математики и информатики

Д.Е. Нефедов

Целью данной статьи является рассмотрение некоторых проблем современного содержания школьных курсов математики и информатики. Этот вопрос актуализировался в связи с изменениями в содержании данных предметов [8, 9].

Для начала, рассмотрим несколько ситуаций, возникших на уроках информатики в разных классах, на разных ступенях обучения.

Первая ситуация возникла при изучении логических операций на уроке информатики. В ходе урока ученикам были даны определения логических операций, создана ассоциация между операциями и конструкциями русского языка (конъюнкция – «И», инверсия – «НЕ», импликация – «если… то…»), построены таблицы истинности операций. Переходу к построению таблиц истинности логических выражений помешал возникший у ученика вопрос: «А зачем мы учим математику на информатике?». «Этот раздел математики очень важен информатикам. На законах алгебры логики работает компьютер. Логические операции важны в программировании» – следует ответ. «Так пусть нам на математике и расскажут про все эти законы, а мы их на информатике только применять будем!» – парирует ученик. Далее учитель вынужден напоминать ученику, что информатика как наука сформировалась в рамках математики, поэтому четкая граница между ними до сих пор не построена. Однако обмануть таким образом интуицию ученика не удается. Несмотря на то, что грамотный ответ ученик подобрать не может, остается внутреннее убеждение, что науки науками, а для целостности учебных предметов математики и информатики важно четкое разграничение методологии учебных действий.

Следующие две ситуации встречаются при изучении на информатике темы «Системы счисления». Как правило, изучение данной темы начинают с краткого экскурса в историю способов записи чисел у разных народов мира. При этом регулярно приходится слышать от учеников: «Нам что-то такое говорили на математике, но мы уже забыли». Действительно, на уроках математики упоминаются римская, вавилонская, старославянская системы счисления, говорится о позиционных и непозиционных системах счисления. Но этот материал не имеет дальнейшего применения в рамках математики, поэтому большинством учеников он забывается. И поэтому на информатике приходится заново проходить эту тему, но только теперь она наконец-то находит практическое развитие. Кроме того, когда ученики уже знают системы счисления с различными основаниями, когда освоен алгоритм перевода из одной системы счисления в другую, изучаются операции в отличных от десятичной системах счисления. При этом просьба описать алгоритм умножения или деления в столбик, вызывает затруднение вследствие того что у учащихся выработан лишь механический навык его выполнения. И вновь приходится напоминать ученикам тему, которую они изучали ранее – арифметические алгоритмы.

Еще один случай произошел на одном из уроков информатики, посвященных циклическим алгоритмам, а конкретно при изучении цикла с параметром. С помощью данного цикла легко решаются задачи на нахождение n-го члена и суммы последовательности. Но данный тип задач вызывает неожиданные трудности из-за того, что у учащихся не сформированы необходимые понятия: на уроках математики после изучения арифметических и геометрических прогрессий тема последовательностей исчезает, не успевая создать устойчивые представления о частичной сумме и даже общем члене числовой последовательности, и ее приходится изучать на уроках информатики. При этом ряд учеников вновь выступают с фразой, знакомой по первой ситуации: «Почему мы это проходим здесь?»

Во всех предложенных случаях у школьников возникали проблемы, связанные с недостатком согласованности математики и информатики. Каковы же причины возникновения этих проблем?

Во-первых, перенасыщение курса информатики математикой. Например, абсолютно нелогичным выглядит изучение в рамках информатики арифметических алгоритмов. Бесспорно, представление о сущности данных алгоритмов должно формироваться на уроках математики. Но в рамках школьного курса оно формируется по схеме, исключающей осознанное применение, делающей умение лишь механическим навыком. Опыт информатики показывает, что систематизирующую роль в данном вопросе могут сыграть системы счисления. Которые, кроме того, способны помочь ученикам «освободить» понятие числа от жесткой привязки к десятичной системе счисления, вскрыть его абстрактную сущность. Подобное можно сказать и о математической логике. Изучение данной темы в рамках информатики кажется неправильным. Школьной математике логика могла бы помочь в задачах на доказательство, теории множеств (аналогия «пересечение» – «конъюнкция» и подобные). А информатике следовало бы оставить на рассмотрение применение математической логики – разработку логических устройств, построение алгоритмов со сложным ветвлением.

Кстати, среди нововведений школьной программы по аналогичным соображениям видится полезным распределение между предметами материала теории графов. Графы следует изучать на математике, потому что в первую очередь это язык описания математических структур. А на информатике полезно рассматривать вопросы представления графов, алгоритмов на графах.

Во-вторых, непонимание учениками, какую именно информатику они изучают. Ту, которая является практическим продолжением математики, где на основе известных математических фактов реализуется алгоритм или формализуется модель, ту, которая является расширением математики, неким факультативным математическим курсом, где изучаются и закрепляются математические факты, или же ту, где их просто учат работать с компьютерами. Данное непонимание, основанное на объединении в одном предмете всех перечисленных проявлений информатики, ярко иллюстрирует проблемы этой дисциплины. Учащиеся привыкли к тому, что название предмета коррелирует с его содержанием. С первой ступени обучения прослеживается строгое разделение учебного материала по предметам. Материал биологии рассматривается только на уроках биологии, а экология, появляющаяся позже, опирается на имеющиеся знания. Математика, изучение которой начинается в начальной школе, в средней разделяется на два предмета. Но при этом школьники понимают, что если предмет называется геометрией, то на уроках будут использовать знания и умения, характерные для геометрии, а если и будут решать задачу не геометрическим способом, то такое решение строится на некой модели геометрического объекта. Если же предмет называется «Алгебра и начала анализа», то на этих уроках они будут решать уравнения, неравенства, строить графики функций.

С другой стороны, школьный курс физики, опережая математику, использует понятия «вектор», «производная», «аппликата»; школьный курс химии – «логарифм», «вектор». То есть, проблема, аналогичная проблеме информатики, есть и в других предметах, использующих математический аппарат, хоть не столь острая. С чем связано это «лидерство» информатики? На наш взгляд, большее количество математического материала в информатике можно объяснить тем, что этот предмет намного моложе, чем другие школьные предметы.

Для подробного объяснения, рассмотрим понятие предметного контекста. Когда ученик приходит на урок, происходит первичная актуализация знаний. Эта первая волна вызывается знакомым учителем, знакомым кабинетом, но, главным образом, самим названием предмета. Актуализируется предметный контекст – общие, характерные для методологии предмета знания и умения. Критически важно сохранять предметный контекст целостным. Это связанно с тем, что актуализироваться может лишь ограниченное количество информации. И актуализация более широкого контекста в конце концов приводит к растерянности, неспособности ученика эффективно ориентироваться в смысловом поле.

Почему именно в информатике объединились несколько смысловых полей, обеспечить целостный методологический подход к которым, по-видимому, невозможно? Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [6]. Здесь же мы ограничимся схематичным описанием ситуации.

Процесс формирования программы школьной информатики представлял собой, в основном, механический перенос готовых методический решений из высшей школы в среднюю. Одним из следствий данного переноса стало дополнение курса информатики необходимым минимумом математического материала, который по той или иной причине отсутствует в школьной программе по математике, но присутствует в высшей. А так как блоки, объединенные в школьный предмет «информатика», имеют различную природу межпредметных связей с математикой, то получение необходимых для одного блока математических знаний, никак не способствует изучению других блоков. Это «обрастание» информатики математическим материалом стало причиной появления в ней целых разделов, по существу, являющихся математическими, тяготеющими к предметному контексту школьной математики.

Чтобы найти причину неэффективности механического переноса материала, достаточно сравнить принципы выстраивания математического материала в школе и в вузе [7].

В школе математика строится вокруг непрерывной последовательности усложняющихся задач. Теоретический материал излагается компактно и ориентируется именно на решение задач. Весь теоретический материал оказывается крепко связанным задачной базой.

В вузе главным является логическое строение материала, его представление в виде неразрывной цепи фактов, где каждое следующее звено соединено с предыдущим крепкой логической связью. Задачи используются здесь для подкрепления теоретического материалам. При этом ряд тем и вовсе не имеет задачной базы.

Так или иначе, содержание, характерное для высшего образования, в среднее перетекать будет. Но этот процесс надо сделать эффективным, уйти от механического переноса, построить работающую на практике научную модель. Если наметить формат эффективной модели переноса материала, то, по нашему мнению, он может выглядеть так:

1. Подбор типичных задач
2. Выстраивание усложняющихся линий из задач
3. Подбор теоретического минимума
4. Создание связей между темами
5. Окончательная доводка

В 4 и 5 пунктах создается система связей, основанная на взаимном усложнении типовых задач переносимого и традиционного материала.

Сформулируем конкретные предложения. В первой части статьи высказывались мысли о переносе части математического материала из информатики в математику – систем счисления, алгебры логики. В то же время, возможно, что окажется «выгодным» и обратное перемещение материала. К примеру, изучение комбинаторики более удобно на уроках информатики, где она гораздо чаще применяется и есть хорошие возможности обеспечения понимания через алгоритмы генерации сложных комбинаторных объектов. Пример более подробного изучения последовательностей на уроках информатики, приведенный выше, кроме того, что решит проблемы школьной информатики, вполне может оказаться решением проблем школьного математического анализа.

Особое внимание следует уделить тем разделам математики, введение которых в школу мы наблюдаем сегодня. Теорию графов, возможно, следовало бы разбить на две части и разместить их в два предмета (математика и информатика). Если следовать намеченному выше плану, то в первую очередь необходимо выделить типичные задачи и выстроить усложняющиеся линии. На наш взгляд, задачная база теории графов в школе для математики сформирована уже достаточно давно. Сюда входят те задачи, которые на сегодняшний день являются характерными для олимпиад по математике и те, которые входят в ЕГЭ по информатике. Эти задачи можно разделить на две группы – задачи на «небольшие» графы и задачи «на формулу». Первые задачи решаются путем изображения графа на плоскости, либо путем изучения матрицы смежности. И в том и другом случае рассматриваются графы с малым количеством вершин (как правило, не более 10) и с малым количеством ветвей (не более 30). Для решения задач второй группы необходимо применить какую-либо известную формулу теории графов (например, формулу Эйлера). Изучение теории графов должно начинаться в рамках школьной математики как можно раньше. Уже начиная с пятого класса можно рассматривать такие задачи, как задачи на нахождение минимального пути между точками, на нахождение количества путей между точками, так как данные задачи не требуют специальных знаний. Определять же графы строго стоит в 9 классе, после изучения комбинаторики. Теоретическим минимумом в данном случае будут являться понятия граф, множеств вершин, множество дуг, эйлеров граф, гамильтонов граф, цикл, остов графа, степень вершины, путь в графе; теоремы о рукопожатиях, эйлеровом графе и о существовании эйлерова пути. В сегодняшних учебниках алгебры теория графов служит лишь иллюстративным материалом для теории вероятностей. Следует сохранить эту связь, но при этом развить школьную математику и в направлении систематизации материала теории графов.

Это позволит информатике в 9 классе «подхватить» изучение теории графов. Здесь типичными задачами могут стать задачи характерные для математического курса графов с увеличенным количеством вершин и ветвей, а также алгоритмические задачи на объединение и пересечение графов, поиск в графе, нахождение пути в графе. Такие задачи целесообразно решать характерными для информатики вычислительными средствами в силу большого количества вершин и дуг, либо в силу сложности ручного подсчета результатов.

В заключение хотелось бы отметить, что, несмотря на то, что результатов экспериментальной проверки пока нет, предложенная схема переноса была апробирована на небольшом материале математической статистики. В сегодняшней программе школьной математики появляется все больше элементов математической статистики [4, 5], но, к сожалению, среди изучаемых тем не встречается крайне важная для школьных исследовательских работ тема – линейная регрессия. Построенный согласно изложенной схеме, на основе работ Афанасьева В.В. [1, 2, 3], факультативный курс позволил изучить данную тему уже в 9 классе, что благоприятно сказалось на качестве анализа экспериментов в рамках школьной исследовательской конференции. Это позволяет нам говорить о том, что данная схема готова к проверке и более крупным педагогическим экспериментом.

Библиографический список

1. *Афанасьев, В.В.* Линии регрессии и прогнозы в спорте. [Текст] / В.В. Афанасьев, И.Н. Непряев. // Ярославский педагогический вестник. – 2006. - №1. – С. 81-90.
2. *Афанасьев, В.В.* Теория вероятностей в вопросах и задачах: Учебное пособие. [Текст] / В.В. Афанасьев. – Ярославль: Изд-во. ЯГПУ, 2004. – 250 с.
3. *Афанасьев, В.В.* Школьникам о статистике в играх: учебное пособие. [Текст] / В.В. Афанасьев, М.А.Суворова – Ярославль: Изд-во. ЯГПУ, 2012. – 153 с.
4. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень). [Текст] / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.: ил.
5. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). [Текст] / А.Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2007. – 287 с.: ил.
6. *Нефедов, Д.Е.* Некоторые возможности взаимодействия математики и информатики в школе [Текст] / Д. Е. Нефедов // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «67 Герценовские чтения» / Под ред. В.В. Орлова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 156-158.
7. *Нефедов, Д.Е.* О проблеме переноса математического материала из вуза в школу [Текст] / Д. Е. Нефедов // Современные подходы к оценке и качеству математического образования в школе и вузе: материалы XXXII Международного семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. – Екатеринбург: ФГБОУ ВПО УрГПУ, ФГАОУ ВПО РГППУ, ФГБОУ УрГЭУ, 2013. – С. 184-186.
8. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть I. Начальное общее образование. Основное общее образование. / Министерство образования Российской Федерации. – М, 2004. – 221 с.

9. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II. Среднее (полное) общее образование. / Министерство образования Российской Федерации. – М, 2004. – 266 с.

Модельно-технологические характеристики деятельности учителя по использованию информационно-образовательных ресурсов, применяемых на П и Ш ступенях общего среднего образования (условия и направления)

И.А. Новик

В настоящее время в обществе наиболее остро стоит проблема подготовки человека к быстрому восприятию и обработке больших объемов информации, к овладению современными методами, формами, средствами и технологиями. В этой связи очень важной особенностью в обучении является возможность использования информационно-образовательных ресурсов для личностно-ориентированного выбора информации, которая отвечает целям обучения.

В условиях информационного общества к основным направлениям разработки модельно-технологических характеристик деятельности учителя по использованию информационно-образовательных ресурсов, применяемых на II и III ступенях общего среднего образования при обучении учащихся математике, информатике и другим дисциплинам, могут быть отнесены следующие:

1. Организация и проведение факультативных (кружковых) занятий старших классов на тему «Информационные технологии в обучении» с целью формирования основ медиа-культуры учащихся.
2. Использование учителями имеющихся программных комплексов, разработанных и рекомендованных главным информационно-аналитическим центром (ГИАЦ) МОРБ для обучения учащихся.
3. Создание и использование учителями фрагментарных мультимедийных средств обучения на основе имеющихся программных комплексов.

Формирование основ медиа-культуры старшеклассников является важной задачей обучения использованию информационных технологий.

Под нашим научным руководством Жилинская Т.С. выполнила диссертационное исследование [1], в котором раскрыла сущность и описала структуру основ медиа-культуры, что позволило классифицировать знания и умения, входящие в состав этих основ, а также разработать дидактический инструментарий их сформированности. Диссертация посвящена проблеме реализации информационных технологий в обучении студентов, но содержит большой практико-ориентированный материал, который может быть использован для обеспечения взаимодействия преподавателя с обучающимися в учебном процессе средней школы.

Для каждого из этапов формирования основ медиа-культуры автором разработаны и внедрены в практику обучения, формы, методы и приемы. К ним относятся, в частности, такие формы, как веб-исследования, электронный медиа-проект, выполнение веб-квеста, чат-дискурс, вебинар, виртуальная экскурсия и др.

Сущность основ медиа-культуры обучающихся любому из предметов по любой из выбранных специальностей определяется сформированностью системы знаний и умений осуществления коммуникации в электронной медиа-среде. На одно из первых мест в этом случае выходят организационно-коммуникационный и поисково-информационный компоненты. К организационно-коммуникационному компоненту относятся знания и умения организационно-коммуникационной деятельности в электронной медиа-среде: использование свойств (интерактивность, гипертекстовость, мульти-медийность, интегральность и др.) и технологий электронной медиа-среды (создание и обработка мультимедиа, веб-дизайн и др.); осуществление коммуникационного позиционирования (ролевого и интерсубъектного); и др. К поисково-информационному компоненту относятся знания и умения поиска и обработки информации.

Обучение старшеклассников основам медиа-культуры учителям целесообразно осуществлять при проведении кружковых или факультативных занятий на тему «Информационные технологии в обучении». Для организации системы таких занятий необходимо предусмотреть не только последовательное поэтапное изучение с учащимися материала по изучению информационных технологий, но и разработку научно-методического обеспечения по их применению в учебном процессе и диагностику достижения микро- и макро-целей обучения.

Еще одним направлением обучения состоит в использовании учителями имеющихся программных комплексов, разработанных и рекомендованных главным информационно-аналитическим центром МОРБ для обучения учащихся математике и информатике.

Интерес представляют программные комплексы, которые по их дидактическим целям подразделяют на 2 группы: обучающие и контролирующие.

К положительной стороне разработанных и одобренных ГИАЦ электронных средств обучения математике и информатике можно отнести тот факт, что в содержании всех из них предусмотрена тесная взаимосвязь теории и практики для обучения учащихся данной теме. Мультимедиа – совокупность компьютерных технологий, позволяющих создавать, использовать, воспроизводить все виды информации (текст, фотография, аудио, видео, анимация, рисунки, таблицы). Однако, имеющиеся на современном этапе в Беларуси программные комплексы не в состоянии полноценно обеспечить процесс обучения математике и информатике мультимедийными средствами обучения. Это связано с тем, что, во-первых, большинство из них являются разработками для самостоятельной работы учащихся. Во-вторых, среди них практически отсутствуют личностно-ориентированные мультимедийные средства обучения или те, которые могут реализовать принцип дифференциации обучения. Исследователям предстоит большая работа по их разработке.

Третьим направлением деятельности учителя по использованию ИОР при обучении учащихся математике и информатике в настоящее время является изучение и анализ учителями имеющихся программных комплексов, служащих созданию мультимедийных средств обучения. Известно, что на разработку качественного программного комплекса необходим определенный запас времени, грамотные программисты и методисты и много средств. В силу этого многие грамотные учителя средних школ для поддержания интереса учащихся к обучению самостоятельно создают фрагментарные мультимедийные средства обучения. В этом случае на первый план выступают те виды мультимедийных средств, которые помогают раскрыть содержание фрагмента урока. К ним относятся программы для создания презентаций, электронных учебников, словарей, энциклопедий, программы для контроля знаний. Для создания презентаций чаще всего используются MS Power Point, Slide Rocket, Google Dogs и др. Для разработки энциклопедий, словарей и электронных учебников наряду с MS Word можно использовать программу Sun Rav Book Editor, которая позволяет редактировать и создавать книги. Для контроля знаний удобны программы Easy Quizzy (позволяет разрабатывать тесты, содержащие шесть разных типов вопросов) и INDIGO (программа для создания тестов с пятью типами вопросов).

При этом создателям мультимедийных средств необходимо учитывать выявленные в научно-методической литературе условия успешной разработки личностно-ориентированных средств обучения. Они включают требования к наглядности мультимедийных средств обучения; к их содержанию; к индивидуализации, к эргономичности, к аппаратно-программной платформе [2, 3].

Трудность разработки единой методики применения мультимедиа в обучении заключается еще и в том, что внедрение таких средств или комплексов может происходить по двум направлениям:

1. Мультимедиа-средства включаются в учебный процесс в качестве «поддерживающих» средств в рамках традиционных методов исторически сложившейся системы школьного образования. В этом случае мультимедиа-ресурсы выступают как средство интенсификации учебного процесса, индивидуализации обучения и частичной автоматизации рутинной работы учителей, связанной с учетом, измерением и оценкой знаний школьников.

2. Такое применение мультимедиа-средств, которое приводит к изменению содержания образования, пересмотру методов и форм организации учебного процесса в школе, построению целостных курсов, основанных на использовании содержательного наполнения ресурсов в отдельных учебных дисциплинах. Знания, умения и навыки в этом случае рассматриваются не как цель, а как средство развития личности школьника. Использование мультимедиа технологий будет оправданным и приведет к повышению эффективности обучения в том случае, если такое использование будет отвечать конкретным потребностям системы общего среднего образования, если обучение в полном объеме без использования соответствующих средств информатизации невозможно или затруднительно.

Таким образом, можно выделить основные группы задач, решаемые с помощью мультимедиа:

– поддержка учебной работы учащихся;
– обеспечение реальной коммуникации с носителями языка;
– обеспечение доступа всех участников учебно-воспитательного процесса к быстро растущим информационным фондам, хранящимся в централизованных информационных системах;
– обеспечение взаимодействия между педагогами, обмен педагогическим опытом и дидактическими материалами.

Однако, для того, чтобы наиболее эффективно использовать мультимедийные средства на уроках, необходимо соответствующее материальное обеспечение (компьютерные классы, оснащенные проектором и демонстрационным экраном), рекомендуется индивидуальный подход, включающий широкое использование индивидуализированных обучающих программ и наличие банка многоуровневых заданий. Эффективно также использование единого проекта, в рамках которого необходимо соблюдать принципы последовательности и преемственности. Это значит, что одно глобальное задание должно последовательно выполняться во всех практических работах, дополняться и расширяться, воплощаясь в стройную завершённую систему. Должна быть предусмотрена возможность параллельного и концентрического изучения основных разделов программы, что позволит обучающимся по мере усвоения курса получать все более глубокие знания по каждому из разделов, без потери целостности всего материала. Следует шире использовать проблемный метод обучения, предусматривая самостоятельную (под руководством учителя) разработку обучающимися программ, документов, таблиц, баз данных, которые могут быть использованы в процессе обучения.

В проектах, основанных на ролевых играх, участники общаются друг с другом, играя определенную роль. К примеру, в университете Вирджинии профессор истории Дженнингс Ваггонер становится Томасом Джефферсоном посредством электронной почты для нескольких классов элементарной школы из разных мест, изучающих историю США. В проекте, спонсируемом госдепартаментом образования штата Небраска и университетом Небраски в Омахе, старшекурсники по электронной почте играют роли главных персонажей из книг, которые учащиеся элементарных школ Восточной Небраски читают со своими учителями. Имеется большое количество таких проектов исторической направленности. В странах СНГ, к сожалению, не ведется таких проектов, однако учителя могут предложить учащимся «примерить» на себя роли известных программистов, или компьютерных дизайнеров. Очевидно, что при разработке и использовании таких игр следует учитывать как особенности содержания обучения, так и психолого-дидактические закономерности, мотивационно-ценностные установки и возрастные особенности обучаемых (то, что подойдет для 6 класса, будет неуместно в 10).

Некоторые проекты можно построить на сборе, обработке, сопоставлении учащимися различного рода представляющей интерес информации. Например, можно предложить школьный проект для всех классов по сбору информации определенной темы: игры, книги, способы запоминания информации, пословицы, фильмы, праздники, туристическую информацию. Организацию данной информации можно поручить учащимся старших классов. Данные проекты хороши тем, что не требуют участия учителя, за исключением начального этапа, при этом повышается коммуникация между учащимися разных классов, навыки работы с компьютером, также идет обучение «учащийся − учащемуся». Но для успешной реализации этого проекта необходимо обеспечить свободный доступ учащимся к этой информации, а также предложить тему, которая будет действительно интересна и актуальна для них. Учащимся можно предложить выпускать газету или журнал, как в электронном варианте, так и в печатном.

На любом этапе урока возможно применение мультимедийных технологий, и их применение зависит, в первую очередь, от целей, которые поставил перед собой учитель. Тем не менее, практика позволяет выделить некоторые общие, наиболее эффективные приемы применения таких средств:

1. При изучении нового материала позволяет иллюстрировать разнообразными наглядными средствами. Применение особенно выгодно в тех случаях, когда необходимо показать динамику развития какого-либо процесса (презентации).
2. При закреплении новой темы (программы-тренажеры)
3. Для проверки знаний (программные системы контроля знаний).
4. Для углубления знаний, как дополнительный материал к урокам (электронные энциклопедии, словари, учебники, обучающие игры, презентации).
5. При проверке фронтальных самостоятельных работ. Обеспечивает наряду с устным, визуальный контроль результатов (программные системы контроля знаний).

Таким образом, использование мультимедиа-средств на уроках значительно повышает усвояемость учебного материала и интерес учащихся к информатике. Однако при их использовании следует внимательно следить как за внешним оформлением мультимедийного средства обучения, так и за его содержанием, так как очень легко превратить его из «помощника» во «врага» учебного процесса. На уроках в базовой школе эффективней всего использование презентаций и программ-тренажеров, а также контролирующих программ, но во многом разнообразие применяемых средств зависит от медиа-грамотности учителя.

Работа, проводимая в системе среднего образования по трем указанным направлениям, целенаправленно способствует становлению модельно-технологических характеристик деятельности учителя по использованию информационно-образовательных ресурсов, применяемых на II и III ступенях общего среднего образования в обучении математике (информатике).

Библиографический список

1. *Жилинская, Т.С.* Формирование основ медиа-культуры студентов при обучении информационным технологиям (на примере специальности «Культурология»): автореф. дис.… канд-та пед. наук: 13.00.02 [Текст] / Т.С. Жилинская; Белорус. гос. Пед. ун-т. – Минск, 2014. – 31 с.
2. *Новик, И.А.* Педагогические проблемы использования электронных средств обучения в системе математического образования [Текст] / И.А. Новик // Ярославский педагогический вестник. Гуманитарные науки. – 2008.– №3 (56) С.12-16.
3. *Щерба, А.Л.* К вопросу использования мультимедиа в процессе личностно-ориентированного подхода к обучению учащихся информатике в базовой школе.

Сборник тезис докл. Республик. научно-практ. конфер., посвящ. 450-летию со дня рождения Г.Галилея [Текст] / А.Л. Щерба, И.А. Новик, – Брест: Бр ГУ. – 2014г. – С.40.

Изучение темы «Комплексные числа» с интерактивной геометрической средой GeoGebra

Р.П. Овчинникова

Согласно основным образовательным программам [7], разработанным по новому государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования [9] в содержание учебных предметов «Математика» и «Алгебра и начала математического анализа», как базового, так и профильного (углубленного) уровня, включена тема «Комплексные числа». Данная тема завершает основную проходящую через весь школьный курс линию последовательного расширения числовых множеств и связана с другими важными разделами — решением уравнений, тождественными преобразованиями многочленов и тригонометрических выражений, даёт возможности установления тесных связей с геометрией — векторным и координатным методом, геометрическим местом точек, преобразованиями плоскости.

Анализ содержания темы «Комплексные числа» различных учебников алгебры и начал математического анализа [1, 3–6] позволяет выделить следующую инвариантную часть данной темы: *Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа. Возведение в натуральную степень (формула Муавра). Основная теорема алгебры.*

К общеучебным умениям, навыкам и способам деятельности в ходе изучения алгебры и начал математического анализа в основной образовательной программе [7] отнесено использование различных языков математики для иллюстрации, интерпретации, аргументации и доказательств; решение широкого класса задач из различных разделов курса, поисковой и творческой деятельности при решении задач повышенной сложности и нетиповых задач; самостоятельного составления формул на основе обобщения частных случаев и результатов эксперимента; проверки и оценки результатов своей работы, соотнесения их с поставленной задачей, с личным жизненным опытом.

Предметными и межпредметными результатами освоения основной образовательной программы изучения курса алгебры и начал математического анализа [7] являются формирование представлений о гипотезах и фактах, принципах математического моделирования; приобретение и развитие навыков исследовательской, проектной и информационно-познавательной деятельности; формирование умения видеть различные стратегии решения задач; использование готовых компьютерных программ для поиска пути решения учебных и исследовательских задач.

Одной из программ, с помощью которой можно получить перечисленные результаты, является интерактивные геометрические среды. Рассмотрим область применимости одной из них - GeoGebra - при изучении темы «Комплексные числа».

Инструментами и командами поддержки решения основных видов задач данной темы являются:

– инструмент $\bullet^{z}$, создающий комплексное число, отображаемое в виде геометрического образа — точки с координатами $(a;\ b)$ на чертежной плоскости (полотне) и в алгебраической форме $z = a + bi$ в окне объектов (рис. 1);

– математические операции, введение которых осуществляется с помощью строки Ввода, а выполнение фиксируется в окне объектов:

- ВещественнаяЧасть(z) и МнимаяЧасть(z),
- сложение $z_1 + z_2$, вычитание $z_1 – z_2$, умножение $z_1 * z_2$ и деление комплексных чисел z_1 / z_2;
- abs(z) и arg(z), вычисляющие модуль комплексного числа и его аргумент;
- sqrt(z) и cbrt(z), вычисляющие одно значение корня второй и третьей степени соответственно и др.

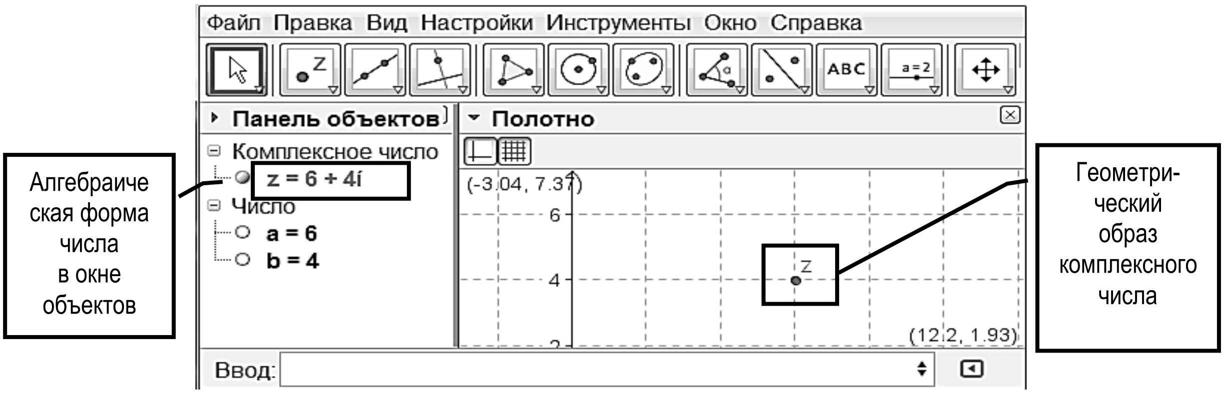


Рис. 1

Возможности управления интерфейсом позволяют изменять обозначения осей абсцисс и ординат с *x* и *y* на *Re* и *Im*, запрещать доступ к некоторым инструментам, например, для постановки задач на построение циркулем и линейкой (например, задача 3).

Вычислительные возможности выполнения математических операций сложения, вычитания, умножения, деления комплексных чисел и возведения в степень в алгебраической и тригонометрической формах позволяют учащимся в рамках организации проектной деятельности создавать тренажеры, а учителю создавать дидактические материалы для организации индивидуальной работы учащихся по решению задач на выполнение перечисленных действий, нахождение значений выражений, функций, вычисление членов арифметической/геометрической прогрессии и др. Для создания тренажёров/дидактических материалов на отработку/проверку навыков выполнения действий умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, достаточно построить на чертежном полотне с помощью инструмента Комплексное число два числа z_1 и z_2, а затем их произведение или частное, значение которого появится в окне объектов. Изменяя значения z_1 и z_2 обычной сменой положения соответствующих точек на полотне, получаем множество вариантов примеров данного типа (рис. 2).

Если изменение значений комплексных чисел задать с помощью ползунков, то результаты вычислений можно будет занести в таблицу. Причём, таблицы GeoGebra позволяют вычислять, в отличие от таблиц Excel, значения функций с комплексными переменными. Рисунок 3 демонстрирует вычисление значений функции $w(z) = z^3 – 4z^2 + 28z$ при различных значениях переменной *z* и заполнение значениями *z* и *w* ячеек таблицы.

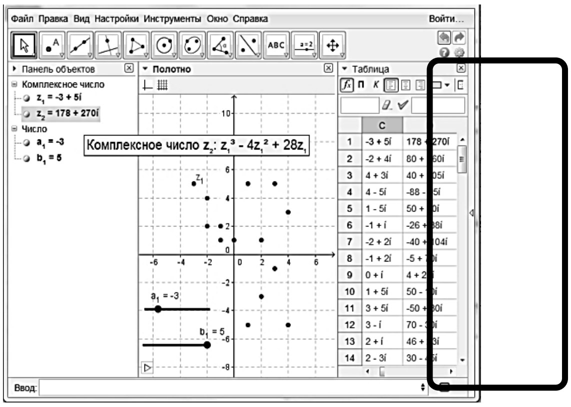


Рис. 2 Рис. 3

Интерпретационные возможности программы GeoGebra позволяют осуществлять переход от алгебраической формы комплексного числа к его тригонометрической форме. Для этого следует во вкладке Алгебра свойств комплексного числа выбрать отображение полярных координат (рис. 4).

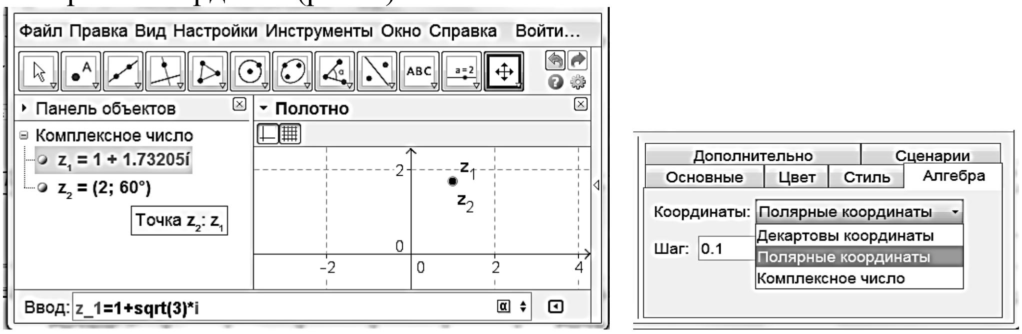


Рис. 4

Главным достоинством программы является возможность её использования для геометрических интерпретаций комплексных чисел и выполнения заданий по изображению на комплексной плоскости множества всех чисел, удовлетворяющих определённым условиям. Например:

1. Изобразите множество всех точек z комплексной плоскости, для которых выполнены данные условия: а) Im $z = 2$; б) Re $z = -1$; в) Im $(z + \mathrm{i}) = 0$; г) Im $z > 0$; д) Re $z \le 3$; е) Re $(z+2) > 0$; ж) $\begin{cases} \operatorname{Im} z > 3 \\ \operatorname{Re} z < 2; \end{cases}$ з) Re $2z > 0$; и) Im $2z = 1$; к) Re $iz = 1$; л) Re z + Im $z = 1$ [2].

2. Дано множество всех точек z комплексной плоскости, таких, что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$. Изобразите множество всех точек u, удовлетворяющих данным условиям: а) $u = z + 1$; б) $u = z - i$; в) $u = z + 2i - 1$ [2].

3. На комплексной плоскости изображена точка z. С помощью циркуля и линейки постройте точку $\dfrac{1}{z}$ [8].

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra позволяет строить траектории движения точек, зависящих от движения других точек с помощью инструментов След и Локус  (рис. 5). Эту возможность можно использовать для поиска способа решения более сложных заданий на поиск геометрического места точек, проверки решений и постановки новых заданий в рамках исследовательского обучения.

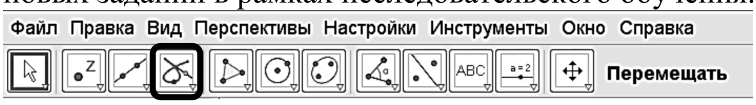


Рис. 5

Например:

4. Пусть множество точек z комплексной плоскости удовлетворяют равенству
$|z - i| = 1$. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек u вида: а) $u = 2z$; б) $u = z - 2 + 3i$; в) $u = iz$; г) $u = z^2$. Обоснуйте полученный результат.

5. Пусть точка u движется по периметру квадрата с вершинами в точках $u_1 = 0$, $u_2 = i$, $u_3 = 1 + i$, $u_4 = 1$. Изобразите траекторию, по которой движется точка $z = u^2$ [2].

Заметим, что учащиеся могут выполнять задание 4а-г двумя способами:

– непосредственным, как в обычных тетрадях, изображением множества с помощью инструмента Окружность , если им известно геометрическое место точек, заданное таким способом. Например, в случае 4а получается окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом 2, в случае 4б — окружность с центом в точке (–2; 4) радиусом 1;

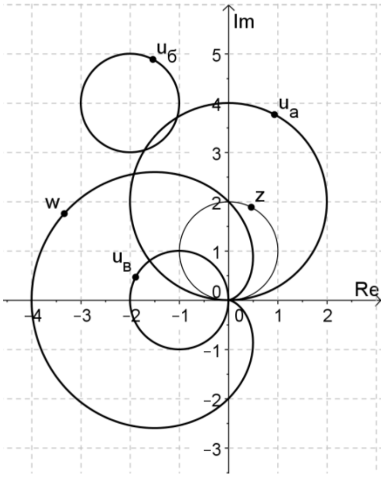


Рис. 6

– исследованием множества с помощью инструментов След и Локус , если не известно искомое геометрическое место точек. Например, в случае 4в получается окружность, полученная с помощью поворота вокруг начала координат на угол 90°. Окончательной целью выполнения таких заданий является, конечно же, обоснование полученного результата. Более интересным является результат 4г, который выводит учащихся на ряд исследовательских работ, таких как «Кардиоида», «Исследование многочленов с комплексными переменными», «Преобразования комплексной плоскости» и др.

Для нахождения решения задачи 5 в ИГС GeoGebra следует построить квадрат с помощью инструмента Ломаная  или Многоугольник . Затем на ломаной отметить комплексную точку u и с помощью окна ввода — точку $z = u^2$. Если же квадрат построен как многоугольник, то сначала следует воспользоваться инструментом Точка на объекте , а затем во вкладке Алгебра в её свойствах изменить интерпретацию с декартовых координат на комплексное число. С помощью команды След или инструмента Локус  изображаем траекторию движения точки z. Легко получить траектории и в случаях $z = u^3$, $z = u^4$ и т.п. (рис. 7). Также можно менять и линию, по которой движется точка u.

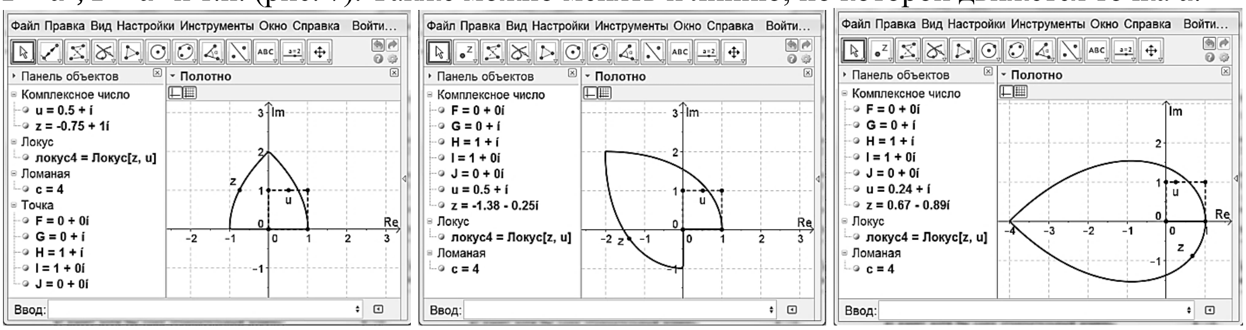


Рис. 7

Решение некоторых уравнений с комплексными переменными допускает кроме алгебраического решения и геометрическое, которое является наиболее простым и тем самым более предпочтительным. Рассмотрим, например, различные способы решения следующей группы похожих задач:

6А. Решите уравнение $|z + 3i| = |z + 4|$ [4].

6Б. Изобразите множество всех точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z + 3i| = |z + 4|$ [4].

6В. Какое наименьшее значение может принимать $|z|$ среди чисел, удовлетворяющих условию $|z + 3i| = |z + 4|$?

Алгебраический способ. Пусть $z = x + yi$. Тогда $|x + yi + 3i| = |x + yi + 4|$, откуда $|x + (y + 3)i| = |(x + 4) + yi|$. По определению модуля комплексного числа получаем: $x^2 + (y + 3)^2 = (x + 4)^2 + y^2$. После преобразований: $(y + 3)^2 - y^2 = (x + 4)^2 - x^2$, $3(2y + 3) = 4(2x + 4)$ получим $6y = 8x + 7$ или $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$. В интерпретации вопроса задачи 6А ответ должен быть записан в форме комплексного числа $z = x + \left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right)i$, где $x \in$ R, 6Б — в виде графика линейной функции $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$. Для ответа на вопрос задачи 6В следует найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right)^2}$. Для этого преобразовываем его к виду $\sqrt{\left(\frac{5}{3}x + \frac{14}{15}\right)^2 + \frac{49}{100}}$, откуда наименьшим значением исходного выражения является $\frac{7}{10}$.

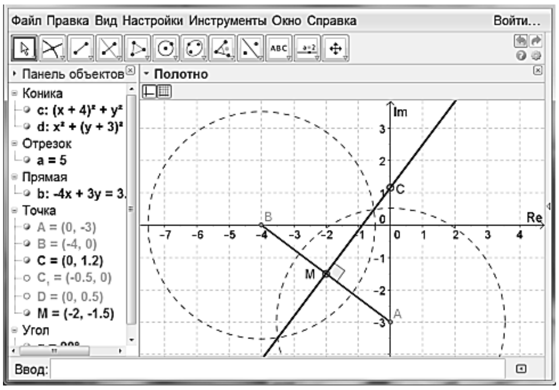


Рис. 8

Геометрический способ. Изобразим на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} |z + 3i| = r, \\ |z + 4| = r. \end{cases}$ Этим множеством будет пересечение двух окружностей с центрами в точках A (0; –3), B (–4; 0) и радиусом r. Это есть серединный перпендикуляр к отрезку AB. Точка M(–1,5; –2) — середина AB. Если вопрос решения задачи стоял в изображении геометрического места точек, то на этом решение можно и закончить. Если же требуется найти уравнение серединного перпендикуляра, можно рассмотреть подобные треугольники ABO и AMC, откуда $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{OA}$, $AC = \frac{AM \cdot AB}{OA} = \frac{AB^2}{2OA}$. $AC = \frac{4^2 + 3^2}{2 \cdot 3} = \frac{25}{6}$. $b = OC = \frac{25}{6} - 3 = \frac{7}{6}$, $k = tg\angle BAC = \frac{OB}{OA}$, $k = \frac{4}{3}$. Таким образом, $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$. Чтобы найти, какое наименьшее значение принимает $|z|$ среди удовлетворяющих данному условию чисел, достаточно отыскать длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на рассматриваемый серединный перпендикуляр: $p = \frac{AM \cdot OC}{AC}$, откуда $p = \frac{5 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 6 \cdot 25} = \frac{7}{10}$.

Рассмотренный геометрический способ решения уравнений с комплексными переменными позволяет решать не только уравнения вида $|z - a_1| = |z - a_2|$, но и некоторые другие уравнения и неравенства. Например:

7. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z - 25i| \leq 15$, найти число, имеющее наименьший аргумент [8].

8. Решить уравнение $|z| - iz = 1 - 2i$ [5].

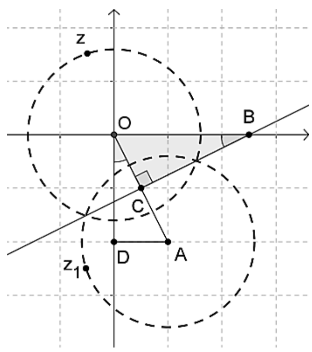


Рис. 9

В учебнике [5, с. 161] (пункт «Геометрическое представление комплексных чисел») приведено алгебраическое решение уравнения 8, которое логично дополнить геометрическим решением.

Уединим модуль комплексного числа z, преобразовав уравнение к виду: $|z| = iz + (1 - 2i)$. Модулем комплексного числа является действительное число. Пусть $|z| = r$. Геометрическим местом множества комплексных, удовлетворяющих равенству $|z| = r$, является окружность с центром в начале координат O и радиусом r. Геометрической интерпретацией множества $iz + (1 - 2i)$ при условии $|z| = r$ является окружность с центром точке $A(1; -2)$ и радиусом r. Геометрическим местом точек, являющихся пересечением двух окружностей равных радиусов, является серединный перпендикуляр к отрезку OA. Серединный перпендикуляр пересекает ось действительных чисел в единственной точке B. Найдем её координаты.

Из треугольника OAD $OA = \sqrt{5}$, $\sin\alpha =$. В треугольнике OBC $\sin\alpha = \frac{Oc}{OB}$, $OC = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Отсюда $OB = \frac{Oc}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{1}{\sqrt{5}} =$. Это радиус r окружностей. Таким образом, $iz + 1 - 2i =$. Откуда $z = 2 - i$.

Развитию навыков исследовательской деятельности способствует выполнение моделей и решение следующих задач повышенной сложности:

9. Исследуйте значение выражения $\frac{z-1}{z+1}$, если а) $|z| = 1$, б) $|z| \neq 1$?

10. Постройте и исследуйте геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению $|z - a_1| = k|z - a_2|$, $k \in \mathrm{R}$, $k \neq 1$.

11. Постройте экспериментальную модель для обнаружения формулы произведения двух комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме. Докажите полученную формулу.

12. Разработайте инструмент нахождения всех значений корня n-ой из комплексного числа.

13. Для каждого действительного числа $a \geq 0$ найти комплексные числа z, удовлетворяющие равенству $|z|^2 - 2iz + 2a(1 + i)$ [10].

14. При каких действительных значениях a любое комплексное число, удовлетворяющее равенству $|z - i\sqrt{2}| = (a + 1)^2$, удовлетворяет одновременно и неравенству $|z - \sqrt{2}| > a^2 - 4a$? [10]

15. При каких действительных значениях a хотя бы одно комплексное число z, удовлетворяющее равенству $|z - ai| = a + 4$, удовлетворяет одновременно и неравенству $|z - 2| < 1$? [10]

Библиографический список

1. *Никольский, С.М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни [Текст] / С.М. Никольский и др. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 464 с.
2. *Карп, А.П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики [Текст] / А.П. Карп / – М.: Просвещение, 1995. 176 с.
3. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала математического анализа10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) [Текст] / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов / – М.: Мнемозина, 2010. 425 с.

4. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) [Текст] / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов / – М.: Мнемозина, 2010. 551 с.
5. *Муравин, Г.К.* Алгебра и начала анализа. 11 кл.: учебник для общеобразоват. учреждений [Текст] / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. 3-е изд. М.: Дрофа, 2007. 253 с.
6. *Нелин, Е.П., Лазарев, В.А.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни [Текст] / Е.П. Нелин, В.А. Лазарев / – М.: Илекса, 2011. 432 с.
7. *Седова, Е.А.* Примерные программы среднего (полного) общего образования : математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия : 10-11 классы [Текст] / Е.А. Седова и др.; под общ. Ред. М.В. Рыжакова. М.: Вентана-Граф, 2012. 136 с.
8. *Туманов, С.*И. Поиски решения задачи [Текст] / С.И. Туманов / М.: Просвещение, 1969. 280 с.
9. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (10-11 кл.). URL: http://standart.edu.ru/
10. *Шарыгин, И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. [Текст] / Шарыгин И.Ф./ – М.: Просвещение, 1989. 252 с.

Что такое эстетическая геометрия

Р.Р. Пименов

Весной этого года федеральная образовательная сеть «Школьная Лига» подготовила к печати книгу «Эстетическая геометрия или теория симметрий». Эта книга возникла после длительных факультативов по эстетической геометрии в С-Петербургском лицее «Физико-Техническая Школа». Содержание книги шире школьной программы: методы эстетической геометрии удобно вводят в идеи современной математики, позволяют конструировать программы видео-арта, существенны для дизайна и интересны сами по себе. Ниже – сжатое описание математических идей и компьютерных разработок, содержащихся в книге. Материалы к книге также есть на сайте
http://bogemnyipeterburg.net/revolt/matem/pict/index.html

Основная идея

Эстетическая геометрия начинается с понятия инверсии относительно окружности. Распространены два определения инверсии: одно дается формулой $x*y=r^2$, другое – геометрическое, основанное на хорде и касательных. Эти определения обсуждаются в первой, вводной части книги, также там обсуждается окружность как промежуточная фигура между точкой (окружность нулевого радиуса) и прямой (окружностью бесконечно-большого радиуса). Также в первой части рассматривается связь между инверсиями на сфере и плоскости и указывается простой стереометрический способ определения инверсии на сфере (§§ 6, 7), А-отображения и понятие бесконечно удаленной точки.

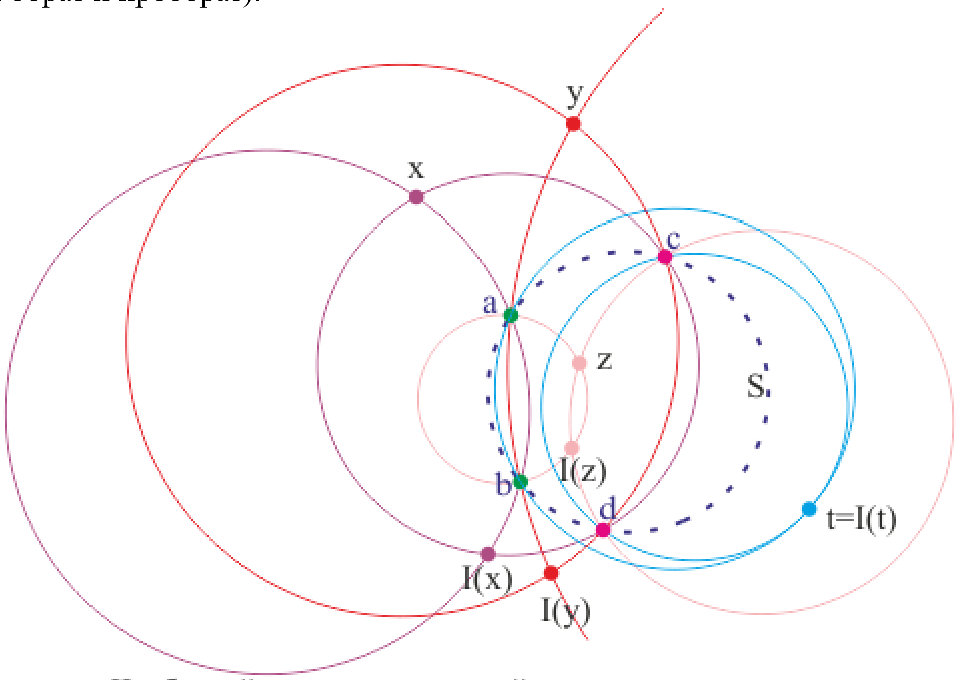
Эстетическая геометрия рассматривает окружность и симметрию относительно нее как основные понятия, не определяемые на основании метрики или свойств прямых. Прямая в эстетической геометрии – частный случай окружности. Окружность мыслится не как множество точек, равноудаленных от данной (центра), а как симметрия и неподвижная при этой симметрии линия. Поэтому первая задача эстетической геометрии – определить инверсию в рамках самой геометрии окружности, без измерения расстояний и проведения прямых. При этом окружность определяется не центром, а тремя точками на ней. Это делается во второй части книги где излагаются новые методы симметрии, схожие с идеями книги Бахмана «Построение геометрии на основе понятия симметрии». Здесь геометрический материал оказывается еще содержательнее. За основу берутся понятие ортогональных (перпендикулярных окружностей) и два свойства инверсии (симметрии между окружностями), §10 :

1. Если две точки x и y симметричны относительно окружности I (I(x)=y), то любая окружность, проходящая через них – ортогональна I.

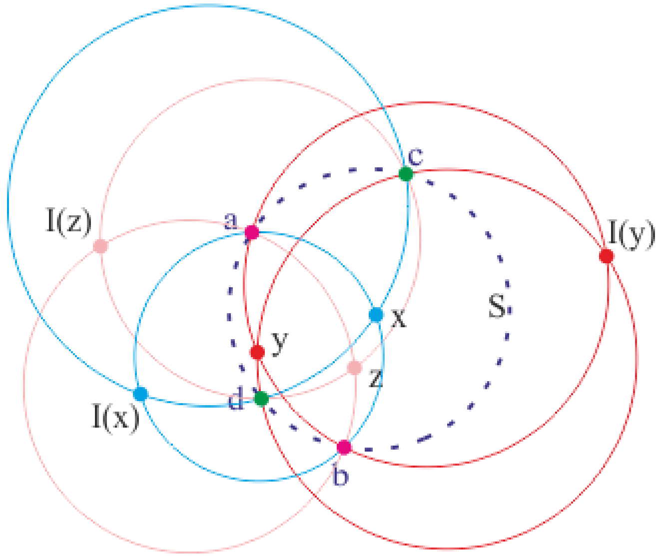
2. Если имеются две пары симметричных точек, то все четыре точки лежат на одной окружности. Иными словами: если (I(x)=y и I(w)=v, то x, y, w, v – лежат на одной окружности.

Ортогональность окружностей определяется их неподвижностью при симметрии друг относительно друга. Окружность W ортогональна окружности V означает что W(V)=V или что W*V=V*W (симметрии W и V коммутируют, в эстетической геометрии окружность – не только геометрическая фигура, но и симметрия относительно нее), эти свойства аналогичны свойствам перпендикулярных прямых.

Свойство 2 легко вывести из 1. Ввиду важности для многих теорем 2 называется первой теоремой эстетической геометрии. Первая теорема позволяет удобно определить симметрию в эстетической геометрии (мире окружностей) не используя метрической геометрии. Пусть нам известны образы пары точек a и c при симметрии I (неизвестно, относительно какой окружности) I(a)=b, I(c)=d. Чтобы такая симметрия I существовала необходимо и достаточно, чтобы все четыре точки: a, b, c, d – лежали на одной окружности. Образ произвольной точки x находится во второй точке пересечения двух окружностей, проходящих через нее: первая через x, a, b (x, образ и прообраз), вторая через x, c, d (x, другой образ и прообраз).



Чтобы найти по произвольной точке x симметричную ей точку I(x), проведем одну окружность через x, a, b и вторую окружность через x, c, d. Вторая точка пересечения (первая - сама точка x) и будет искомой.

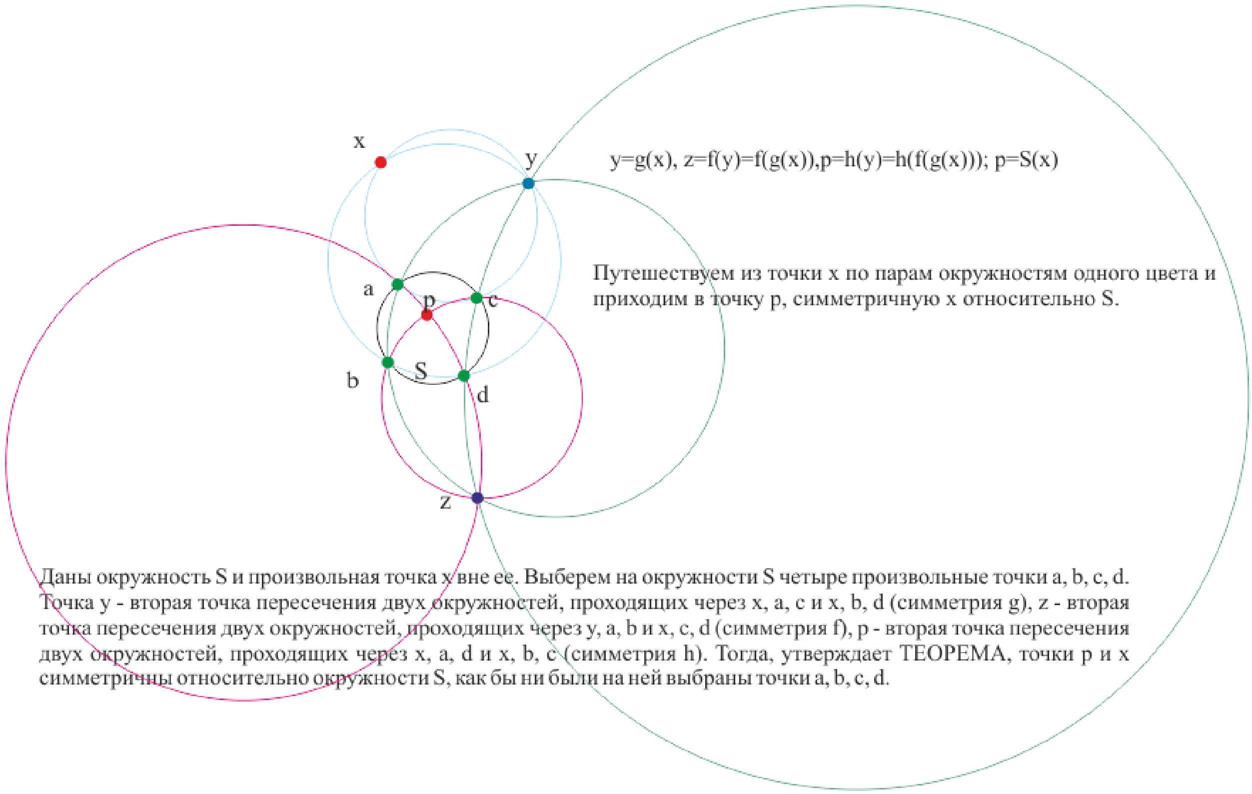


Другое расположение исходных пар точек (a, b) и (c,d). Теперь они *разделяют* друг друга (на окружности S). Тогда *любая* окружность, проходящая через a и b пересекает *любую* окружность, проходящую через c и d. Поэтому у симметрии I нет неподвижных точек. Как и при симметрии, связанной с окружностями-обручами.

Последний рисунок иллюстрирует «мнимую инверсию» или симметрию окружностей при которой нет неподвижных точек.

Подобного простого построения симметрии относительно прямой с помощью одной линейки в евклидовой геометрии, в афинной или проективной геометрии, в геометрии Римана или Лобачевского нет. В геометрии прямых для определения симметрии нам надо иметь угольник, уметь измерять длины, не так просто и определение инволюции в проективной геометрии. В эстетической геометрии симметрия строится проведением всего двух окружностей. Это открывает легкий путь к доказательству большого числа «школьных теорем» об окружностях: §§15, 16. В классической геометрии или в методах Бахмана нет наглядных теорем, доказательство которых методами симметрии проще, чем обычными приемами. В эстетической геометрии все теоремы доказываются с помощью симметрии, например, известные теоремы о 4 окружностях, касающихся друг друга по цепочке или теоремы о серединной окружности §9, §12. Появляются и наглядные геометрические теоремы, простейшее доказательство которых основано на методах теории групп (свойств композиции симметрий). Это связывает ее с Эрлангенской программой Феликса Клейна ставящую теорию групп в центр геометрии.

Пример нетривиальной теоремы такого рода – теорема о разбиении четырех точек (лежащих на одной окружности) на пары тремя способами §35. Указанный ранее способ определения симметрии окружностей по двум парам симметричных точек не определяет симметрию данной точки x относительно данной окружности S. Эта принципиально важная задача решается так: выберем на S четыре произвольные точки a, b, c, d. Выше показано, что четыре точки, разбитые на пары образ-прообраз однозначно определяют симметрию окружностей. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами и каждое разбиение определяет свою симметрию. Обозначим эти симметрии g, f, h. **Теорема о разбиении четырех точек на пары тремя способами утверждает**, что как бы ни были выбраны исходные, лежащие на S точки a, b, c, d композиция симметрия h(f(g(x)))=S(x) для любой точки x или S=h*f*g. Тем самым указан несложный способ построения симметрии точки x относительно данной окружности S, требующий проведения всего шести окружностей, три раза по паре окружностей.



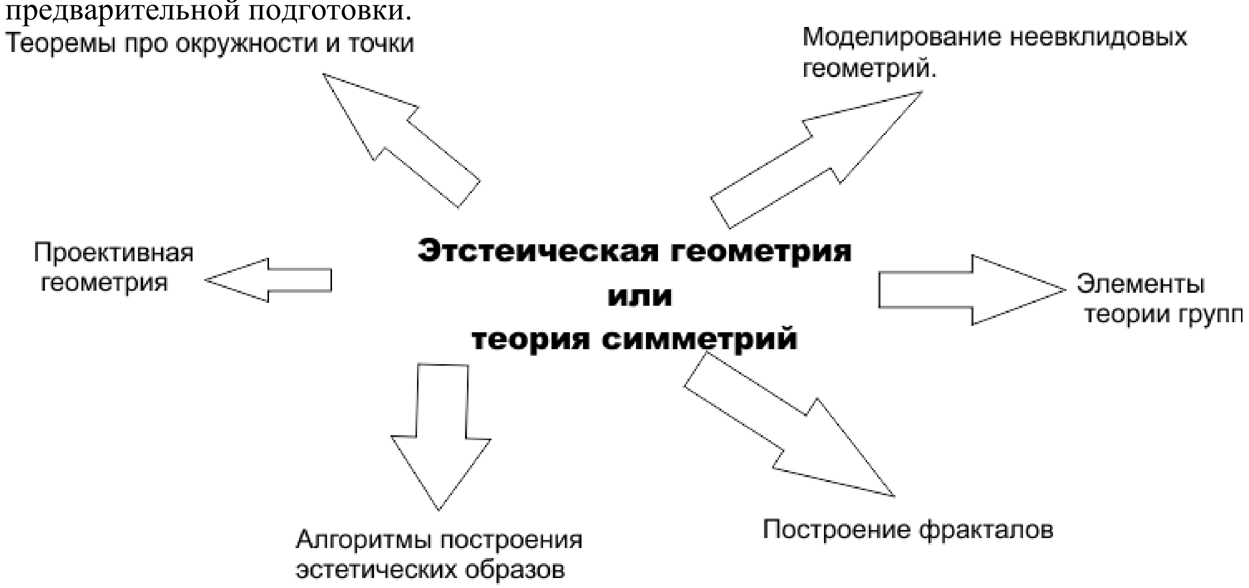
Доказательство теоремы основано на действии симметрий g, f, h на исходные точки a, b, c, d. Каждая такая симметрия меняет местами пары этих точек, например a отображается в c (c в a), b в d (d в b). Легко видеть, что композиция h*f*g всех трех этих симметрий оставляет неподвижными все четыре выбранные точки. Теперь воспользуемся свойством композиций круговых преобразований. Если преобразование плоскости, сохраняющее окружности неподвижно на трех точках, то это либо инверсия относительно окружности, проходящей через три эти точки, либо тождественное преобразование. В нашем случае имеются четыре неподвижные точки (лежащие на окружности S) поэтому h*f*g либо тождественное движение, либо симметрия относительно S. Т.к. композиция нечетного числа симметрий не может быть тождественным движением (например потому, что каждая симметрия меняет ориентацию на противоположную), то h*f*g=S, что и требовалось доказать. Мне неизвестно сравнимое по простоте доказательство этой теоремы, не использующее групповых методов.

Заметим неожиданное доказательство первой теоремы эстетической геометрии, опирающееся на понятие ориентации. Пусть I(a)=b, I(c)=d где I – симметрия относительно некоей окружности. Пусть мы умеем определять ориентации четверки точек (в эстетической или круговой геометрии плоскости ориентацию имеет четверка точек, а не три точки, как на плоскости Евклида). Симметрия относительно I действует на упорядоченную четверку точек (a, b, c, d) меняя местами пары точек между собой. I(a, b, c, d)= (b, a, d, c). Т.к. ориентация антисимметрична, то ориентации справа и слева должны совпадать (она дважды меняется на противоположную). Но ориентация при симметрии относительно окружности меняется на противоположную. Противоречие. Следовательно, четверка этих точек (a, b, c, d) не имеет ориентации, а это возможно тогда и только тогда, когда все четыре точки лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать: две пары симметричных друг другу точек обязательно лежат на одной окружности.

Важно для понимания идей эстетической геометрии, что три пересекающиеся окружности также определяют симметрию: при ней точки пар пересечения окружностей меняются местами а сами окружности остаются неподвижны. Это помогает развить «геометрию трехокружника» подобно тому, как обычно развивают «геометрию треугольника» и легко решить задачу Аполлония §20.

Методы симметрии и несложные соображения теории групп позволяют доказать много красивых и неожиданных теорем геометрии окружностей, отмечу теоремы о четырех сокасающихся окружностях §24. Но кроме задач собственно геометрии окружности эти методы имеют много приложений и внутри математики, и вне: для педагогики и эстетики. Укажу некоторые применения.

1. Моделирование евклидовой и неевклидовых планиметрий §21
2. Моделирование проективного пространства §7
3. Развитие исчисление симметрий, биплетного исчесления, моделирование комплексных чисел и квартернионов (часть 3)
4. Моделирование узлов, кривых и поверхностей. (Программа dodecaLook, основанная на методах эстетической геометрии)
5. Алгоритмы построения эстетически значимых образов, моделирование художественных артефактов, создание фракталов. §§31, 37, 41
6. Программа медитативного видео-арта DodecaLook
7. Возможность соединения уроков художественного восприятия и геометрии
8. Быстрое введение в проблематику высшей математики, не требующее предварительной подготовки.



http://bogemnyipeterburg.net/revolt/matem/teachpictures/index.html

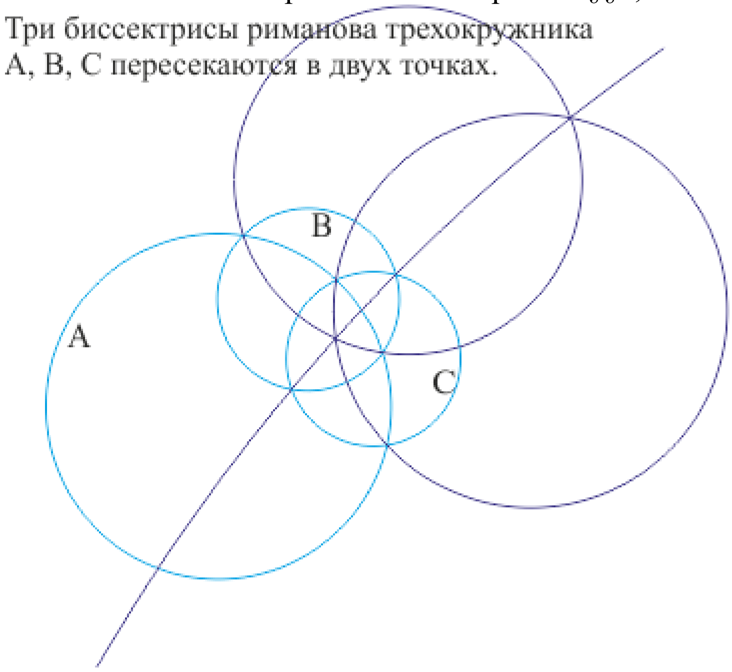
Моделирование евклидовой и неевклидовых планиметрий

Проведем три попарно пересекающиеся окружности A, B, C. Назовем каждую окружность «прямой» моделируемой геометрии. Назовем каждую пару точек пересечения их «точкой» моделируемой геометрии. Каждая окружность, проходящая через пару точек пересечения исходных окружностей («прямых» моделируемой геометрии) также называется «прямой» моделируемой геометрии, каждая пара точек их пересечения называется «точкой» моделируемой геометрии. Симметрией относительно прямой моделируемой геометрии является симметрия (инверсия) относительно представляющей ее окружности. Модель сохраняет углы: угол между прямыми геометрии равен углу между представляющими их окружностями. Любые три взаимно пересекающиеся окружности представляют треугольник моделируемой геометрии.

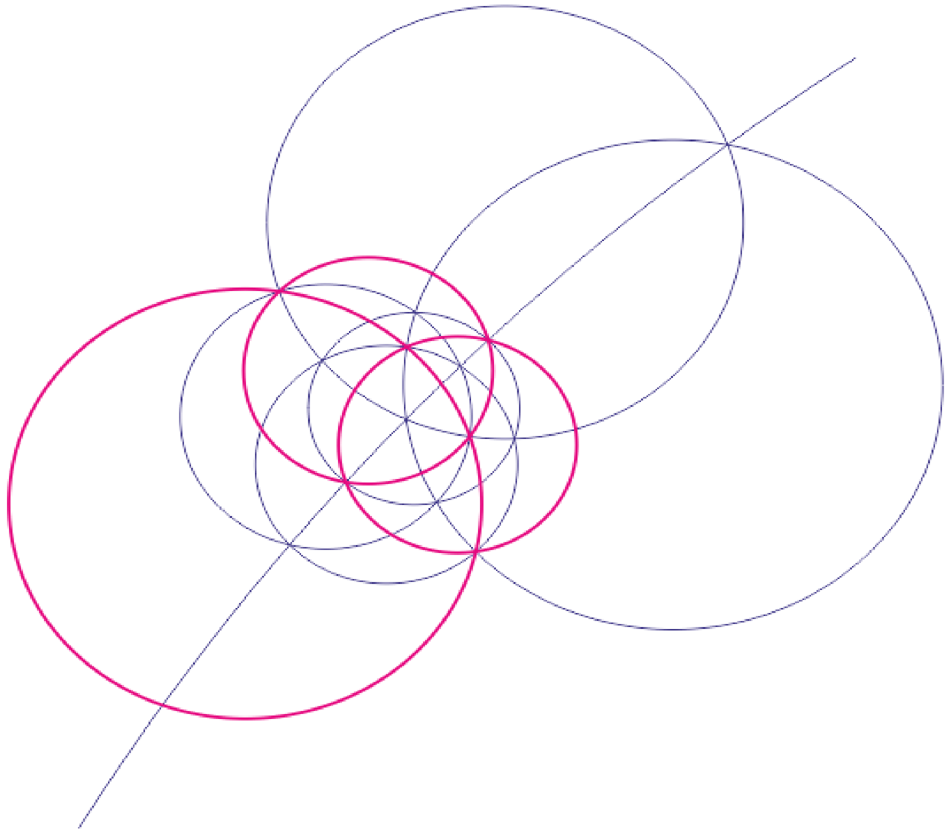
Какая именно планиметрия моделируется? Это зависит от расположения трех исходных окружностей A, B, C. Если точки пересечения двух окружностей разделяются третьей, то моделируемая геометрия будет геометрией Римана, если точки пересечения двух окружностей лежат по одну сторону от третьей, то моделируется геометрия Лобачевского, в промежуточном случае, когда все три окружности пересекаются в одной точке моделируемая геометрия – Евклидова.

Свяжем это построение с известными моделями. Проще всего это в Евклидовом случае: рассмотрим инверсию с центром в точке пересечения трех окружностей A, B, C. Тогда все окружности, представляющие прямые геометрии проходят через точку их пересечения и при инверсии с центром в этой точке – перейдут в прямые. Пары точек пересечения окружностей модели все имеют одну общую точку – в которой пересекаются три исходные окружности, после инверсии эта точка перейдет в бесконечно удаленную, а образ второй - точка и представляет точку евклидовой планиметрии. Если точки пересечения двух окружностей не разделяются третьей, то существует окружность S ортогональная трем исходным A, B, C. Все окружности модели оказываются ортогональны S и модель совпадает с моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского. Если же точки пересечения двух окружностей разделяются третьей, то не существует окружности, ортогональной им всем, но существует мнимая инверсия коммутирующая с инверсиями относительно трех исходных окружностей, что также позволяет свести к известным моделям геометрии Римана.

Разбираемая модель работает для всех планиметрий однородно. Это позволяет рассматривать многие теоремы об окружностях как теоремы, верные для всех трех планиметрий: Евклида, Лобачевского, Римана. Особенно это удобно для геометрии треугольника. Треугольник моделируется тремя окружностями, тем самым каждая теорема о свойствах трех окружностей превращается в универсальную теорему о треугольнике, верную во всех планиметриях (§19). В эстетической геометрии три взаимно пересекающиеся окружности называются трехокружником и доказываются теорема о пересечении биссектрис трехокружника. Биссектрисой между окружностями A и B называется такая симметрия (окружность) C, что C(A)=B, изучение и построение биссектрис (серединных окружностей) в эстетической геометрии очень интересно: §§9, 25.



Теорема о пересечении биссектрис трехокружника A, B, C. В зависимости от того, разделяет или нет третья окружность точки пересечения двух других трехокружники классифицируются на «римановы»,



«лобачевского» и «евклидовы».

Полный вариант теоремы о биссектрисах трехокружника. Как и у треугольника у трехокружника в общем случае 8 биссектрис, и они разделяются на тройки биссектрис, гармонично пересекающихся в парах точек (в общем случае – лежащих в одном пучке). На чертеже одним цветом показаны три исходные окружности, другим – все 8 возможных биссектрис. Доказательство теоремы в §19

Также интересно доказательство теорем о сумме углов треугольника: в геометрии окружностей оно оказывается даже проще, чем в планиметрии, т.к. между окружностями есть два равных угла и можно прослеживать их суммы по дугам.

Моделирование проективного пространства геометрией окружности

Есть два способа моделирования проективного пространства в рамках эстетической геометрии: алгебраический и наглядно стереометрический. Начнем с первого, рассмотрим известное понятие пучка окружностей. Пучком окружностей называют семейство окружностей, ортогональных двум данным, пучок окружностей аналогичен прямой в трехмерном пространстве. Два пучка окружностей называют соединимыми, если имеется окружность, лежащая в них обоих. Это аналогично пересекающимся прямым в трехмерном пространстве. Два пучка окружностей соединимы, если существует одна окружность, ортогональная всем окружностям обоих пучков. Отметим важную теорему (§39) о пучках: если имеются окружности A, B, C, D и пучок, образованный окружностями A и B соединим с пучком, образованным окружностями C и D, то и пучок (A, C) соединим с пучком (B, D) и пучки (A, D) и (B, C) соединимы, эта теорема обобщается и на многомерные пространства. Надо уточнить, что элементами пучка следует считать не только окружности, но и симметрии относительно них и «мнимые инверсии».

Алгебраически модель выражается так: назовем точками проективного пространства инверсии (действительные или мнимые), плоскостями проективного пространства назовем совокупности инверсий, коммутирующих (ортогональных) с какой-либо одной инверсией. Прямыми проективного пространства назовем совокупность инверсий, коммутирующих с двумя какими-либо инверсиями. Также в число «точек» так определенного пространства следует ввести и точки плоскости (как окружности нулевого радиуса). При этом мы считаем, что точка, лежащая на окружности ортогональна этой окружности. Легко проверить, что все аксиомы проективной стереометрии в этой модели выполняются.

Стереометрия проясняет модель: будем мыслить окружности, расположенными на сфере, с каждой окружностью на сфере свяжем две точки пространства. Одна – вершина касательного конуса к этой окружности, она расположена вне сферы и является полюсом плоскости, в которой лежит окружность. Эту точку свяжем с инверсией сферы относительно данной окружности. Вторая точка, связанная с этой окружностью – центр ее. Он расположен внутри сферы, ее свяжем с мнимой инверсией. Оба случая удобно мыслить с помощью А-отображений, §§6,7 инверсии сферы о которых речь есть А-отображения сферы относительно указанных точек. Таким образом точки, связанные с окружностями на сфере заполняют все пространство, кроме самой сферы. Поэтому в модель и необходимо добавить точки сферы (как окружности нулевого радиуса). Теперь с каждой точкой пространства у нас связана какая-то инверсия сферы, с точками вне сферы – обычная, с точками внутри сферы «мнимая».

Простые теоремы стереометрии, основы теории полюса и поляр показывают, что если мы выделим какую-то точку пространства, то все инверсии, коммутирующие с инверсией, связанной в указанном смысле с точкой, лежат на поляре к выбранной точке, заполняя полярную плоскость целиком. Это и обеспечивает выполнение аксиом проективного пространства в рассматриваемой модели. Подробнее модель и связанные с ней А-отображения рассматриваются в статье «Отображения сферы и неевклидовы геометрии», см. журнал Математической просвещение сер. 3 вып. 3, 1999 г.

Связь с эстетикой

Излагаемые идеи применяются для создания эстетически значимых образов. Простейший способ изложен в третьей части книги, где вводится алгоритм «Гармонической мельницы», §§31, 37 . Алгебраически этот алгоритм основан на «дробно-линейных преобразованиях, но алгебраическая сторона дела в книге не рассматривается, сами преобразования возникают как действие группы, порожденной симметриями относительно окружностей на объекты. При этом геометрически прозрачно появляются эллиптические, гиперболические и локсодромические преобразования, но эта терминология, как и понятие комплексного числа не используется. Напротив – понятие комплексного числа может быть наглядно определено с помощью «Гармонической мельницы». Также рассматривается стереометрическое обобщение этих преобразований §38, и указывается, при каких условиях их действие формирует звездчатые узлы. Рассматриваются и различные приемы построения фракталов методами эстетической геометрии §41.

Многообразие форм Эстетической геометрии

Большие возможности построения и просмотра форм эстетической геометрии дает программа DodecaLook. Она оперирует плоской геометрией симметрий относительно окружности, строит сложные узлы, с указанной структурой, демонстрирует связь орнаментов и узлов, и строит произвольные композиции. О работе с этой программой см. «Компьютерные инструменты в образовании» №5 2006, «Закон цветка». Методы работы этой программы и возникающие в связи с ней математические вопросы лежат на стыке анализа, топологии и теории групп и заслуживают отдельного изучения. На прилагаемом к книге диске также размещены учебные материалы, итерактивные флеш программы и коллекции образов, созданных методами эстетической геометрии.

Я надеюсь, что материал книги окажется полезен для преподавания в школе и ВУЗе, еще раз покажет неисчерпаемость математики и приоткроет связь между фундаментальными математическими понятиями и эстетикой.

Библиографический список

1. Отображения сферы и неевклидовы геометрии: Математическое просвещение сер. 3.- вып. 3.-1999.
2. Закон цветка: Компьютерные инструменты в образовании.-№5.- 2006.

Разработка информационно-образовательных ресурсов для организации и проведения внеклассной работы по математике

Д.И. Прохоров

Потребность экономики в высококвалифицированных специалистах в сфере прикладной математики поставило перед учреждениями общего среднего образования важную задачу – подготовить выпускников, которые владеют навыками пользователей информационно-коммуникационных технологий. В соответствии с Кодексом Республики Беларусь об образовании разработка информационно-образовательных ресурсов (ИОР) и инновационных учебно-методических комплексов с электронными компонентами является приоритетной задачей образовательной политики страны.

Этим обусловлена актуальность проблемы повышения уровня математической подготовки учащихся 7-9 классов, поиска новых форм, методов и средств организации обучения математике с использованием ИОР на уроках и при проведении внеклассной работы. По нашему мнению, внеклассная работа по математике лишь тогда эффективна, когда внеклассные занятия находятся в постоянном взаимодействии с работой, проводимой на уроках, дополняют и обобщают знания учащихся, полученные на уроках.

Под внеклассной работой понимаются целенаправленно организованные занятия с учащимися, проводимые во внеучебное время, для расширения и углубления знаний, умений и навыков, развития самостоятельности, индивидуальных способностей учащихся, а также удовлетворения их интересов [1, с. 50]. Таким образом, внеклассная работа выходит за рамки факультативных занятий, включает в себя также стимулирующие и поддерживающие занятия, дополнительные образовательные услуги, тематические вечера, недели математики и так далее.

Вопросам информатизации образования, использованию информационных технологий в образовательном процессе посвящены работы Я.А. Ваграменко, В.Н. Васильева, Н.В. Бровка, С.А. Гуцановича, В.А. Далингера, С.В. Зенкиной, В.В. Казаченка, Н.Д. Кучугуровой, В.М. Монахова, И.А. Новик, Е.С. Полат, И.В. Роберт, Н.Х. Розова и других авторов. Однако в задачи их исследований не входила разработка научно обоснованной методической системы взаимосвязанного обучения математике на уроках и внеклассных занятиях в 7-9 классах с использованием ИОР.

Мы рассматриваем **информационно-образовательные ресурсы** как совокупность данных, организованных для эффективного получения достоверной информации. К ним относятся отдельные документы и массивы документов, а также их совокупность в информационных системах (библиотеках, архивах, фондах, банках данных и др.). Данное толкование соответствует достаточно лаконичному, но точному определению средства обучения, предложенному Н.Е. Щурковой: «средством обучения называется все то, что использует субъект в процессе движения к цели. Средства располагаются вне субъекта, они заимствуются извне для облегчения деятельности, для повышения качества ее продукта, для усиления какой-либо детали образовательного процесса» [3, с. 566].

Изучение существующих на данный момент в Беларуси ИОР по учебному предмету «Математика» выявил их недостаточную представленность в образовательном процессе школ страны: имеют гриф «Рекомендовано Министерством образования Республики Беларусь» всего лишь 3 программных продукта: «Универсальный учебный графопостроитель. 6-11 классы» (ИНФОТРИУМФ, 2009), «Математика. Стереометрия» (СП ЗАО «Международный деловой альянс», 2010), «Математика. Подготовка к ЦТ» (ИНФОТРИУМФ, 2011). Очень мало белорусских образовательных сайтов в сети Интернет, а для использования курса дистанционного обучения «Математика для любознательных» в системе MOODLE необходима соответствующая регистрация. Информационных ресурсов, предназначенных для внеклассной работы в 7-9 классах, направленных на реализацию внутри- и межпредметных связей, и выходящих за рамки предметов «математика-информатика» нами не обнаружено.

Целесообразно говорить о необходимости разработки **методической системы взаимосвязанного обучения математике учащихся 7-9 классов на уроках и внеклассных занятиях**, как средства повышения эффективности их обучения математике. Под *взаимосвязанным обучением математике на уроках и внеклассных занятиях* понимается такое содержательное наполнение и организация форм, методов и средств обучения школьников математике, которое охватывает множество взаимосвязанных видов занятий, взаимодействие которых обусловлено единством образовательных, воспитательных и развивающих целей. Взаимосвязь обучения математике на внеклассных и урочных занятиях предусматривает три аспекта: взаимодействие, организация и управление. Первый обеспечивает взаимодействие урочных и внеклассных занятий в образовательном процессе; второй – организацию такого взаимодействия; третий – управление ею. В нашем исследовании мы будем опираться на структуру методической системы, предложенную в исследовании Н.В. Бровка, согласно которой, в методическую систему включают наряду с дидактическими целями обучения, содержанием, формами и методами обучения, включены также личность обучаемого и личность учителя, как субъектов образовательного процесса, причем личности обучаемого и личности учителя в методической системе отводится главенствующая роль [2, с. 176-177]. В современных условиях, для повышения эффективности обучения математике, снижения материальных и временных затрат, целесообразно использовать специально разработанные ИОР.

Следует отметить, что к ИОР, используемым на уроках и внеклассных занятиях, предъявляется множество требований как нормативного характера (санитарно-гигиенические нормы и правила, требования безопасности учащегося и др.), так и методико-психологического (учет общедидактических принципов, соответствие возрасту учащегося, его уровню знаний и психологическим особенностям и др.). Важно, чтобы использование ИОР отвечало условиям целесообразности и продуктивности, т.е. его применение в образовательном процессе должно быть направлено на решение конкретной педагогической задачи. Условие целесообразности использования ИОР выражается в том, что к основополагающим принципам разработки методической системы взаимосвязанного обучения математике на уроках и внеклассных занятиях относятся принцип реализации взаимосвязи когнитивной и личностно-развивающей составляющих процесса обучения математике, а также принцип оптимальной информационной насыщенности содержания обучения [4].

Рассматривая **принцип взаимосвязи когнитивной и личностно-развивающей составляющих процесса обучения математике**, необходимо отметить, что современные психолого-педагогические исследования проблемы формирования и развития визуального мышления учащихся концентрируются вокруг следующих вопросов: операции и закономерности невербального мышления; проблемы зрительного восприятия; динамики формирования математического образа; проблемы передачи информации и распознавание образа; психофизиологических механизмов восприятия информации доминантным и субдоминантным полушариями головного мозга [5]. В рамках построения методической системы взаимосвязанного обучения математике на уроках и внеклассных занятиях, реализация данного принципа состоит в предоставлении учащимся выбора индивидуальной траектории организации учебно-познавательной деятельности, которая предполагает выполнение заданий, включающих взаимосвязанные логические операции, поиск различных (в том числе, и нестандартных решений) поставленной математической задачи, рассмотрение обобщённых и изобретальских задач. Организация такой деятельности строится на привлечении интерактивных форм и методов обучения, методов самообучения, самоконтроля, использование визуальных и динамических возможностей ИОР.

Принцип оптимальной информационной насыщенности содержания обучения предполагает такую организацию учебной деятельности, которая позволит наиболее полно реализовать развивающие функции обучения в предметном поле математики, будет способствовать развитию мотивации познания и обучения, способствовать личностному развитию учащихся. Непродуманное использование компьютеров может привести к *информационной перенасыщенности* учебного материала, недостаточной обратной связи, следствием чего является рассеивание внимания, быстрая утомляемость обучаемых, снижение мотивации и низкая продуктивность обучения. Рассмотрение компьютеризации образования как цели, а не средства повышения эффективности обучения приводит к тому, что порою происходит практически полная замена живого общения участников образовательного процесса безличным и, как правило, извне почти не контролируемым «общением» с компьютером. *Информационная недостаточность* приводит к сведению роли электронных образовательных ресурсов к «плакатной» визуализации учебной информации, когда остаются не в полной мере реализованными принципы математической строгости, наглядности, развития мотивации. Очевидно, что и в первом, и во втором случае развивающая и дидактическая функции использования компьютера реализуются далеко не в полной мере.

Таким образом, при проектировании ИОР для проведения урочных и внеклассных занятий по математике необходимо учитывать:

- *дидактические принципы* (научность, доступность, проблемность, наглядность, системность и последовательность, прочность усвоения знаний, единство обучения и воспитания, реализация внутри- и межпредметных связей, взаимосвязь когнитивной и личностно-развивающей составляющих процесса обучения математике, разнообразие тренировочных действий);
- *специфические условия* (адаптивность, интерактивность, вариативность, системность, целостность и непрерывность дидактического цикла);
- *психологические закономерности* (взаимосвязь и взаимодействие компонентов мышления, вербально-логическое и сенсорно-перцептивное восприятие, устойчивость и переключаемость внимания, формирование и развитие визуального мышления учащихся, воображения, мотивации, учёт возрастных особенностей);
- *эргономические требования* (оптимальная информационная насыщенность визуальных объектов, возможность выбора темпа обучения, мобильность использования компонентов);
- *эстетические условия* (оптимальная цветовая насыщенность визуальных объектов, выразительность элементов, цвета, размера, расположения);
- *технические требования* (возможность использования различных носителей, возможность администрирования образовательного процесса, групповой работы, обратной связи, охрана авторского права и обеспечение безопасности информации используемой в образовательном процессе) [6].

С точки зрения учета индивидуальных особенностей учащихся, помимо психологических, особое значение приобретают дизайн-эргономические требования к ИОР. М.И. Беляев под сущностью дизайна ИОР понимают характеристику их внешнего вида, при которой графическое оформление должно производить благоприятное впечатление на обучаемого [7]. Однако, по нашему мнению, данное определение слишком размыто, целесообразнее дизайн ИОР рассматривать с точки зрения эстетических и, прежде всего, функциональных характеристик и интуитивно понятной системы навигации. В свою очередь, эргономика ИОР определяет уровень соответствия ресурса образовательным потребностям учащихся в развитии когнитивно-визуального мышления. В этом контексте, по нашему мнению, эргономические характеристик ИОР являются составной частью требований, предъявляемых к его дизайну.

Изучение литературы по проблеме особенностей организации внеклассной работы по математике [4, 6, 8, 9], позволило прийти к заключению, что в соответствии с указанными выше положениями, ИОР должны включать: модуль администрирования образовательного процесса, интегрирующий все модули курса в систему; учебно-справочный модуль (учебный материал с системой навигации); практический модуль (тренажеры, тесты); модуль обратной связи (чат, электронная почта). Схема ИОР «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы» представлена на рисунке 1.

Рисунок 1 – Структура информационно-образовательного ресурса «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы»

ИОР «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы» разрабатывается на основе «Математический конструктор» 6.0. Данный конструктор разработан ООО «База знаний – XXI век» (РФ, 2014 г.), распространяется бесплатно и предназначен для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей. Разрабатываемые нами интерактивные модули содержат динамические модели, могут быть непосредственно включены в содержание обучения. Это позволит использовать ИОР «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы» не только в условиях компьютерных кабинетов учреждений общего среднего образования, но и на домашних компьютерах учащихся, при работе с электронными книгами, smartphone, iphone, ipad и т.д. Современная среда разработки позволяет закодировать исходный текст документов, что защитит его от несанкционированного доступа.

Модуль администрирования образовательного процесса содержит сведения о самом ресурсе, методические рекомендации по его использованию, позволяет переходить к отдельным тематическим заданиям. Модуль обратной связи и, при наличии доступа к сети Интернет, позволяет перейти на сайт системы дистанционного обучения «Moodle», на котором осуществляется техническая и методическая поддержка ИОР «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы». Учебно-справочный и практические модули объединены в единый блок, при переходе к заданию учащийся имеет возможность выполнить тестовые задания, непосредственно проверить свои знания по данной теме. В случае затруднения, учащийся может ознакомиться с кратким теоретическим материалом, исследовать изучаемые математические объекты при помощи встроенных динамических моделей. Закрепить полученные знания, используя встроенные тематические тренажеры.

Рассмотрение тем, определённых учебной программой для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения «Математика V-XI классы», с учетом реализации внутрипредметных связей и межпредметных связей учебного предмета «Математика» с другими предметами естественнонаучного цикла позволило нам выделить темы, которые необходимо включить в содержание ИОР «Математика во внеклассной работе. 7-9 классы»:

7 класс: «Линейные уравнения», «Треугольники», «Параллельные прямые».

8 класс: «Квадратные уравнения. Квадратичная функция», «Теорема Пифагора», «Подобные треугольники».

9 класс: «Элементарные функции», «Системы уравнений с двумя переменными», «Замечательные точки треугольника», «Вписанная и описанная окружность треугольника».

Отметим, что это не означает, что темы, не включенные в перечень, менее важны. Для формирования научной картины мира необходимо качественное и полное изучение всех тем, перечисленных в учебной программе. Однако некоторые темы, изучаемые в курсе математики, используются и при изучении других учебных предметов естественнонаучного цикла, данный факт необходимо учитывать при планировании внеклассной работы по математике, при этом важно уделять пристальное внимание реализации межпредметных связей. Выделенные нами темы соответствуют тематике заданий, оценивающих математическую грамотность с точки зрения международных экспертов [10]. В частности, к ним относятся задания на пространственные представления, использование масштаба, нахождение площадей нестандартных фигур, умение читать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различной форме (таблиц, диаграмм, графиков реальных зависимостей), вычисления с рациональными числами, умение выполнять действия с процентами, умение выполнять действия с различными единицами измерения (длины, массы, времени, скорости), использование среднего арифметического для характеристики явлений и процессов, близким к реальной действительности, и др.

Так, например, при рассмотрении темы «Квадратные уравнения. Квадратичная функция»

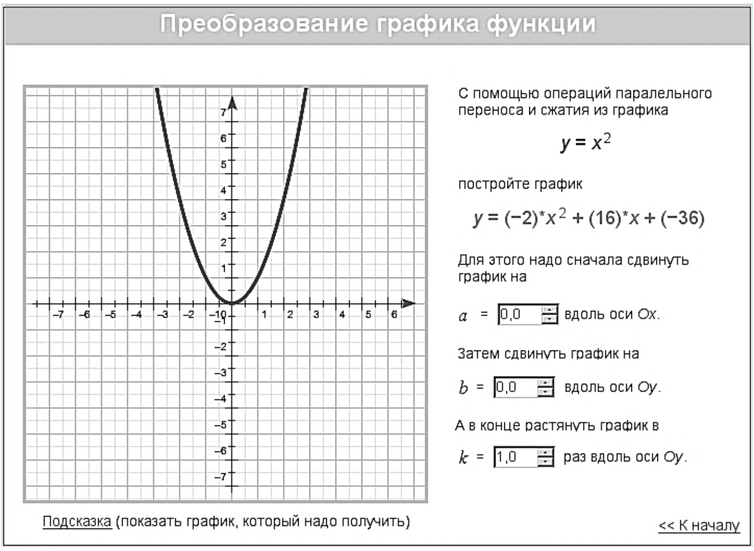


Рисунок 2 – Задание «Преобразование графика функции», 8 класс

изучаемой в 8 классе, учащемуся можно предложить построить график заданной квадратичной функции из функции $y = x^2$, используя параллельный перенос и растяжение относительно осей абсцисс и ординат (рисунок 2). Коэффициенты предлагаемой функции задаются случайным образом, что позволяет избежать одинаковых заданий при фронтальном использовании приложения. В случае затруднения, учащийся имеет возможность ознакомиться с подсказкой, которая содержит краткий теоретический материал о преобразовании графиков функций, а также изображение искомой функции. Подобрав коэффициенты функции $y = -5x^2 + 20x - 15$ учащимся можно предложить задачу, реализующую межпредметные связи с учебным предметам «Физика»: через какое время тело, брошенное вверх со скоростью 20 м/с, достигнет высоты 15 м?

Использование ИОР, разработанных с учетом указанных выше положений, а принципов реализации взаимосвязи когнитивной и личностно-развивающей составляющих процесса обучения математике и оптимальной информационной насыщенности содержания обучения на уроках и внеклассных занятиях по математике способствуют не только повешению повышению и углублению знаний учащихся, уровня их мотивации к выполнению практических задач, но позволяют проводить политехническую профориентационную работу с учащимися 7-9 классов учреждений общего среднего образования, готовить учащихся к олимпиадам по математике, организовывать учебно-исследовательскую деятельность учащихся, что в конечном итоге позволит повысить эффективность обучения математике в целом.

Библиографический список

1. *Рапацевич, Е.С.* Психолого-педагогический словарь [Текст] / Сост. Рапацевич Е. С. – Минск: Современное слово, 2006. – 928 с.
2. *Бровка, Н.В.* Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов [Текст] / Н. В. Бровка. – Минск : Издательский центр БГУ, 2009. – 242 с.
3. *Щуркова, Н.Е.* Средства и формы учебно-воспитательного процесса / Н. Е. Щуркова [Текст] / Н.Е. Щуркова / Педагогика: учебник для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / под ред. П. И. Пидкасистого. – М.: Педагогическое общество России, 2002. – 608 с.
4. *Прохоров, Д. И.* Компьютерно-ориентированный компонент внеклассной работы по математике как средство повышения качества образования школьников [Текст] / Д. И. Прохоров // Веснік адукацыі. – 2013. – № 3. – С. 8-14.
5. *Далингер, В. А.* Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике [Текст] / В. А. Далингер. – Омск : Издательство ОмГПУ, 2006. – 144 с.
6. *Прохоров, Д. И.* О разработке информационно-образовательных ресурсов для организации и проведения внеклассной работы по математике [Текст] / Д. И. Прохоров // Математическое образование: цели, достижения и перспективы : матер. Респ. науч.-практ. конф., г. Минск, 30 окт. 2013 г. / Бел. гос. пед. ун-т им. М. Танка ; редкол.: В. В. Шлыков, В. А. Шилинец, С. И. Василец (отв. ред.) и др. – Минск : БГПУ, 2013. – С. 160-162.
7. *Беляева, М. И.* Технология создания электронных средств обучения / М. И. Беляева, В. В. Гришкун, Г. А. Краснова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www/classea.ru/all-russian/russian-dictionary-encycl.html. – Дата доступа: 20.10.2013.
8. *Гуцанович, С. А.* Особенности разработки информационно-образовательных ресурсов для общего среднего образования по предметам естественнонаучного цикла [Текст] / С. А. Гуцанович // Педагогическая наука и образование. – 2013. – № 3(4). – С. 56-60.
9. *Роберт, И. В.* Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования: монография [Текст]/ И.В. Роберт. – М. : ИИО РАО, 2010. – 140 с.
10. *Mullis, I.V.S.* TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA’s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades [Текст] / Ina V.S. Mullis [and other] – Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. – 478 p.

Диагностика отношения учителей математики к использованию коучингового подхода в обучении

В.Е. Пырков

В качестве основного образовательного результата ФГОС выступает достижение стратегической цели российского образования – воспитание успешного поколения граждан страны, владеющих адекватными времени компетенциями в соответствии с общечеловеческими ценностными установками. Стандарт позиционирует переход от ретрансляции знаний к развитию творческих способностей обучающихся, раскрытию их возможностей, подготовке к жизни в современных условиях на основе системно-деятельностного подхода. Новые требования к квалификационной характеристике учителя, в том числе и математики, включают овладение компетентностями персонифицированной поддержки и сопровождения ребенка в процессе его обучения и развития.

Одним из современных подходов, нацеленных на решение выше обозначенных задач, является коучинговый подход. Его использование способно помочь ученикам перестать быть пассивными участниками образовательного процесса и перейти к активному, осознанному отношению к учебной деятельности как к личностно значимой. Успешного в изучении математики ученика отличает именно осознанное отношение к процессу обучения, интерес к предмету математики, личностный смысл, который формирует внутреннюю потребность к овладению математическими знаниями и мотивацию этой деятельности.

В академическом словаре «Педагогика: словарь системы основных понятий» (под ред. акад. А.М. Новикова) дается следующее определение: «Коучинг – индивидуальная программа развития обучающегося, осуществляемая в рамках группового обучения, результатом освоения которой становится актуализация способности достижения намеченных целей наиболее оптимальным путем. В результате коучинга создается специальная карта, в которой участник видит свой потенциал, свои сильные и слабые стороны. Коуч помогает понять, насколько ученик успешен, насколько эффективно и оптимально он использует свои индивидуальные ресурсы»[196]. В этом же словаре приводится и определение понятия учителя-коуча как специалиста, который применяет технологии позволяющие обучающемуся задействовать все его возможности и способности, повысить ясность восприятия, выйти за рамки привычных убеждений и сдерживающих его стереотипов, т.е. в конечном итоге, способствуют овладению технологией саморазвития. Поддержка и сопровождение обучающегося в коучинговых отношениях помогают ему учиться самостоятельно, находить собственные решения проблем и задач, актуальных для его жизни[197].

К настоящему моменту уже накоплен значительный опыт использования коучинга в образовании как за рубежом, так и в нашей стране. Несмотря на то, что коучинговый подход к образованию еще мало известен в нашей стране, есть целые школы, которые работают в рамках этого подхода. Многие учителя, в том числе и математики, уже знакомы с этим подходом.

В Facebook существует сообщество коучей (https://www.facebook.com/groups/coachingineducation/), занимающихся проблемами образования, которое на сегодняшний день включает более 400 активных участников. На портале http://www.coachingineducation.ru, учителя могут познакомится с новыми разработками по использованию коучинга в образовании, принять участие в проводимых конференциях, обучающих вебинарах, профессиональных конкурсах и т.п.

Учитель-коуч – представляет собой наиболее адекватную степень соответствия идеям современного подхода в образовании. Стимулируя рефлексию обучающимся своих

[196] Новиков А.М. Педагогика: словарь системы основных понятий. – М.: Издательский центр ИЭТ, 2013.
[197] Там же.

образовательных и жизненных потребностей, целей и потенциальных возможностей, он создает условия для самостоятельной успешной деятельности, личностного саморазвития и формирования индивидуального образовательного маршрута обучающегося. Он может провести четкое сопоставление между планируемыми результатами современного стандарта образования и коучинговыми техниками и инструментами для их достижения.

В коучинговых отношениях между учителем и учеником смысловым ориентиром становятся:

- самостоятельное целеполагание (цель работает только тогда, когда она присвоена или сформулирована самим учеником.)
- самостоятельное конструирование процесса обучения;
- самооценка результатов учебной деятельности.

Образование в коучинговом формате развивает личность прежде всего, как индивидуальность, самостоятельную в проектировании жизненных и профессиональных задач, в порождении личностных смыслов.

Отечественные и зарубежные исследования психолого-педагогических механизмов развития личности отмечают, что источник и движущие силы развития и личностного роста находятся в самом человеке. Необходимо рефлексивное обращение человека к своей внутренней сущности, к познанию своих истинных ценностей и желаний, жизненных целей, индивидуальных особенностей и к сознательному соотнесению их с возможностью и необходимостью реализовать себя. Поэтому одна из основных задач обучения – содействие ученику в понимании себя, в определении собственных «точек роста» и мобилизации внутренних ресурсов для саморазвития. И учитель, владеющий коучингом, готов решать эту задачу уже не интуитивно, а профессионально.

Целью нашего исследования было рассмотреть возможности и эффективность использования коучингового подхода, с точки зрения учителя математики и оценить готовность участников опроса к её использованию.

Для достижения этой цели нами был проведен опрос двух групп учителей с разницей около полугода. Первый раз мы предложили заполнить опросные листы группе учителей, по окончанию курсов повышения квалификации, на которых они впервые познакомились с коучинговым подходом (всего, на сегодняшний момент более 500 учителей ростовской области познакомились с коучингом как технологией личностно-ориентированного образования на курсах повышения квалификации; подобные курсы прошли учителя из Пскова, Екатеринбурга, Москвы, Минска (Беларусь), Кокшетау (Казахстан) и др.). Второй опрос был проведен в интернете, для учителей – участников международной он-лайн конференции «Коучинг в образовании»[198].

Всего в исследовании приняло участие 110 учителей математики, из них в первую группу вошли 51 человек, а остальные 59 заполнили опросный лист на сайте[199].

Предложенный учителям математики опросный лист[200] содержал 15 вопросов, сгруппированных по следующим направлениям:

- выявление степени самоидентификации учителя в учебном процессе и его ценностных установок в профессии;

- оценка потенциала использования коучингового подхода в профессиональной деятельности учителя математики;

- степень ознакомленности учителей математики с конкретными разработками, позволяющими применять коучинговый подход к обучению математике.

Проведем анализ полученных результатов.

Первый вопрос опросного листа был направлен на выявление опыта опрашиваемых учителей и их педагогического стажа. Представим результаты в виде таблицы 1:

---

[198] См. подробнее http://coachingineducation.ru/conference/
[199] http://coachingineducation.ru/pyrkov-conference/
[200] См. Приложение 1

Таблица 1.

Группа / Пед.стаж	Первая группа (участники курсов) 51 респондент		Вторая группа (участники конференции 59 респондентов	
До 5 лет	9	18%	6	10%
5 - 10 лет	3	6%	10	17%
10 – 20 лет	4	8%	18	30%
20 – 30 лет	24	47%	14	24%
Более 30 лет	11	21%	11	19%

Из таблицы видно, что подавляющая часть респондентов – опытные учителя со значительным педагогическим стажем. Процент учителей математики, имеющих стаж работы более 10 лет составляет 76% в первой группе и 73% во второй, что разнится на 3% и позволяет считать эти группы примерно одинаковыми по этому критерию для дальнейшего сравнения.

Так как работа над формированием осознанности и мотивации к учению ученика предполагает высокую степень осознанности самого учителя, нам было важно выявить степень самоидентификации участников опроса с имеющимся у них представлением о профессии учителя, их профессиональные ценностные установки и ресурсные качества личности.

Для определения степени самоидентификации с профессией учителя мы использовали внутренне референтную оценку респондентов по шкале от -10 до +10. На этой шкале +10 это самоидентификация с профессией учителя на уровне миссии, 0 – формальное, безразличное отношение к профессии, а -10 – полное её неприятие. Полученные данные представлены в таблице 2:

Таблица 2.

Группа / балл	Первая группа (участники курсов) 51 респондент		Вторая группа (участники конференции 59 респондентов	
10	19	37%	21	35,5%
9	6	12%	18	30,5%
8	14	27%	9	15,3%
7	4	8%	6	10, 2%
5	7	14%	2	3,4%
4	-	-	1	1,7%
1	1	2%	1	1,7%
0	-	-	1	1,7%

В таблице указаны баллы, отмеченные в опросных листах, другие баллы не были использованы респондентами. Вопреки имеющей место быть в подобных исследованиях «боязни крайних оценок», больший процент опрашиваемых отметил свою самоидентификацию с профессией учителя на уровне миссии: 37% и 35,5% соответственно. Большей частью это учителя имеющие педагогический стаж более 30 лет. Четыре участника опроса отметили низкий уровень своей самоидентификации с профессией учителя. Двое из них, отметившие по 1 баллу имеют стаж работы от 1 до 2 лет. Двое других, указавших 0 и 4 балла, оказались бывшими преподавателями вуза.

Оценка степени удовлетворенности своей педагогической деятельности проходила с использованием аналогичной шкалы, где +10 означала «абсолютно доволен», 0 –

«безразличен» и -10 – «абсолютно недоволен». Согласно полученным данным опрашиваемые учителя в общем довольны результатами своей педагогической деятельности, но только около 11% опрашиваемых указали на максимальную степень.

Результаты опроса представлены в таблице 3:

Таблица 3.

Группа / балл	Первая группа (участники курсов) 51 респондент		Вторая группа (участники конференции 59 респондентов	
10			12	20%
9	9	17,5%	6	10%
8	18	35%	24	41%
7	11	21,5%	11	19%
6	4	8%	3	5%
5	6	12%	3	5%
4	2	4%		
3	1	2%		

Для выявления профессионально значимых качеств личности учителя, мы задали открытые вопросы в которых респондентам нужно было перечислить те качества и умения, которые у них уже имеются и те, в которых они видят свои зоны роста. Перечислим эти качества в таблице 4, указав частоту их упоминания в обоих группах.

На вопрос «Какие Ваши личностные качества, умения помогают Вам в работе учителя?» были получены следующие ответы:

Таблица 4а.

Частота упоминания	Качества личности учителя, умения
12	любовь к детям
11	доброжелательность
10	коммуникабельность
8	оптимизм
7	ответственность, целеустремленность
6	творчество
5	креативность, любознательность, терпение,
4	интерес, стремление к самообразованию, уважительное отношение к людям, эмоциональность
3	активность, внимательность, добросовестность, любовь к профессии, тактичность, умение слышать ученика, эмпатия
2	мудрость, наблюдательность, организованность, профессионализм, самоконтроль, справедливость, требовательность, уверенность, умение находить контакт с детьми, чувство юмора, чуткость
1	амбициозность, артистизм, гуманизм, гибкость, желание быть нужным, искренность, лабильность, лидерство, любовь к предмету, мобильность, настойчивость, объективность, ораторские способности, организаторские способности, оригинальность, педантизм, порядочность, пунктуальность, работоспособность, системное мышление, собранность, старательность, увлеченность, умение расставлять приоритеты, умение заинтересовать, умение задавать правильные вопросы, умение мотивировать учеников, умение убеждать, уравновешенность

На вопрос «Какие личностные качества, умения Вам хотелось бы развить в себе как учителе?» были получены следующие ответы:

Таблица 4б.

Частота упоминания	Качества личности учителя, умения
10	уверенность
6	настойчивость
5	организованность
4	терпение, толерантность,
3	умение распределять время
2	пунктуальность, строгость, умение говорить «нет»
1	доброжелательность, креативность, мобильность, организаторские способности, осознание своих ошибок и готовность их преодолевать, ответственность, предприимчивость, профессионализм, профессиональная свобода, раскрепощенность, скрупулезность, справедливость, стремление к самообразованию, твердость характера, творчество, требовательность, умение противостоять хамству, целеустремленность, чуткость, эмпатия, фантазия

Полученные в ходе ответов на эти два вопроса данные сами по себе представляют определенный интерес, формируя некоторый срез приоритетных в настоящий момент качеств для современного учителя. По ним можно выделить несколько тенденций, но мы задавали эти вопросы с целью выявления степени потенциальной готовности и конгруэнции выделенных опрашиваемыми учителями качеств и умений качествам учителя-коуча, полученными в международном исследовании Джона Уитмора[201]. Приведем перечень выделенных им качеств, характерных для учителя-коуча:

- безусловная вера в ученика;
- умение слышать ученика;
- отношение к ученику с юмором и энтузиазмом;
- готовность вкладывать в ученика свое время;
- умение общаться на равных;
- уважение к людям;
- умение ставить вызов ученику;
- забота об ученике и умение выстроить комфортные, безопасные отношения.

Как видно из сопоставления списков, качества учителя-коуча, выделенные в исследовании Дж. Уитмора, вполне приемлемы для отечественных учителей, но акценты их несколько смещены из области способствования результативности процесса в сторону качества выстраивания отношений как с учащимися, так и с самим собой (разрешение внутренних конфликтов).

Следующие два вопроса опросного листа были нацелены на выявление мотивации профессиональной деятельности и ценностных ориентиров опрашиваемых учителей математики.

Приведем ответы учителей на открытый вопрос «Ради кого/чего Вы работаете в школе?»

Таблица 5.

Группа / Мотивационный фактор	Первая группа (участники курсов) 51 респондент	Вторая группа (участники конференции 59 респондентов

[201] См. подробнее [12]

нет ответа	5	10%	12	20,5%
для себя (самореализация)	22	43%	28	47%
для ученика	29	57%	22	37%
будущее поколение	7	14%	4	6%

Как видно из таблицы, у около 10 % респондентов первой группы и 20,5% второй группы этот вопрос остался без ответа. Между тем, понимание целесообразности своего педагогического труда и наличие внутренней мотивации к его осуществлению нам представляются очень важными для результативности работы учителя вообще. Между тем около 14% опрошенных респондентов первой группы и 6% второй группы указали в качестве ведущего мотивационного фактора своей работы, превосходную степень заботы об учащихся и причастности к их развитию и оказания влияния на формирование будущего поколения страны.

Ответы на вопрос «Почему Ваша работа в качестве учителя является важной?», позволили раскрыть видение и осознание ценности своего педагогического труда. Наиболее популярные ответы и их частота упоминания представлены в таблице 6.

Таблица 6.

Группа / Ценность деятельности	Первая группа (участники курсов) 51 респондент		Вторая группа (участники конференции) 59 респондентов	
нет ответа	24	47%	28	47%
направлять учеников	10	20%		
передача ЗУН	9	18%	10	17%
развитие учеников	4	8%	7	12%
воспитание/передача ценностей	3	6%	8	14%
заинтересовать математикой	3	6%	-	-
оказание помощи учащимся	5	10%	3	5%
ответственность за будущее поколение	-	-	12	20%

По одному человеку привели в качестве ответа высказывания «не приношу вред», «несу свет» и «открываю людям мир». Как видно из таблицы, около половины респондентов не видят либо затрудняются с формулированием ценности своей педагогической деятельности, что будет являться препятствием и для формирования ценности деятельности их учащихся. Использование коучингового подхода в своей преподавательской деятельности, и работа самого учителя с коучем позволят заполнить этот пробел в мировоззрении учителя математики и повлиять на осознанность и качество совместной деятельности учителя и учащихся.

Второй блок вопросов был направлен на выяснение оценки потенциала использования коучингового подхода в профессиональной деятельности учителя математики.

Результаты ответа на вопрос «Как Вы считаете, возможно ли применение коучингового подхода в школе?» представлены в таблице 7:

Таблица 7.

Группа / Вариант ответа	Первая группа (участники курсов) 51 респондент	Вторая группа (участники конференции 59 респондентов

возможно	31	61%	33	56%
скорее возможно	17	33%	26	44%
затрудняюсь ответить	3	6%	-	-
скорее невозможно	-	-	-	-
невозможно	-	-	-	-

Ответы на этот вопрос дают основание считать, что подавляющее большинство респондентов, получивших знакомство с коучингом и коучинговым подходом в образовании, видят возможности использования этих знаний в своей преподавательской деятельности и только менее 3% участников опроса затруднились с ответом.

При определении возрастной группы учащихся, для которых применение коучингового подхода им кажется наиболее эффективным были получены следующие варианты ответов:

Таблица 8.

Вариант ответа	Количество ответов	
учащиеся начальной школы	35	32%
учащиеся средней школы	83	75%
учащиеся старшей школы	75	68%

Около трети респондентов отметили важность начинания работы с учащимися в рамках коучингового подхода начиная с начальной школы и выделили особую его роль при использовании в подростковом возрасте. Более 30% опрошенных отметили предполагаемую эффективность использования коучингового подхода при обучении математике для всех возрастных групп.

Для выявления степени ознакомленности учителей математики с конкретными разработками, позволяющими применять коучинговый подход в обучении в опросном листе был выделен специальный вопрос. В результате обработки ответов были получены следующие данные:

Таблица 9.

Вопрос	Первая группа (участники курсов) 51 респондент				Вторая группа (участники конференции) 59 респондентов			
	да		нет		да		нет	
Знакомы ли Вы с разработками, позволяющими применять коучинговый подход в обучении математике?	15	29%	36	71%	27	46%	32	54%

Полученные результаты свидетельствуют о том, что процент осведомленности учителей математики с примерами использования коучингового подхода на уроках математики в первой группе почти в 1,5 раза меньше, чем во второй. Этот факт вполне объясним, т.к. во-первых, за время прошедшее между опросами респондентов был накоплен определенный опыт учителей, внедряющих коучинговый подход на своих уроках и вышли новые публикации, обобщающие этот опыт. Во-вторых, это можно объяснить еще и тем, что респондентами второй группы явились наиболее активные учителя математики, которые не только приняли участие в работе международной он-лайн конференции «Коучинг в образовании», где познакомились с опытом коллег, но и самостоятельно изъявили свое желание принять участие в этом опросе. Тем не менее, более половине учителей математики знающим о коучинге, и отмечающих заинтересованность в его использовании конкретные разработки по его применению в обучении математике пока не известны. Объективно говоря их действительно на русском языке опубликовано пока мало. Многие из тех учителей, которые на этот вопрос ответили положительно имели в виду разработки своих коллег, которые регулярно обсуждаются на методических объединениях учителей Красносулинского района, одна из школ которого участвует в эксперименте по апробации внедрения коучингового подхода в систему обучения и воспитания, и благодаря проводимым инициативными учителями вебинарам на портале http://coachingineducation.ru/ .

Одним из последних открытых вопросов опросного листа (помимо контактных данных респондентов) был «Что Вы теперь будете делать по-другому в своей преподавательской деятельности?». Сгруппируем характерные ответы в виде таблицы 10:

Таблица 10

Группа / Вариант ответа	Первая группа (участники курсов) 51 респондент		Вторая группа (участники конференции) 59 респондентов	
ничего	12	24%	15	25%
еще не знаю, что именно	15	29%	11	19%
изучать еще информацию	-	-	4	7%
мотивировать учеников	3	6%	-	-
строить урок	12	24%	4	7%
буду использовать коучинговый подход	2	4%	9	15%
формировать цели и задачи урока	2	4%	1	2%
организовывать учебный и воспитательный процесс	3	6%	5	8%
начну выстраивать личные траектории развития учеников, учитывать их индивидуальность	1	2%	4	7%
подход к своей деятельности	1	2%	1	2%
выстраивать диалог с учащимися	-	-	2	3%
работать с родителями учащихся	-	-	3	5%

Согласно полученным ответам учителей четверть из них не намерена что-либо менять в своей педагогической деятельности и полученные знания о коучинговом подходе не привнесут ничего нового в их деятельность. Еще четверть опрошенных понимают, что что-то в их деятельности теперь станет по-другому, но пока не смогли это сформулировать и находятся в раздумии. Четыре респондента отметили недостаточность для себя полученной информации и необходимость дальнейшего знакомства с литературой по применению коучингового подхода в обучении. Примерно половина участников опроса высказали намерение применять коучинговый подход в тех или иных аспектах своей профессиональной деятельности.

Некоторые респонденты высказали свое отношение к коучинговому подходу в обучении и благодарность: – «Я отчасти этим занималась, но теперь у меня сложилось понимание системы и того, зачем я это делаю»;

– «Это то, что делали в школе мои учителя, только названия не было такого»;

– «Придумала уже на завтра урок в коучинговом подходе. Настроение замечательное!»

– «Спасибо за позитивный настрой к нам, учителям. Ваши личностные качества как человека и преподавателя помогли мне почувствовать в себе уверенность и желание работать еще эффективнее».

Итак, из проведенного нами опроса учителей математики можно сделать следующие выводы:

1. Среди опрошенных учителей математики высоким уровнем самоидентификации обладают 88% респондентов, причем все они показали высокий уровень самооценки удовлетворенности результатами своей педагогической деятельности.
2. Среди перечисленных респондентами профессионально значимых умений и качеств личности учителя находятся и те, которые характерны для учителя-коуча и способствуют результативности процесса обучения, но приоритетными остаются умения и качества учителей, направленные на выстраивание отношений с участниками образовательного процесса (любовь к детям, доброжелательность, коммуникабельность и др.) и преодоление внутренних барьеров (уверенность, настойчивость, организованность, терпение и др.).
3. Около 15% респондентов не осознают ради кого или чего они работают учителем, а около половины всех опрошенных указали самореализацию и удовлетворение собственных интересов.
4. Около половины респондентов (47%) не видят ценности в своей работе учителя и не могут ответить на вопрос «Почему Ваша работа в качестве учителя является важной?». Около 37% опрошенных учителей видят ценность своей деятельности будучи вкладом в обучение, развитие и воспитание учащихся и 10% видят в качестве ценности свой вклад в формирование будущего поколения граждан.
5. С учетом п.3 и п.4 можно сделать вывод о том, что для повышения осознанности и мотивации, приводящих к результативности учебного процесса, работа с коучем, прежде всего, необходима самому учителю.
6. Практически 100% опрошенных учителей, которые знают о коучинговом подходе к обучению, отмечают высокий потенциал его применения в образовании, а треть из них указывает на необходимость работы с учащимися в этом формате еще с начальной школы.
7. Более трети респондентов уже знакомы с различными материалами и конкретными методическими разработками по использованию коучингового подхода в обучении и около половины опрашиваемых высказали готовность применять коучинговый подход в своей педагогической деятельности.

Библиографический список

1. *Nieuwerburgh, C.* Coaching in education [Текст] / C. Nieuwerburgh / Getting Better Results for Students, Educators and Parents. – Karnac, 2012. – 220 p.
2. *Kristiansen, J.G.* Profesjonelle dialoger. Coaching og relasjonskompetanse i skolen **(**Профессиональные диалоги - Коучинг и построение отношений в школе**)** [Текст] / J.G. Kristiansen / - Universitetsforlaget, 2008. - 182 s.
3. *Гульчевская, В.Г.* Коучинг – инновационная технология поддержки в обучении и индивидуально-личностном развитии учащихся [Текст] / В.Г. Гульчевская / Региональная школа управления. – 2013. – №1. – С.3–10.
4. *Долина, Н.В.* Преподаватель как коуч [Текст] / Н.В. Долина / Высшее образование в России. – 2011. –№8-9. –С.73-78.
5. *Епишева, О.Б.* Что такое педагогическая технология [Текст] / О.Б. Епишева / Школьные технологии. 2004. №1. – С. 31-36.
6. *Заболотная, Е.П.* Интерактивное обучение математике на основе коучинговой технологии [Текст] / Е.П. Заболотная / Региональная школа управления. – 2013. – №1. – С.18–22.
7. *Зырянова, Н.М.* Коучинг в обучении подростков [Текст] / Н.М. Зырянова / Вестник практической психологии образования. – 2004. – №1. – С. 46–49.

8. *Парслоу, Э.* Коучинг в обучении: практические методы и техники [Текст] / Э. Парслоу, М. Рэй / – СПб.: Питер, 2003. – 204 с.
9. *Поташник, М.М.* Коучинг – вершина профессионализма руководителя в работе с людьми [Текст] / М.М. Поташник / Народное образование. – 2010. – №9. – С.110-115.
10. *Пырков, В.Е.* Коучинговый подход в обучении старшеклассников как технология реализации современного математического образования [Текст] / В.Е. Пырков / Труды XI международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2013. – С.201–207.
11. *Сербиновская, Н.В.* Психологические инструменты и организационные проблемы коучинга в реализации стратегии «Образование в течение всей жизни» [Текст] / Н.В. Сербиновская, Б.Ю. Сербиновский / Научный журнал КубГАУ. – 2012. –№1 (75).
12. *Уитмор, Дж.* Внутренняя сила лидера [Текст] / Дж. Уитмор / – М.: Альпина Паблишер, 2013. – 309 с.

Методика обучения математике учащихся 5-7-х коррекционных классов 7 вида на основе краеведческого материала

Н.А. Пырырко

На сегодняшний день в области образования имеется ряд проблем, одной из которых является проблема поиска наиболее эффективных условий организации обучения и воспитания детей с проблемами в развитии.

Требования, предъявляемые программой по математике, школьными учебниками и сложившейся методикой обучения, рассчитаны на так называемого «среднего» ученика. Однако уже с первых классов происходит расслоение ученического коллектива на учащихся, быстро и успешно усваивающих математический материал, на учащихся, усваивающих материал только на «удовлетворительно», на учащихся, изучение математики которым даётся с большим трудом [8, с. 474].

В Ямальском районе Ямало-Ненецкого автономного округа, как и во многих других региона нашей страны, наряду с обычными классами, существуют коррекционные (специальные) классы 7 вида.

Такие классы функционируют обычно с первого по девятый годы обучения в зависимости от состава. Их формируют из учеников как имеющих психические нарушения, так и вполне нормальных, но по каким-то причинам отстающих в учёбе. Причины отставания могут быть самыми разными. И не всегда они связаны с отсутствием общих или специальных способностей, а могут объясняться слабым здоровьем ученика, кочевым образом жизни родителей, сокращённым учебным годом в связи с этим. Для отстающих учащихся характерно неумение организовать свою умственную деятельность, отсутствие навыков самоконтроля. Они не могут сконцентрировать внимание на поставленной задаче, часто отвлекаются, многие из них имеют плохую память. Дело осложняется ещё и тем, что все ученики разные, а слабые разнообразнее всех. Даже один и тот же слабый ученик может сегодня поразить замечательно глубоким ответом, а завтра не выполнить легчайшую письменную работу. Нестабильность психических реакций является одной из отличительных черт многих слабых учеников [10, с. 179].

Принципы, на которых строится обучение в коррекционных классах:

1) принцип коррекционной направленности (используются приёмы, направленные на развитие памяти, внимания, мышления);
2) принцип нарастающей сложности;
3) принцип усиленной мотивации;
4) принцип личностно-ориентированного подхода;
5) принцип дифференцированного и индивидуального обучения.

В классах коррекции отношение учеников к учебному предмету, прежде всего, зависит от их отношения к учителю и получаемых отметок. Многим учащимся нравится то, что даётся легко и приносит успех. Для привития интереса учащихся к математике, развития их познавательной активности необходим поиск дополнительных средств. Таким средством для учащихся 5-7-х классов может стать изучение на уроках математики родного края, которое осуществляется через задачи, содержащие исторический, фольклорный и краеведческий материал родного края [6, 11, 12].

В начале процесса обучения математики и информатики в коррекционных 5-7-х классах я столкнулась со слабым развитием вычислительных навыков, незнанием алгоритмов и правил выполнения основных математических действий, недостаточным развитием умения учиться.

Поэтому учитываю в своей практике следующие особенности организации учебного процесса в классах коррекции:

1. В каждой теме выделять главное, знакомить с обязательными результатами обучения.
2. Дать возможность учащимся поверить в свои силы, чтобы усилить желание учиться.
3. Мотивацией учения должна быть не боязнь получить плохую оценку, а похвала за малейшее улучшение.
4. Всё что можно нарисовать, сложить, отрезать, выполнить наглядно, чтобы в дальнейшем перейти к образному мышлению.
5. Уделять постоянное внимание речевому развитию.

Одной из частей ФГОС является формирование базовых национальных ценностей : культурных, социально – исторических, семейных традиций народов России, переходящих из поколения к поколению и обеспечивающих планомерное развитие страны в современных условиях.

Мною разработан сборник задач «Жизнь народов крайнего севера (ненцев) в математических задачах»

В сборнике задач представлены задачи, с использованием производственных показателей совхоза «Панаевский», статистических данных о численности населения поселка, материалов из районных и окружных средств массовой информации. Содержание задач направлено и на решение воспитательных и образовательных целей: расширение знаний о родном крае, его истории, воспитание чувства патриотизма и гордости за свой народ.

Использование регионального компонента в обучении любой дисциплины, в частности, математике в школе служит средством решения таких задач гуманитаризации математического образования, как уровневая и профильная дифференциация обучения, его практическая и профессиональная направленнё ость, расширение кругозора учащихся о региональном и национальном своеобразие условий их жизни, воспитание экологической культуры, выполнению заказа общества на формирование активной и социально-адаптивной к современным условиям личности [4, с. 148].

Я рассматриваю краеведческое направление, дающее возможность использовать процесс обучения математике в формировании свойств личности воспитании любви к своей Родине, своему краю. Для этого возможно использование различных математических задач, а также исторический, краеведческий материал. Если ребенок с малых лет учится сопереживать, анализировать события, изложенные в том или ином тексте нового материала, то изучение такого материала сыграет положительную роль не только в образовании, но и воспитании школьника. Такой материал ребенок воспринимает с интересом, стремится не только запомнить его, но и использовать в дальнейшей учебной деятельности.

Можно выделить требования к формулировке задач, составленных на краеведческом материале:

1. Сюжет и числовые данные задачи должны отражать разнообразные стороны окружающей действительности, носить познавательный, воспитательный характер, возбуждать любознательность и интерес учащихся к математике.

2. Содержание задачи должно быть кратким, но понятным учащимся. Математическая сторона задачи не должна заслоняться излишними комментариями.
3. Числовой материал необходимо подбирать в строгом соответствии с программой данного класса по математике.
4. В тексте задачи для записи именованных чисел должны быть использованы только принятые сокращения, следует избегать произвольных сокращений слов.

Работа по составлению задач упрощается в том случае, когда учитель собирает и накапливает разнообразный числовой материал постепенно, что освобождает педагога от необходимости поспешно подбирать данные для задач.

При отборе краеведческих сведений для урока следует придерживаться правил:

- События местной истории и культуры должны быть важными для данного края, понятными и доступными возрасту учащихся;
- Факты должны быть достаточно яркими, эмоционально насыщенными;
- Предоставить учащимся возможность совершать маленькие «открытия», привлекая их к участию в работе по какой-нибудь теме или знакомому объекту;
- Формировать умение наблюдать окружающую действительность, искать неизвестное в известном, незнакомое в знакомом;
- Вызывать интерес к познанию родных мест, содействовать формированию патриотических чувств.

Работая над краеведческим материалом и используя его на уроках важно придерживаться определённых принципов:

- систематичность
- доступность
- наглядность
- разнообразность материала
- связь материала в учебной и воспитательной работе
- взаимосвязь местного и общего исторического, географического и литературного материала

При решении задач с применением краеведческого материала учитываю не только индивидуальные, но и этнопсихологические особенности учащихся: обычно мальчики решают задачи, в содержании которых отражены рыбалка, охота, движение на различных видах транспорта и т.п., девочки — об изготовлении орнаментов, браслетов из бисера, сборе ягод и т.п.

Так же в классах коррекции разработана структура изучения каждой темы по математике и информатике (рис.1).

Рис.1. Структура изучения каждой темы

Для коррекционных классов 7 вида можно разработать элективный курс под названием «Математика вокруг нас».

Данный курс может содержать следующие темы:

1. Как люди научились считать.

2. История математических символов.
3. Удивительный мир чисел [2].
4. Элементы стохастики [7].
5. Математика в производстве и сельском хозяйстве.
6. Математика в природе.
7. Математика на каждом шагу.
8. Математика и экономика [3].

Также на элективном курсе «Математика вокруг нас» можно рассмотреть следующие темы «Элементы теории кодирования», «Элементы теории криптографии» [5]. Но учитывая особенности учащихся, в которых я работала, коррекционные классы VII вида, данные темы не имеет возможности рассматривать полностью. Но некоторые задачи можно использовать, как задания для физминуток в виде головоломок и ребусов.

Как правило, ребёнок приходит в школу с огромным желанием учиться. Задача учителя – удержать в нём это чувство радостного удовлетворения перед школой, перед тайнами, которые его там ждут.

Библиографический список

1. *Петрова, Ф.Г.* Математические вечера [Текст] / Ф.Г. Петрова / – Ижевск: Изд-во «Удмуртия», 1968. – 184 с.
2. *Кордемский, Б.А.* Удивительный мир чисел: (матем. Головоломки и задачи для любознательных): Кн. для учащихся [Текст] / Б.А. Кордемский, А.А. Ахадов / – М.: Просвещение, 1986. – 144 с.: ил.
3. *Мерлина, Н.И.* Начала финансовой и актуарной математики: учеб. пособие для учащихся 5-11 классов [Текст] / Н.И. Мерлина, М.В. Иванова, А.В. Мерлин. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. – 176 с.
4. *Епишева, О.Б.* Формирование умений учебной деятельности как навыковой составляющей ключевых компетенций выпускника образовательной школы: Коллективная монография [Текст] / Е.Е. Волкова, О.Б. Епишева, В.В. Клюсова и др. / Под общ. ред. О.Б. Епишевой. – Тобольск: Изд-во ТГСПА им. Д.И. Менделеева, 2009. – 174 с.
5. *Мерлина, Н.И.* Элективные курсы для профильной школы [Текст] / Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, С.А. Карташова, С.А. Ярдухина, А.К. Ярдухин. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. – 306 с.
6. *Мерлина, Н.И.* Фольклорные, краеведческие математические задачи народов России [Текст] / Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, С.А. Карташова идр. / под общ. ред. Н.И. Мерлиной. Чеборксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2012. 290 с.
7. *Захарова, А.* Элементы стохастики в 5-6 классах [Текст] / А. Захарова, Ю. Высочанская. – М.: Чистые пруды, 2010. – 32 с.: ил. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 36).
8. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие [Текст] Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. 732 с.
9. *Пырырко, Н.А*. Роль задач с практическим содержанием в активизации познавательного интереса учащихся к математике [Текст] / Н.А. Пырырко / Математика. Образование: материалы 21-й Междунар. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. – С. 187-194.
10. *Пырырко, Н.А.* Психолого-педагогические особенности учащихся 5-6 коррекционных (специальных) классов VII вида при обучении математике и информатике [Текст] / Н.А. Пырырко / Проблемы преподавания математики в школе и вузе в условиях реализации новых образовательных стандартов: Тезисы докладов участников XXXI Всероссийского семинара преподавателей математики высших учебных заведений, посвященного 25-летию семинара (26-29 сентября 2012 г., г. Тобольск). – Тобольск: ТГСПА им. Д.И. Менделеева, 2012. – С. 179-181.

11. *Пырырко, Н.А.* Исторические, фольклорные и краеведческие математические задачи народов крайнего севера – ненцев [Текст] / Н.А. Пырырко, Н.И. Мерлина / Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 15: педагогический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. – С. 22-33.
12. *Пырырко, Н.А.* Математика у народов Крайнего Севера – ненцев [Текст] / Н.А. Пырырко, Н.И. Мерлина / Математика в школе, № 4, 2014 г.