УДК 519.165

Об инцидентности вершин куба и подпространств коразмерности два

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Кубом называется многогранник полной размерности в многомерном пространстве, вершины которого имеют координаты 1 или -1. Гиперплоскость – это подпространство коразмерности один. Задача принадлежности хотя бы одной вершины куба гиперплоскости эквивалентна задаче о разбиении множества элементов, каждому из которых приписан вес, на два подмножества равного веса. В этом случае размерность куба равна мощности разбиваемого множества, а вес элемента равен коэффициенту линейной формы, определяющей гиперплоскость. Хорошо известно, что эта задача NP-полная, но разрешимая псевдополиномиальным алгоритмом, основанным на методе динамического программирования [1]. К этой задаче сводится поиск вершины куба в подпространстве большей коразмерности, при этом размерность куба не меняется.

Теорема. *Существует детерминированный алгоритм полиномиального времени, который сопоставляет линейной форме h с целыми коэффициентами подпространство коразмерности два. При этом если новое подпространство не инцидентно ни одной вершине куба, то гиперплоскость $h=0$ инцидентна чётному числу вершин куба. Более того, это подпространство задано линейными формами с гауссовыми целыми коэффициентами.*

Набросок доказательства. Если форма h не зависит от некоторой переменной, то гиперплоскость $h=0$ инцидентна чётному числу вершин куба. В этом случае новое подпространство задано уравнениями $h=0$ и $x_i=0$ и не инцидентно ни одной вершине куба.

Пусть все коэффициенты формы h отличны от нуля. Принадлежащие гиперплоскости вершины куба – это особые точки гиперплоского сечения вспомогательной кубической гиперповерхности типа Ферма [2, 3]. Исходная задача сводится к исследованию кубической формы, ранг которой на один больше числа переменных. Эта форма невырожденным линейным преобразованием координат приводится к виду, обобщающему нормальную форму Вейерштрасса для кривых. В новых координатах форма инвариантна относительно смены знака одной из координат y. И такое преобразование выражается в радикалах формулами, суммарная длина которых ограничена полиномом от длины записи формы h. Если число особых точек нечётное, то гиперплоскость $y=0$ также содержит нечётное число особых точек [4]. В общем случае это подпространство задано уравнениями с иррациональными коэффициентами. Но при аппроксимации не уменьшается число вершин куба, инцидентных этому подпространству. Пусть линейная форма s с комплексными коэффициентами от n переменных равна нулю в вершине куба. Тогда линейная форма t с гауссовыми целыми коэффициентами, модули которых отличаются от модулей соответствующих коэффициентов формы s менее чем на $1/(n+1)$, также равна нулю в этой вершине. Действительно, если значения всех переменных равны -1 или 1, а значение формы t не равно нулю, то модуль вещественной или мнимой части значения формы t не меньше 1. А изменение вещественной и мнимой частей каждого коэффициента менее чем на $1/(n+1)$ изменит вещественную и мнимую части значения формы в вершине менее чем на $n/(n+1)$.

Замечание. Если дан частный случай задачи разбиения множества, то вероятностным методом из [5] за полиномиальное время можно получить новый вариант этой задачи, имеющий не более одного решения. В этом случае существование решения эквивалентно нечётности числа решений нового варианта задачи. Увы, не известно, можно ли значительно увеличить коразмерность подпространства, описанного в теореме, что могло бы привести к созданию эффективного вероятностного алгоритма.

Автор благодарен К.Ю. Горбунову, В.И. Звонилову и В.А. Любецкому за обсуждение. Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14–50–00150).

Литература

1. *Tamir A*. New pseudopolynomial complexity bounds for the bounded and other integer Knapsack related problems // Oper. Res. Lett. – 2009. – V. 37. № 5. – P. 303–306.
2. *Латкин И.В., Селиверстов А.В.* Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. – 2015. – № 1 (77). – С. 47–55.
3. *Селиверстов А.В.* О вычислительной сложности поиска особых точек // Дискретная математика, алгебра и их приложения: Тезисы докладов Международной научной конференции, Минск, 14–18 сентября 2015, Минск: Институт математики НАН Беларуси. – 2015. – С. 135–137.
4. *Seliverstov A.V.* Cubic hypersurfaces with an odd number of singular points // International Conference Polynomial Computer Algebra '2015, St. Petersburg, April 13–18 2015, Euler International Mathematical Institute / ed. by N.N. Vassiliev. – 2015. – P. 85–86.
5. *Valiant L., Vazirani V.* NP is as easy as detecting unique solutions. – Theoretical Computer Science. – 1986. – V. 47. – P. 85–93.