УДК 519.146

Селиверстов А.В.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Об оптимизации на множестве вершин многомерного куба

Оптимизация многочлена второй степени на кубе является, вообще говоря, алгоритмически трудной задачей. Эффективные алгоритмы, например, метод псевдобулева программирования [1], применимы лишь в частных случаях. Интересно найти ограничения на взаимное расположение оптимальных вершин куба. Напомним, что для многочленов второй степени, имеющих достаточно много членов, доля вершин куба, в которых этот многочлен принимает фиксированное значение, стремится к нулю с ростом размерности куба [2]. Новые результаты показывают, что вершины, где достигается оптимум, не могут быть образовать слишком рыхлую конфигурацию.

Рассмотрим n-мерный вещественный куб, координаты вершин которого равны нулю или единице. Вес вершины куба равен числу её координат, равных единице. Параллелепипед меньшей размерности вложен в куб, если каждая вершина параллелепипеда является вершиной куба. Квадрикой называется множество нулей многочлена второй степени, может быть приводимого. Квадрика $f=0$ называется пустой, если в каждой вершине куба многочлен f принимает неотрицательное значение.

Теорема. *Дано целое число $2 \le w \le n-1$. Если каждая вершина веса 0 или w лежит на пустой квадрике, то все остальные вершины n-мерного куба также лежат на этой квадрике.*

На пустой квадрике, заданной уравнением

$$\sum_{i>j} x_i x_j = 0,$$

лежат все вершины веса 0 или 1 и только они. На пустой квадрике

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = 0$$

лежат антиподальные вершины веса 0 и n и только они. Поэтому границы для веса w в теореме нельзя улучшить.

Теорема верна также при ограничении на любой параллелепипед, вложенный в куб, если вес каждой вершины определять относительно параллелепипеда, то есть в координатах, связанных с его рёбрами.

Литература

1. *Береснев В.Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. — Новосибирск: Издательство института математики, 2005. — 408 с.
2. *Costello K.P.*, *Vu V.H.* The rank of random graphs // Random Structures and Algorithms. — 2008. — V. 33, N. 3 — P. 269-285.