Расположения точек на пустых квадриках

А.В. Селиверстов

ИППИ РАН

Конференция МАИС

6-7 февраля 2012

Рассмотрим множество $\mathbb{B}^n$ точек n-мерного вещественного пространства, координаты которых равны 0 или 1.

Вес точки равен сумме модулей координат.

Обозначим $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ и $\mathbf{e}_i \in \mathbb{B}^n$ точки веса 1.

Квадрикой в $\mathbb{R}^n$ называется множество нулей вещественного квадратичного многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$, может быть приводимого.

Квадрика $f = 0$ называется *пустой*, если в каждой точке из $\mathbb{B}^n$ многочлен f принимает неотрицательное значение.

Рассмотрена структура множества точек минимума квадратичного многочлена f на множестве $\mathbb{B}^n$.

Известны эффективные алгоритмы минимизации

- многочлена с трёхдиагональной матрицей квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i x_{i+1}$$

- многочлена с разделяющимися переменными, $n = m + k$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} y_i x_j$$

  где $a_i \leqslant 0$, $b_j \leqslant 0$ и $c_{ij} \geqslant 0$.

- многочлена

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

  где $c_{ij} \leqslant 0$.

Обозначим $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Определим отображение

$$\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = (x_1 x_2, \ldots, x_{n-1} x_n)$$

Это элементы квадратной матрицы $\mathbf{x}\mathbf{x}^t$ выше главной диагонали.

Теорема 1 *Даны пустая квадрика $f = 0$ в n-мерном пространстве и такое подмножество $S \subset \mathbb{B}^n \backslash \{\mathbf{1}\}$, что точка $\lambda(\mathbf{1}) \in \mathbb{R}^N$ равна линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами точек*

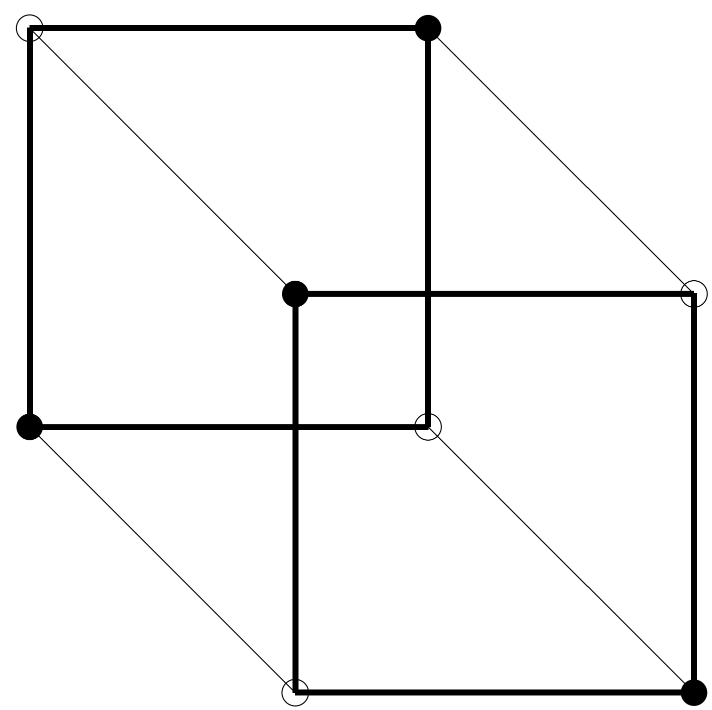
$$\{\lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N | \mathbf{x} \in S\}.$$

Если точка $\mathbf{0}$ и все точки из S лежат на этой квадрике, то всё множество $\mathbb{B}^n$ лежит на ней.

Если четыре точки из $\mathbb{B}^3$ с координатами $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ и $(1,0,1)$ лежат на пустой квадрике, то всё $\mathbb{B}^3$ лежит на ней.

$$\lambda(1,1,1) = \lambda(0,1,1) + \lambda(1,1,0) + \lambda(1,0,1)$$

Аналогично, если четыре точки из $\mathbb{B}^3$ с координатами $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ и $(1,1,1)$ лежат на пустой квадрике, то всё $\mathbb{B}^3$ лежит на ней.



Если пять точек из $\mathbb{B}^4$ с координатами

$(0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ и $(1, 0, 0, 1)$

лежат на пустой квадрике, то всё множество $\mathbb{B}^4$ лежит на ней.

В этом случае

$$\lambda(1, 1, 1, 1) = \lambda(0, 1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0, 1)$$

Теорема 2 *Даны пустая квадрика в n-мерном пространстве и целое число w, где $2 \leqslant w \leqslant n-1$. Если точка $\mathbf{0}$ и все точки из $\mathbb{B}^n$ веса w лежат на этой квадрике, то всё множество $\mathbb{B}^n$ лежит на этой квадрике.*

В этом случае

$$\lambda(\mathbf{1}) = \frac{(n-w)!(w-2)!}{(n-2)!} \sum \lambda(\mathbf{x})$$

Здесь суммирование происходит по всем точкам из $\mathbb{B}^n$ веса w.

Теорема остается верной для любого аффинного образа $\mathbb{B}^n$ при соответствующем переопределении веса. Это позволяет найти на квадрике 2^k точек из $\mathbb{B}^n$, если уже известно $k+1$ таких точек, определенным образом расположенных на образе $\mathbb{B}^k \to \mathbb{B}^n$.

Теорема 2 *Даны пустая квадрика в n-мерном пространстве и целое число w, где $2 \leqslant w \leqslant n-1$. Если точка $\mathbf{0}$ и все точки из $\mathbb{B}^n$ веса w лежат на этой квадрике, то всё множество $\mathbb{B}^n$ лежит на этой квадрике.*

Замечание. На пустой квадрике

$$\sum_{i>j} x_i x_j = 0$$

лежат все вершины веса 0 или 1 и только они.

На пустой квадрике

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 0$$

лежат все вершины веса 0 или n и только они.

Поэтому в теореме границы для веса w улучшить нельзя.

Теорема 3 *Даны пустая квадрика в n-мерном пространстве и целое число w, где $2 \leqslant w \leqslant n-2$. Если все точки из $\mathbb{B}^n$ веса w лежат на этой квадрике, но некоторая точка из $\mathbb{B}^n$ другого веса не лежит на ней, то вес каждой точки из $\mathbb{B}^n$, лежащей на этой квадрике, равен одному из трёх значений $w-1$, w или $w+1$.*

Замечание. В посылке теоремы нельзя положить $w = 1$, поскольку на квадрике $(x_1 + \ldots + x_n - 1) \cdot x_1 = 0$ лежат все точки веса один и все точки с координатой $x_1 = 0$ весов от нуля до $n-1$, но не лежит точка $\mathbf{1}$.

Обозначим $\mathbb{V}_n$ образ множества $\mathbb{B}^n$ при отображении

$$(\mathrm{id}, \lambda) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N,$$

BQP_n — выпуклую оболочку множества $\mathbb{V}_n$.

Каждая точка из $\mathbb{V}_n$ — вершина 2-смежностного $(n+N)$-мерного многогранника BQP_n.

На квадрике вида $\alpha_0 \cdot f(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_1(x_1^2 - x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n^2 - x_n) = 0$ при $\alpha_0 \neq 0$ лежат те и только те точки из $\mathbb{B}^n$, которые лежат на квадрике $f = 0$. Эти квадрики назовём *эквивалентными*. Класс эквивалентных пустых квадрик определяет опорную гиперплоскость к многограннику BQP_n. Наиболее интересно описание его граней большой размерности.

Теорема 4 *Дана квадрика $f = 0$, соответствующая некоторой стороне многогранника BQP_n, на которой лежат начало координат $\mathbf{0}$ и все точки веса один $\{\mathbf{e}_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Существует такая пара индексов $i \neq j$, что квадрика $f = 0$ эквивалентна квадрике $x_i x_j = 0$.*

В этом случае доля лежащих на квадрике точек из $\mathbb{B}^n$ равна $\frac{3}{4}$, то есть достигает максимального из возможных значений, строго меньших 1.

Заключение

- Некоторые ограничения наложены на взаимное расположение оптимальных точек, когда их достаточно много.

- Точки из $\mathbb{B}^n$, лежащие на пустой квадрике, не могут образовать слишком рыхлую конфигурацию.

- Если известно достаточно много точек из $\mathbb{B}^n$, лежащих на пустой квадрике, то можно легко искать новые такие точки. Более того, в этом случае существуют большие классы таких точек, допускающих единое описание.

Спасибо за внимание!

Я благодарен Константину Юрьевичу Горбунову за обсуждение и многочисленные замечания.

Слайды подготовлены в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$