Селиверстов А.В.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН), ведущий научный сотрудник, slvstv@iitp.ru

Алгоритм проверки совместимости системы двух уравнений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

Многочлен, система уравнений, регулярная функция, вычислительная сложность .

АННОТАЦИЯ:

Обсуждается вычислительная сложность проверки совместности системы двух алгебраических уравнений и поиска особой точки на гиперповерхности. Показано, что проверка обратимости элемента в кольце регулярных функций на аффинной гиперповерхности может быть выполнена вероятностным алгоритмом без явного вычисления обратного элемента.

Проблема выбора хорошего решения или доказательство его отсутствия среди большого объема возможных вариантов часто оказывается алгоритмически трудной задачей. Примером такой задачи, тесно связанной с дискретной оптимизацией и могущей иметь приложение в области биоинформатики, служит распознавание гладких аффинных гиперповерхностей.

Рассмотрим комплексную гиперповерхность, заданную многочленом степени d от n переменных с рациональными коэффициентами, гладкую или имеющую конечное число изолированных особых точек. Легко построить пример такой гиперповерхности при $d = 4$ с особыми точками в каждой вершине куба. Число особых точек может ещё быть больше. При $d = 4$ и $n = 3$ в 1875 году Е.Е. Куммер построил поверхность, имеющую 16 особых точек.

Распознавание существования особой точки на n-мерной квартике ($d = 4$), заданной многочленом с рациональными коэффициентами, является NP-полной задачей. Доказательство основано на сводимости задачи о рюкзаке к данной.

Поиск особой точки на аффинной гиперповерхности, заданной многочленом степени d от n переменных с рациональными коэффициентами, сводится к решению системы уравнений, выражающих обращение в нуль этого многочлена и его градиента. Общим методом решения служит вычисление базиса Грёбнера соответствующего идеала. Однако с ростом числа переменных n или степени d вычисления становятся очень трудными.

Для большого числа переменных n проверкой гладкости может служить изоморфизм с гиперповерхностью, полученной небольшой деформацией. Такой изоморфизм определяется набором регулярных функций, то есть классами эквивалентных многочленов. При $d = 2$ эти многочлены — линейные функции. Увы, для больших степеней не известно хорошей оценки для степени многочленов, задающих изоморфизм.

Частным вопросом, возникающим при доказательстве существования бирегулярного изоморфизма аффинных гиперповерхностей, служит проверка обратимости элемента в кольце регулярных функций. При $n = 1$ задача эффективно решается алгоритмом Евклида. В общем случае задача решается вычислением базиса Грёбнера идеала, порождаемого двумя многочленами. Однако сложность такого вычисления может быть очень высокой при больших значениях n из-за появления на промежуточных шагах многочленов высокой степени.

Сформулируем основной результат. Существует вероятностный алгоритм проверки несовместности системы двух алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами степени не выше d от n переменных, требующий $poly(n)$ арифметических операций над полем при фиксированной верхней границе для степени d.

Отсюда следует, что существует эффективно проверяемое подтверждение обратимости элемента в кольце регулярных функций на аффинной гиперповерхности малой степени. Однако алгоритм не предъявляет обратный элемент, даже если он существует.

Отметим, что каждое случайно выбираемое рациональное число представимо дробью с маленькими числителем и знаменателем. Таких чисел конечное число. Поэтому вероятность ошибки строго больше нуля. Параллельное тестирование с использованием независимых случайных последовательностей позволяет значительно снизить вероятность ошибки, которая экспоненциально быстро уменьшается с ростом числа выполняемых тестов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13-04-40196-Н).