УДК 514.174

Понижение размерности для решения задач о расположении подпространства и вершин куба

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук
e-mail: slvstv@iitp.ru

Dimensionality reduction to solve problems on the arrangement of a subspace and cube vertices

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru

1. Введение

Задачи о взаимном расположении аффинного подпространства и вершин единичного куба служат примерами задач, которые вычислительно трудны в худшем случае, но для решения которых известно несколько эвристических методов. Мы рассматриваем аффинные пространства над произвольным полем, характеристика которого не равна двум. Можно работать в евклидовых пространствах над полем вещественных чисел [1]. Если требовать эффективности вычислений, то наиболее изучены эвристические алгоритмы для решения таких задач над полем рациональных чисел [2, 3, 4, 5]. Однако наши результаты остаются справедливыми, в частности, над конечными полями нечётной характеристики, которые широко применяются в дискретной математике [6, 7].

В евклидовом пространстве для понижения размерности посредством ортогонального проектирования применимы вероятностные алгоритмы, которые основаны на лемме Джонсона–Линденштрауса [8, 9].

Над неупорядоченным полем понятие ортогональной проекции не определено. Поэтому мы предполагаем, что в каждом аффинном пространстве фиксирована система декартовых координат. Далее любая проекция забывает некоторую координату.

Точки с координатами из множества $\{0, 1\}$ называются вершинами единичного куба. В евклидовом пространстве это вершины настоящего куба, но над неупорядоченным полем понятие многогранника не определено. По сути, мы отождествляем единичный куб с конечным множеством точек. При забывающей некоторые координаты проекции на координатное подпространство образом вершины единичного куба вновь служит некоторая вершина.

Плоскостью называется двумерное подпространство независимо от размерности объемлющего пространства. В n-мерном пространстве гиперплоскостью называется подпространство размерности $n-1$. Обозначим через ξ_k координатную гиперплоскость, заданную уравнением $x_k = 0$, а через $\bar{\xi}_k$ параллельную ей гиперплоскость, заданную уравнением $x_k = 1$. Пересечение единичного куба с гиперплоскостью ξ_k или $\bar{\xi}_k$ называется фасетой, а непустое пересечение фасет называется собственной гранью. Грань, содержащая ровно две вершины единичного куба, называется его ребром. Над неупорядоченным полем мы отождествляем грань единичного куба с множеством принадлежащих этой грани вершин. Однако размерностью грани называется размерность её аффинной оболочки, то есть наименьшего по включению аффинного подпространства, содержащего все вершины грани.

2. Результаты

Предложение 1. *Дано положительное натуральное число $s \geqslant 1$. В аффинном пространстве размерности $n = 2s+1$ существует s-мерное подпространство L, которое не инцидентно никакой вершине единичного куба, но при забывающей координату проекции на любую координатную гиперплоскость образ подпространства L инцидентен некоторой вершине единичного куба.*

Доказательство. Пусть $s = 1$. Рассмотрим три точки в трёхмерном аффинном пространстве с координатами $(1/2, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ и $(1, 1, -1)$, соответственно. Эти точки лежат на прямой L, которая задана системой из двух уравнений $1 - 2x_1 + x_2 = 0$ и $x_2 + x_3 = 0$. Проекция этого множества из трёх точек на любую координатную плоскость содержит некоторую точку с координатами из множества $\{0, 1\}$. Но прямая L не инцидентна ни одной из восьми вершин единичного куба.

Пусть $s > 1$. Обозначим через A точку с координатами $(1/2, 0, \ldots, 0)$, где все кроме первой координаты равны нулю. Для $1 \leqslant k \leqslant s$ точка $A^{(2k)}$ имеет координаты $(0, \ldots, -1, 1, \ldots)$, где только две координаты отличны от нуля: $A^{(2k)}_{2k} = -1$ и $A^{(2k)}_{2k+1} = 1$. Точка $A^{(2k+1)}$ имеет координаты $(1, \ldots, 1, -1, \ldots)$, где только три координаты отличны от нуля: $A^{(2k+1)}_1 = 1$, $A^{(2k+1)}_{2k} = 1$ и $A^{(2k+1)}_{2k+1} = -1$. Все эти точки A, $A^{(2k)}$ и $A^{(2k+1)}$ лежат в некотором аффинном подпространстве L, которое задано системой, состоящей из уравнения $1 - 2x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} + \cdots + x_{2s} = 0$ и ещё s уравнений $x_{2k} + x_{2k+1} = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant s$.

Поскольку эти уравнения линейно независимые, $\dim L \leqslant s$. С другой стороны, для любого $1 \leqslant k \leqslant s$ три точки A, $A^{(2k)}$ и $A^{(2k+1)}$ принадлежат прямой. Все такие прямые пересекаются в точке A. Аффинная оболочка этих s прямых имеет размерность s и вложена в L. Поэтому $\dim L \geqslant s$. Следовательно, $\dim L = s$.

При забывающей некоторую координату проекции на любую координатную гиперплоскость, образ подпространства L содержит некоторую вершину единичного куба, которая служит образом одной из точек A, $A^{(2k)}$ или $A^{(2k+1)}$. Покажем, что само L не содержит вершин единичного куба. Если все $x_{2k} = 0$, то из первого уравнения системы следует $x_1 = 1/2$. Иначе для некоторого k выполнено $x_{2k} = 1$ и $x_{2k+1} = -1$. □

Предложение 2. *В 4-мерном аффинном пространстве существует плоскость L, которая не инцидентна никакой вершине единичного куба, но при забывающей координату проекции на любую координатную гиперплоскость образ плоскости L инцидентен некоторой вершине единичного куба.*

Доказательство. Определим плоскость L системой из двух уравнений $x_3 = x_1 + x_2 + 1$ и $x_4 = (-x_1 + x_2 + 1)/2$. Эта плоскость не инцидентна никакой вершине единичного куба. Однако L проходит через точки $(-1, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(1, 0, 2, 0)$ и $(0, 0, 1, 1/2)$, у каждой из которых ровно одна координата отлична от нуля и от единицы. Поэтому при забывающей одну из координат проекции образ плоскости L инцидентен некоторой вершине единичного куба. □

Предложение 3. *Дано натуральное число $n \geqslant 4$. В n-мерном аффинном пространстве для каждой прямой L, которая не инцидентна никакой вершине единичного куба, существует забывающая координату проекция на некоторую координатную гиперплоскость, при которой образ прямой L снова не инцидентен никакой вершине единичного куба.*

Предложение 4. *Если прямая L пересекает каждую из трёх прямых, содержащих рёбра единичного куба, но прямая L не инцидентна никакой вершине единичного куба, то прямая L лежит в аффинной оболочке 3-мерной грани единичного куба.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что прямая L пересекает первую координатную ось в точке A с координатами $(a, 0, \dots, 0)$, где все координаты кроме первой равны нулю и $a \notin \{0, 1\}$. Для некоторого $k \geqslant 2$ прямая L проходит через точку W, у которой все координаты кроме k-ой принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

Прямая L состоит из точек $tA + (1-t)W$, где через t обозначен параметр. Если у точки W среди координат кроме первой какие-то две координаты равны единице, то эти координаты у любой третьей точки на прямой L тоже отличны и от нуля и от единицы. Однако по условию на прямой L найдётся третья точка, у которой ровно одна координата отлична от нуля и от единицы. Следовательно, у точки W не более трёх координат могут отличаться от нуля, включая первую. Поэтому прямая L лежит в координатном подпространстве размерности не выше трёх. □

Предложение 5. *Дано натуральное число $n \geqslant 6$. В n-мерном аффинном пространстве для каждой плоскости L, которая не инцидентна никакой вершине единичного куба, существует забывающая координату проекция на некоторую координатную гиперплоскость, при которой образ плоскости L снова не инцидентен никакой вершине единичного куба.*

Доказательство. Если для некоторого $k \leqslant n$ плоскость L параллельна k-й координатной оси, то образом L при проекции, забывающей k-ю координату, служит прямая, не инцидентная никакой вершине единичного куба. Иначе плоскость L пересекает по прямым каждую из гиперплоскостей ξ_k и $\bar{\xi}_k$, которые заданы уравнениями $x_k = 0$ и $x_k = 1$, соответственно. Каждая из прямых $L \cap \xi_k$ и $L \cap \bar{\xi}_k$ пересекает не более трёх попарно непараллельных прямых, содержащих рёбра единичного куба.

Предположим, что для каждого $k \leqslant n$ объединение двух гиперплоскостей ξ_k и $\bar{\xi}_k$ содержит не менее пяти попарно непараллельных прямых, содержащих рёбра единичного куба и пересекающих плоскость L. Тогда для каждого $k \leqslant n$ одна из двух прямых $L \cap \xi_k$ и $L \cap \bar{\xi}_k$ пересекает три такие прямые. Без ограничения общности можно считать, что L пересекает первую координатную ось, а прямые $L \cap \xi_3$ и $L \cap \xi_5$ лежат в 3-мерных координатных подпространствах, пересекающихся по первой координатной оси. Тогда плоскость L лежит в 5-мерной координатной гиперплоскости. Противоречие.

Следовательно, искомая проекция существует. □

Следующий результат справедлив лишь над полем вычетов по модулю три.

Предложение 6. *Даны натуральные числа $n \geqslant 1$ и $s \geqslant n - \log_3(2n-1)$. В аффинном пространстве размерности n над полем вычетов по модулю три для любого s-мерного подпространства L выполнено одно из двух: либо L инцидентно некоторой вершине единичного куба, либо существует забывающая координату проекция на некоторую координатную гиперплоскость, при которой образ подпространства L не инцидентен никакой вершине единичного куба.*

3. Заключение

Подпространство общего положения, коразмерность которого равна двум или выше, проектируется на некоторую координатную гиперплоскость так, что его образ не содержит вершин единичного куба. Однако в худшем случае это возможно лишь для подпространств малой размерности. Наши результаты согласуются с общепринятой гипотезой о высокой вычислительной сложности задач псевдобулева программирования, поскольку изменение размерности задачи посредством проектирования встречает препятствие в худшем случае. Но полученные оценки оставляют возможность для некоторого понижения размерности.

Автор благодарен Алексею Александровичу Бойкову (РТУ МИРЭА) за обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Латкин И. В., Селиверстов А. В. О вычислениях над упорядоченными кольцами // Сибирские электронные математические известия. 2022. Том 19. № 2. С. 1054–1076. https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.085
2. Кузюрин Н. Н. Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Том 1. № 3. С. 38–48.
3. Pan Y., Zhang F. Solving low-density multiple subset sum problems with SVP oracle // Journal of Systems Science and Complexity. 2016. Vol. 29. P. 228–242. https://doi.org/10.1007/s11424-015-3324-9
4. Селиверстов А. В. О двоичных решениях систем уравнений // Прикладная Дискретная Математика. 2019. № 45. С. 26–32. https://doi.org/10.17223/20710410/45/3
5. Селиверстов А. В. Двоичные решения для больших систем линейных уравнений // Прикладная Дискретная Математика. 2021. № 52. С. 5–15. https://doi.org/10.17223/20710410/52/1
6. Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. М.: Наука, 1980. 320 с.
7. Яшунский А. Д. О суммах бернуллиевских случайных величин по модулю 3 // Математические заметки. 2022. Том 111. № 1. С. 154–157. https://doi.org/10.4213/mzm13214
8. D'Ambrosio C., Liberti L., Poirion P.-L., Vu K. Random projections for quadratic programs // Mathematical Programming. 2020. Vol. 183. P. 619–647. https://doi.org/10.1007/s10107-020-01517-x
9. Poirion P.-L., Lourenço B.F., Takeda A. Random projections of linear and semidefinite problems with linear inequalities // Linear Algebra and its Applications. 2023. Vol. 664. P. 24–60. https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.01.013

———————————————————————

УДК 514.172.45

О существовании многогранника, близкого к правильногранному с условными рёбрами

В. И. Субботин (Россия, г. Новочеркасск)
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова
e-mail: geometry@mail.ru

On the existence of a polyhedron close to a polyhedron with regular faces and with conditional edges

V. I. Subbotin (Russia, Novocherkassk)
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
e-mail: geometry@mail.ru